Haskell B. Curry
Robert Feys

Lógica combinatoria

ESTRUCTURA Y FUNCION
EDITORIAL TECNOS, S. A. - MADRID

1370

ESTRUCTURA Y FUNCION

EL PORVENIR ACTUAL DE LA CIENCIA

COLECCIÓN DIRIGIDA POR

ENRIQUE TIERNO GALVAN

Núm. 1.—*Quentin Gibson.*—LA LOGICA DE LA INVESTIGACION SOCIAL (2.ª edición).
» 2.—*M. F. Ashley Montagu.*—LA DIRECCION DEL DESARROLLO HUMANO.
» 3.—*Gustav Bergmann.*—FILOSOFIA DE LA CIENCIA.
» 4.—*Christian Bay.*—LA ESTRUCTURA DE LA LIBERTAD.
» 5.—*Ernest Nagel.*—LA LOGICA SIN METAFISICA.
» 6.—*David Hilbert* y *Wilhelm Ackerman.*—ELEMENTOS DE LOGICA TEORICA.
» 7.—*Vernon Van Dyke.*—CIENCIA POLITICA: UN ANALISIS FILOSOFICO.
» 8.—*Karl R. Popper.*—LA LOGICA DE LA INVESTIGACION CIENTIFICA.
» 9.—*R. M. Martin.*—VERDAD Y DENOTACION.
» 10.—*Ernest Gellner.*—PALABRAS Y COSAS
» 11.—*C. D. Broad.*—EL PENSAMIENTO CIENTIFICO.
» 12.—*John Hospers.*—LA CONDUCTA HUMANA
» 13.—*Arthur Pap.*—TEORIA ANALITICA DEL CONOCIMIENTO.
» 14.—*T. C. Schelling.*—LA ESTRATEGIA DEL CONFLICTO.
» 15.—*Richard B. Braithwaite*—LA EXPLICACION CIENTIFICA.
» 16.—*Milic Capek.*—EL IMPACTO FILOSOFICO DE LA FISICA CONTEMPORANEA.
» 17.—*William R. Ashby.*—PROYECTO PARA UN CEREBRO.
» 18.—*Hans Reichenbach.*—MODERNA FILOSOFIA DE LA CIENCIA.
» 19.—*George Polya.*—MATEMATICAS Y RAZONAMIENTO PLAUSIBLE.
» 20.—*George L. S. Shackle.*—DECISION, ORDEN Y TIEMPO.
» 21.—*D. M. Armstrong.*—LA PERCEPCION Y EL MUNDO FISICO.
» 22.—*Ernest Nagel.*—RAZON SOBERANA.
» 23.—*Max Black.*—MODELOS Y METAFORAS.

EN PREPARACIÓN

Jean Ladrière.—LAS LIMITACIONES INTERNAS DE LOS FORMALISMOS.
Ludwig Wittgenstein.—LOS LIBROS AZUL Y PARDO.

Lógica combinatoria

HASKELL B. CURRY
Profesor de Matemáticas
Universidad del Estado de Pensilvania

ROBERT FEYS
Profesor de Filosofía
Universidad Católica de Lovaina

Lógica combinatoria

*

COLABORACION DE

WILLIAM CRAIG
Profesor asociado de Matemáticas
Universidad del Estado de Pensilvania

ESTRUCTURA Y FUNCION

EDITORIAL TECNOS - MADRID

Los derechos para la versión castellana de la obra

COMBINATORY LOGIC

publicada por *North-Holland Publishing Company*, de Amsterdam,
son propiedad de EDITORIAL TECNOS, S. A.

Traducción por
MANUEL SACRISTAN

© EDITORIAL TECNOS, S. A., 1967
Calle O'Donnell, 27.—Teléf. 2262923.—MADRID (9)

Depósito legal: M. 15.168-1967

SUCESORES DE RIVADENEYRA, S. A.—PASEO DE ONÉSIMO REDONDO, 26.—MADRID-8

INDICE

Págs.

PRÓLOGO 9

ACLARACIÓN DE LAS NOTACIONES 13

INTRODUCCIÓN 19

CAPÍTULO PRIMERO. Sistemas formales 31

CAPÍTULO SEGUNDO. Epiteoría 63

CAPÍTULO TERCERO. Conversión lambda 112

CAPÍTULO CUARTO. El teorema de Church-Rosser 146

CAPÍTULO QUINTO. Teoría intuitiva de combinadores 196

CAPÍTULO SEXTO. Teoría sintética de combinadores 238

CAPÍTULO SÉPTIMO. Fundamentos logísticos 302

CAPÍTULO OCTAVO. Introducción a la lógica combinatoria ilativa 323

CAPÍTULO NOVENO. La teoría básica de la funcionalidad 347

CAPÍTULO DÉCIMO. Las teorías fuertes de la funcionalidad 426

APÉNDICE A. Lista de constantes básicas 462

APÉNDICE B. Lista de propiedades de relaciones 465

BIBLIOGRAFÍA 467

INDICE ANALÍTICO 479

Prólogo

En una reunión celebrada en Amsterdam en tiempo del X Congreso Internacional de Filosofía se sugirió a uno de nosotros que escribiera una monografía sobre lógica combinatoria, situable en el marco, entonces proyectado, de una serie de breves volúmenes sobre lógica y fundamentación de la matemática. Difícilmente tendrían los autores de la sugerencia una idea de la cantidad y la complejidad de la investigación inédita sobre el tema; su idea era, sin duda, la publicación de una obra de exposición que hiciera accesible en forma legible y sistemática el ámbito de nuestro actual conocimiento del tema. Pero, a pesar de todo, la propuesta presentada en aquella reunión dejó semilla en uno de nosotros; de aquella semilla ha crecido este vástago.

Teniendo en cuenta la importancia que la idea inicial daba al aspecto expositivo nos pareció que la mejor solución era dedicarnos dos a la realización del proyecto. El plan primero fue destinar en principio a Feys todas las cuestiones de exposición, las cuestiones de relevancia filosófica, motivación, etc., y a Curry los aspectos más técnicos y la elaboración de nueva investigación de naturaleza matemática. Efectivamente, nos hemos atenido, en principio, al plan, pero viéndonos obligados a apartarnos de él en varios sentidos. Así, por ejemplo, nos fue imposible publicar en francés y, por otra parte, descubrimos pronto que algunos de los primeros fragmentos redactados requerían una composición técnica más rigurosa que la que al principio consideramos necesaria. La primera versión de la mayor parte de los capítulos **1-5** *y algunas partes de los capítulos* **6** *y* **7** *fue, efectivamente, preparada por Feys; pero luego adoptamos un proceso alternante, como una de las demostraciones del principio de Dirichlet por Schwarz, en la que el tratamiento definitivo sale después de un número finito de iteraciones.*

Pensamos desde el principio que la obra completa tendría dos volúmenes. Nuestro plan inicial al respecto se formula en la introducción (§ **0C**). *Nos hemos apartado de ese plan, en parte por razones puramente prácticas y en parte porque el nuevo plan nos permite publicar inmediatamente en*

el primer volumen algunos resultados recientes, mientras que el atenernos al plan inicial habría significado posponer esos resultados hasta terminar estudios situados un tanto marginalmente en nuestro principal campo de intereses. Para el caso de que no consiguiéramos completar el segundo volumen es más importante presentar nuestras nuevas ideas que seguir fieles a un plan previo teórico.

*El presente libro es, pues, tanto primera publicación de nuevos resultados cuanto exposición del conjunto del conocimiento disponible. Pero, de acuerdo con la intención primera de esta serie de libros *, nos hemos esforzado por conseguir que nuestro libro se sea autosuficiente. Por eso nos hemos decidido a discutir más bien por lo largo la significación intuitiva de varias nociones básicas y a dar demostraciones detalladas en las partes más técnicas. Y ello no sólo por hacer más fácil la lectura. Serán una media docena las personas que han escrito a un nivel técnico sobre lógica combinatoria, y algunas de ellas, incluyéndonos nosotros mismos, han publicado cosas erróneas. Y como algunos de nuestros compañeros de pecados se cuentan entre los lógicos más exigentes y competentes del día, el hecho nos parece evidencia suficiente de que es el tema mismo el que resulta recalcitrante. Por tanto, una exposición completa y detallada es necesario requisito del rigor; una condensación excesiva sería aquí, aún más que de ordinario, falsa economía.*

El programa del libro es, pues, establecer un tratamiento detallado, ser un tratado detallado de una determinada fase de la lógica moderna. Por lo que hace a la naturaleza de esta fase y a su relación con otras partes de la lógica remitimos al lector a la introducción y a la literatura citada en ella, especialmente a la tesis de Cogan.

Como habrá adivinado el lector por lo que antecede, partes de nuestro tratamiento son de un carácter muy elevado y difícil. Hemos intentado situar esas partes hacia los finales de capítulo y sección, de tal forma que, aunque la obra está estructurada de tal modo que cada capítulo se basa en el anterior, no sea en absoluto necesario leer la totalidad de un capítulo antes de proceder a la lectura del siguiente. El plan varía, en realidad, de capítulo a capítulo, pero, en general, hemos intentado adelantar al principio las ideas principales y exponer luego los detalles técnicos: el lector puede perfectamente posponer dichos detalles técnicos hasta que le hagan falta. Especialmente el largo capítulo sobre epiteoría no debe asustar a nadie. El lugar lógico del capítulo es, desde luego, el que

---

* La edición original de esta obra apareció en la serie *Studies in Logic and The Foundations of Mathematics*, dirigida por Brouwer, Beth y Heyting para la North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1958). *N. del T.*

ocupa en el libro: puesto que la lógica combinatoria aspira a ser un análisis de los fundamentos últimos es oportuno tratar desde un punto de vista general las cuestiones metodológicas que se suscitan a su respecto; pero gran parte del capítulo debe catalogarse entre los detalles técnicos.

Al final de la mayoría de los capítulos hay una sección especial, § S, *rotulada «Temas suplementarios». Como ya indica ese rótulo mismo, una tal sección estudia temas más o menos inconexos, pero que constituyen de un modo u otro suplementos al capítulo de que se trate. El tratamiento puede ser en ellas más breve y menos formal; puede suponer en el lector conocimiento de otra literatura, con lo que deja de ser exigible, en todo caso, el principio de autosuficiencia del texto; análogamente nos referimos a veces en el libro a resultados que no se obtienen sino en los últimos capítulos. Frecuentemente se encontrará discusión de naturaleza histórica o bibliográfica; en ella hemos expuesto, generalmente, hechos históricos de los que tenemos alguna experiencia directa; pero no somos historiadores y no hemos intentado hacer en esos lugares investigación histórica. En particular hay que decir que las obras citadas a propósito de determinadas ideas no son siempre las fuentes originales de dichas ideas; en algunos casos, cuando las fuentes originales nos eran desconocidas o inaccesibles, hemos citado otras autoridades cuya influencia en nosotros es más directa.*

Las secciones §§ 5H *y* 7E *son aportaciones de William Craig y presentan resultados obtenidos por él en el verano de 1954, y que se publican aquí por vez primera.*

El hecho de que nuestro trabajo se basara en una financiación con límite temporal (véase el párrafo siguiente) ha impuesto ciertos compromisos para respetar lo pactado. Los compromisos más importantes se produjeron así: los capítulos y secciones no han sido escritos en el orden en que aparecen en el índice. Lo último redactado fue la sección final del capítulo 6. *Al redactarla nos resultó necesario considerar el combinador de identidad* (I) *como una primitiva independiente en vez de definirlo como se ha venido haciendo desde Schönfinkel. Pero ese resultado se presentaba demasiado tarde para que pudiéramos hacer más que poner notas en diversos lugares del texto, indicando la permisibilidad de dicho cambio.*

Hemos recibido para la preparación de este volumen ayuda financiera de varias fuentes. En 1950-51 fue posible a Curry pasar un año en Lovaina gracias a una beca concedida según la ley Fulbright. En 1954-55 el trabajo se basó en una beca de la National Science Foundation, de Estados Unidos. Esta beca permitió a tres personas trabajar en el proyecto: Curry, Craig y Cogan; Craig completó las dos secciones ya dichas, mientras que Cogan terminó su tesis doctoral [FTS]. En 1955-56 concedió otra beca la Research Corporation, New York City. Con ella se pagó a un ayudante

titulado, a media jornada: Walter Sillars, al que agradecemos una gran ayuda en la preparación material del manuscrito. En Bélgica Feys recibió una ayuda del Centre National de Recherches de Logique. Sin toda esa generosa ayuda la redacción final del manuscrito habría sido, sin duda, trabajo muy difícil.

También estamos en deuda con colegas de la Universidad del Estado de Pensilvania. No sólo Craig, sino también Paul Gilmore han leído partes del manuscrito y han hecho valiosas sugerencias. Las cuatro figuras del capítulo 4 son obra de K. R. Davenport, del Departamento de Ingeniería Mecánica.

El volumen que ahora presentamos al público no es una publicación de todo lo conocido sobre lógica combinatoria en el momento en que empezamos a trabajar en el proyecto; por otra parte, contiene resultados que no eran conocidos entonces. Esperamos poder completar el proyecto en un futuro no demasiado lejano.

HASKELL B. CURRY
ROBERT FEYS

Aclaración de las notaciones

En estas aclaraciones vamos a reunir, para facilitar las referencias, unas cuantas convenciones sobre la notación y el simbolismo. En ciertos contextos particulares podemos salirnos de estas convenciones; pero no sin indicarlo explícitamente. En estas aclaraciones todos los símbolos mencionados se refieren a sí mismos y no hay necesidad de comillas ni de cualquier otro expediente análogo porque no hay tampoco aquí posibilidad de confundir un símbolo con su significación.

Referencias de un lugar a otro

Los capítulos de esta obra se designan por cifras árabes en negrita vertical: **1**, **2**, **3**, ... La cifra **0** se adscribe a la introducción. Las referencias a capítulos enteros se hacen, pues, por ejemplo, así: capítulo **5**.

Las divisiones principales de los capítulos se llaman secciones y se designan por mayúsculas romanas: A, B, C, ... Una referencia a una sección consta del número del capítulo seguido por la letra de la sección, anteponiendo a todo el signo § (por ejemplo: § 4B); cuando se omite el número del capítulo es que la referencia es a una sección del mismo capítulo en que se encuentra. En algunos capítulos la última sección, indicada por § S, contiene material de carácter suplementario.

Las secciones se dividen en artículos designados por cifras árabes. Los artículos se citan escribiendo la cifra detrás del signo § (por ejemplo: § 5) si la referencia es a otro artículo de la misma sección; en otro caso el número del artículo va precedido por la designación de la sección; por ejemplo: § 5B5, § B5.

A veces los artículos se dividen en subdivisiones menores designadas por a, b, c, ... y que se citan análogamente.

Los teoremas y fórmulas se numeran correlativamente en cada sección. Cuando se cita un teorema o fórmula de otra sección se obtiene del modo siguiente la designación de la sección: teorema B4 quiere decir

teorema 4 de § B; teorema 5B4 quiere decir teorema 4 de § 5B; § B(6) significará fórmula (6) de § B, y § 5B(6) significa fórmula (6) de § 5B. Los números de fórmulas pueden distinguirse por el hecho de que van entre paréntesis.

Lo dicho sobre teoremas se aplica, *mutatis mutandis*, a las definiciones. Respecto de lemas y observaciones, la situación es más flexible y no hemos intentado establecer un procedimiento rígido de referencia para todo el libro.

Citas bibliográficas

Las referencias a otras obras se hacen dando el apellido del autor (o de los autores, si son varios) y un título abreviado que consiste en unas letras romanas entre corchetes. En la bibliografía se encuentra la aclaración de esas citas abreviadas, así como plenos detalles bibliográficos. Cuando no se indica autor (ni explícitamente ni por el contexto) se entiende que éste es Curry; al principio de la bibliografía se relacionan unas pocas excepciones a esta regla.

Uso de letras

Las mayúsculas negritas (A, B, C, ...) y griegas (Γ, Δ, Φ, ...) se reservan para nombres de determinados obs (es decir, términos o entidades de los varios sistemas). Estas letras, junto con símbolos derivados de ellas mediante la adjunción de determinados índices o subíndices numéricos, signos diacríticos, etc., funcionan como nombres con significación previamente fijada. En el apéndice A se encontrará una lista de esas letras.

Las mayúsculas cursivas se usan para obs (es decir, entidades o términos) sin especificar. Por tanto, la significación de esos símbolos depende del contexto y varía con él.

Las minúsculas cursivas se usan de los varios modos siguientes: 1) para representar variables o indeterminadas formales (cfr. § 2C); 2) para obs que son, respecto de un contexto dado, primitivas a partir de las cuales se constituyen los obs más complejos; 3) para números naturales sin especificar; 4) según el uso ya tradicional, para ciertos obs del cálculo proposicional o de cualquier otro sistema ajeno al combinatorio, o bien para obs combinatorios que se consideran representantes de aquellos otros. En general, las letras minúsculas cursivas utilizadas con el primer fin se toman del final del abecedario, las destinadas al segundo uso se toman del comienzo del abecedario y las destinadas al

tercer uso se toman del centro del abecedario, todo ello de acuerdo con el uso tradicional ; pero hay excepciones, y el contexto resulta necesario para determinar de qué uso se trata. En todos los casos esas letras son variables, es decir, no tienen significación fija.

Las letras minúsculas griegas se usan de tres modos. La λ se usa al principio de una expresión como una constante que denota una operación primitiva, de acuerdo con lo usual en los cálculos de lambda-conversión. En el segundo lugar de una expresión esas letras se usan en los capítulos **8-10** como nombres (variables) de obs no especificados, pero de una clase especial. Situadas en el tercer lugar de una expresión y entre paréntesis estas letras se usan para denotar propiedades de relaciones, y, por tanto, las leyes fundamentales de varios sistemas; esto lleva a un uso secundario de estas letras para distinguir los sistemas mismos. En el apéndice B se da una lista de esas propiedades. También en este caso el contexto hará improbable la confusión entre esos usos.

Se usan mayúsculas góticas de dos modos. Por una parte, suplementan a las mayúsculas cursivas como nombres de obs sin especificar; por lo general, estas letras góticas designan entonces obs que contienen elementos indeterminados, cosa que no ocurre a los obs designados por las cursivas correspondientes. Por otro lado, las góticas mayúsculas se usan también para fines epiteoréticos, esto es (cfr. capítulo **2**), como nombres de enunciados, clases, secuencias, sistemas, demostraciones, etc. Estas letras son, pues, variables.

Para las letras T y $\mathfrak{T}$ se adopta una convención especial. Si T con determinados afijos denota un ob X, entonces $\mathfrak{T}$ con los mismos afijos denota el enunciado $\vdash X$. Esta convención se introduce formalmente en § **8E1** y se respeta rigurosamente luego.

Las mayúsculas de escritura inglesa ($\mathscr{F}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{Q}$, etc.) se usan para constantes epiteoréticas (cfr. capítulo **2**). Al igual que las negritas y que las mayúsculas griegas, estas letras tienen una significación fija para todo el libro; pero representan sistemas y nociones análogas más que obs (o términos).

Además de esas letras se usan de cuando en cuando otras (redonda, negrita minúscula, negrita cursiva, etc.) para fines varios episódicos. Las negritas cursivas o inclinadas, por ejemplo, se usan unas cuantas veces para denotar relaciones sin especificar; en este papel quedan sujetas a las convenciones fijadas más abajo para los símbolos funcionales. Las letras redondas se usan para designar algunas leyes, esquemas de axiomas, etc., relacionados con los obs designados por las correspondientes negritas; pero tales letras no aparecen nunca en fórmulas.

En § **6E1** y § **8E1** se dan más convenciones sobre el uso de las letras.

Símbolos funcionales

Los siguientes símbolos y combinaciones de símbolos (en los que x puede reemplazarse por cualquier símbolo que represente una indeterminada y X por cualquier símbolo que represente un ob) son prefijos monarios:

$$\vdash, \neg, \lambda x, [x], [X/x], (\forall X x)$$

El primero de esos símbolos es un predicativo (es decir, un símbolo que, prefijado a un nombre que denota un ob, forma un enunciado); también se usa (cfr. infra) como infijo binario. El segundo símbolo es un conectivo (es decir, un símbolo que, prefijado a un enunciado, forma otro enunciado). Los demás son operadores (es decir, aplicados a nombres forman otros nombres).

La operación básica llamada aplicación se indica por mera yuxtaposición. Los infijos binarios, que denotan ulteriores operaciones, son:

$$\cdot, \supset, \supset_x \cdot$$

Además de ésos aparecen, en relación con números, los signos operativos corrientes del álgebra elemental. Los infijos binarios para la formación de relaciones (que son, por tanto, símbolos predicativos) son:

$$\equiv, =, \geq, \leq, \succ, \text{cnv}, \text{red}, \vdash, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}.$$

Los tres últimos de esos signos son variables, los demás quedan fijados. Los siguientes infijos binarios son conectivos (es decir, que forman enunciados partiendo de enunciados):

$$\Rightarrow, \rightarrow, \rightleftarrows, \&.$$

Para evitar un exceso de paréntesis admitiremos que todos los operadores y conectivos binarios están sometidos a asociación por la izquierda. De cuando en cuando utilizaremos también con el mismo fin la notación de puntos. En este caso seguiremos las reglas de [UDB] tal como quedan modificadas en § 2B5.

Los símbolos funcionales pueden llevar afijos varios. Pero las anteriores convenciones se les aplican sin atender a los afijos.

Cuando un mismo símbolo básico lleva índice y subíndice el índice es la última aplicación. Así, por ejemplo, B_m^n debe leerse $(\mathsf{B}_m)^n$.

Comillas

Seguiremos la práctica hoy comúnmente establecida de utilizar una impresión de un símbolo o expresión puesta entre comillas simples como nombre de dicho símbolo o expresión. Este es, en realidad, un uso más bien técnico. Por eso vamos a reservar esas comillas simples para dichos fines técnicos y emplearemos las comillas corrientes (las dobles) para usos no-técnicos. (Cfr. § 1D1).

Añadidos durante la impresión del libro

Los añadidos hechos al texto ya en pruebas se indican así explícitamente o bien se incluyen entre corchetes.

Además de las personas e instituciones a las que hemos expresado nuestro agradecimiento en el prólogo queremos agradecer aquí a la National Science Foundation una beca adicional para 1956-58, al Central Research Found de la Universidad del Estado de Pensilvania su ayuda a fines de 1956 antes de que la citada beca fuera utilizable, y a H. Hiż y R. Harrop, colegas de la Universidad del Estado de Pensilvania, su colaboración en la lectura de las galeradas.

Introducción

La lógica combinatoria es una rama de la lógica matemática que se interesa por los fundamentos últimos. Su intención es analizar ciertas nociones de carácter tan básico que ordinariamente se toman por obvias. Tales nociones empiezan ya por los procesos de sustitución, requeridos por el uso de variables; también se encuentra entre ellas la clasificación de las entidades construidas mediante esos procesos en tipos o categorías, clasificación que en muchos sistemas tiene que hacerse intuitivamente antes de que pueda aplicarse la teoría. Se ha observado ya que esas nociones, aunque generalmente presupuestas sin más, no son simples; constituyen, por así decirlo, una prelógica cuyo análisis no es en modo alguno trivial.

Este análisis se lleva a cabo por dos motivos principales. El primero es el problema planteado por el deseo de formular del modo más preciso posible los fundamentos de la lógica, de un modo, además, simple no sólo desde el punto de vista de la estructura, sino también desde el del significado. Se trata de un objetivo digno ya por sí mismo de ser perseguido; más de una gran inteligencia ha dedicado a ello buena parte de sus energías. Un paso en esa dirección será la exposición de las complicadas reglas de la prelógica como una síntesis obtenida a partir de reglas de carácter mucho más simple. El segundo motivo es el problema de explicar las paradojas. Hay, en efecto, razones para suponer que la verdadera fuente de nuestras dificultades con esos rompecabezas se encuentra en la prelógica misma y, por tanto, que un análisis de la prelógica contribuirá a aclararlas.

Para conseguir una idea más clara de la motivación y los fines de la lógica combinatoria será, sin duda, de utilidad elaborar un tanto esos puntos antes de seguir adelante [1].

---

[1] Como resúmenes generales de la lógica combinatoria desde el punto de vista del presente libro puede verse [CFM], así como [TCm] y [LCA]; un resumen más extenso se encontrará en Cogan [FTS]. Dan exposiciones de algunas partes Feys [TLC], Rosenbloom [EML, págs. 109-133] y Rosser [DEL]. Por lo que hace a la filosofía subyacente

A. EL ANALISIS DE LA SUSTITUCION

Considérese la formulación del álgebra proposicional en *Principia Mathematica* [2]. Usemos los símbolos 'p', 'q', 'r', etc., para variables no especificadas del sistema, y 'P', 'Q', 'R', etc., para construcciones no especificadas obtenidas a partir de las variables mediante las operaciones. Una vez subsanados ciertos defectos de formalización [3], el sistema tiene dos reglas: (1) una «regla de inferencia» *(modus ponens)*, que podemos escribir así:

$$(1) \qquad \frac{\vdash P \qquad \vdash \neg P \vee Q}{\vdash Q,}$$

y (2) una regla de sustitución, la cual dice que

$$(2) \qquad \frac{\vdash Q}{\vdash R}$$

es una inferencia permisible si R se obtiene de Q mediante sustitución de algunas variables de Q, p_1, p_2, . . . , p_m por ciertas construcciones P_1, P_2, . . . , P_m. Es evidente que esta segunda regla es enormemente más complicada que la primera. Examinaremos con más detalle la naturaleza de esa complejidad.

Consideremos por un momento el sistema no como un formalismo, sino como una serie de aserciones con significación. ¿Cuál es entonces la significación de una proposición

$$(3) \qquad \vdash P,$$

por ejemplo,

$$\vdash \neg p \vee (p \vee q)?$$

---

y a la motivación (y como suplemento en cierto sentido a la discusión realizada en esta introducción) remitiremos a Schönfinkel [BSM] y a las partes introductorias de Rosenbloom *(loc. cit.*, págs. 109-111); véase también [PBP]; [GKL], págs. 509-518; [ALS], págs. 363-374, [AVS], págs. 381-386, y [FPF], págs. 371-375. Para una posible aplicación cfr. [LPC].

[2] [PM. I] parte I, sec. A.

[3] El defecto principal era la omisión de la regla de sustitución y, en general, la indistinción entre axioma formal y regla. Este defecto ha sido comentado por varias personas, incluyendo al propio Russell [IMP, pág. 151]. Para exposiciones corregidas véase, por ejemplo [HA], Post [IGT], Feys [LGL], Herbrand [RTD]. Seguiremos aquí a [HA]; pero, en cambio, seguiremos la notación de los *Principia* excepto en el uso de '$\neg$' en vez del signo '$\sim$' de los *Principia* (preferimos el primero, introducido por Heyting [FRI], porque es más específico).

Sin duda, esa proposición no se refiere precisamente a los símbolos 'p', 'q', ni a los objetos denotados por éstos. Lo afirmado es más bien una relación entre las operaciones negación y disyunción. Así, pues, la P de la aserción (3) es una combinación de operaciones primitivas respecto de las cuales afirmamos una determinada propiedad (la propiedad de ser esa combinación una tautología). Por el momento llamaremos a tales combinaciones P «funciones».

Examinemos ahora las reglas (1) y (2) desde este punto de vista. La conexión entre la función Q y las funciones P y $\neg P \vee Q$ en (1) es plenamente precisa y definida. No lo es, en cambio, la conexión entre Q y R en (2). Si no admitimos más que modos de combinación que sean simples y definidos, como es el de (1), entonces en la regla (2) habrá implícitos infinitos modos simples y definidos, incluso para el caso $m = 1$ [4]. Pues como parte del concepto de función hay que entender que existe un orden fijo de sus variables; así, $p \vee q$ como función de p y de q es una función distinta de $q \vee p$. La sustitución de la i-ésima variable de Q por R, como modo de combinación de funciones, es diverso de la sustitución de la k-ésima variable por la misma R, si $i \neq k$; y en cada uno de estos casos hay una ulterior multiplicidad de procesos diversos según el número de argumentos de Q. Hay, pues, que tener en cuenta varias posibilidades de identificación y permutación de las variables. Además, cuando hay una iteración de tales procesos constructivos se producen equivalencias que hay que aceptar intuitivamente.

Estas complejidades pueden ilustrarse del modo siguiente en el terreno de la matemática usual: Sean d y s, respectivamente, las funciones diferencia y cuadrado, y sean las letras 'x', 'y', 'z' representantes, respectivamente, de los argumentos primero, segundo y tercero. Es d, entonces $x - y$ y s es x^2. La sustitución del primer argumento de d por s es $x^2 - y$, y la del segundo argumento es $x - y^2$. Si se sustituye la propia d a uno de sus argumentos se producirá una ambigüedad respecto del orden de los nuevos argumentos; supongamos que los argumentos de la función nueva se toman consecutivamente y se interpolan como un grupo en la secuencia de argumentos de la función base. Entonces, por sustitución del primero y segundo argumentos de d por d misma, tenemos, respectivamente, las funciones $(x - y) - z$ y $x - (y - z)$. Por permutación e identificación de argumentos obtenemos otras funciones, como $x - (x - y)$, $y - (x - z)$, etc. Por último, si sustituimos el primer argumento de d por s, y luego, en el resultado, el segundo argumento por s, obtenemos la misma función (o sea, $x^2 - y^2$)

[4] Es sabido que el caso general puede reducirse al caso $m = 1$. Cfr. § 2C2.

que si hubiéramos procedido a las sustituciones en el orden inverso [5].

Si abandonamos este punto de vista intuitivo para pasar a otro más formal resulta, evidentemente, un problema la definición exacta de la operación sustitución. Como veremos, una respuesta rigurosa a este problema exige una definición recursiva. De todos modos, queda clara la conclusión del párrafo anterior: la regla (2) es inmensamente más complicada que la regla (1) [6]. Además, la definición recursiva no afectará en nada a la cuestión de simplicidad desde el punto de vista de la significación.

Y todo eso vale ya de lo que generalmente se considera el sistema lógico más simple, es decir, el álgebra proposicional. Si pasamos a casos con más de una categoría de variables, algunas de las cuales pueden ser ligadas, la situación se hace aún más complicada. Las dimensiones de la complicación que surge en tales casos pueden apreciarse por el hecho de que la mayor parte de las formulaciones de la regla de sustitución para una variable funcional en el cálculo de predicados de primer orden, tal como se publicaron antes de 1940 incluso por los lógicos más hábiles, eran demostrablemente incorrectas; y poca duda puede caber de que una de las primeras formulaciones correctas, la dada por Church [IML], página 57, fue conseguida con la ayuda de la teoría de la conversión lambda, la forma de lógica combinatoria que es la especialidad de este autor [7].

Veremos que en la lógica combinatoria todos esos procesos pueden formularse sobre la base de un sistema lógico de gran sencillez. Es un sistema de estructura finita en sentido fuerte, y sus reglas son del mismo orden de complejidad que el *modus ponens*. Esto representa, consiguientemente, un progreso hacia el primer objetivo.

B. LA PARADOJA DE RUSSELL

Baste con eso por lo que hace al primer punto. He aquí ahora por lo que hace al segundo.

---

[5] Cfr. [ALS], págs. 368-369.

[6] Cfr. la formulación de Rosenbloom [EML, págs. 40 y sigs., 182 y sigs.].

[7] Por lo menos, es posible demostrar por ese método la corrección de la formulación de Church. Hay que recoger, de todos modos, la observación histórica hecha por el propio Church, *loc. cit.*, pág. 63, y la corrección en su [res. HA]. En esta última admite Church que se equivocó al atribuir un error a la formulación de [HB. I], y que esta última es probablemente la primera formulación publicada correcta. Por tanto, son poco justas las observaciones de Rosenbloom [EML], pág. 109, y Curry [res. Z] (basada en la afirmación de Church [IML]).

Consideremos, por ejemplo, la paradoja de Russell, que puede ser formulada del modo siguiente: Sea $F(f)$ la propiedad de propiedades f definida por la ecuación

$$F(f) = \neg f(f), \tag{1}$$

siendo '$\neg$' el símbolo de la negación. Sustituyendo entonces f por F obtenemos

$$F(F) = \neg F(F). \tag{2}$$

Si ahora añadimos que $F(F)$ es una proposición —es decir, algo que es o verdadero o falso—, tenemos una contradicción. Pero el que $F(F)$ sea una proposición es un elemento esencial de esta argumentación. Y ésta es una cuestión de prelógica, que en la mayoría de los sistemas se decide mediante algún expediente ajeno al sistema mismo.

Las habituales explicaciones resolutorias de esta paradoja consisten en establecer que F, o, en todo caso, $F(F)$, es un «sinsentido». Así, por ejemplo, en *Principia Mathematica* la formación de $f(f)$ queda excluida gracias a la teoría de los tipos; en la solución de Behmann [WLM] no puede utilizarse (1) como definición de F porque el «Kurzzeichen» * 'F' no puede eliminarse. Con estos métodos es, probablemente, posible evitar las paradojas en un sistema dado. Pero es evidente que la anterior argumentación intuitiva que da lugar a la paradoja tiene algo que no queda totalmente explicado por esas exclusiones.

Para alcanzar los objetivos antes mencionados la lógica combinatoria debe plantear las siguientes exigencias: (a) no tiene que hacerse distinción entre diversas categorías de entidades [8], de donde se desprende que cualquier construcción formada a partir de las entidades primitivas por medio de las operaciones permitidas tiene que tener sentido, es decir, tiene que ser admisible como entidad [9]; (b) tiene que haber una operación correspondiente a la aplicación de una función a un argumento; (c) tiene que haber igualdad, con las propiedades corrientes; y (d) el sistema debe ser *combinatoriamente completo* [10], es decir, tiene

---

* *Kurzzeichen* = signo elemental.—*N. del T.*

[8] Si el sistema tiene variables puede admitirse una distinción entre variables y otras entidades; pero sólo debe haber una clase de variables, y toda variable podrá ser sustituida por cualquier entidad. Estos sistemas tienen un carácter intermedio. (Cfr. § C.)

[9] Es decir, el sistema tiene que estar completamente formalizado en el sentido de § 1E (excepto por lo que hace a la circunstancia de la nota anterior).

[10] Rosembloom *(loc. cit.*, pág. 116) usa el término 'funcionalmente completo'. Pero éste no es el sentido corriente de ese término. Así se dice corrientemente que el álgebra proposicional clásica es funcionalmente completa, aunque en ella no puede

que ser tal que toda función que pueda ser definida intuitivamente por medio de una variable pueda ser representada formalmente como una entidad del sistema.

Se sigue de esos cuatro requerimientos no sólo que la F definida por (1) tiene sentido, sino también que la ecuación (2) es intuitivamente verdadera. Pero esto no es, en modo alguno, una objeción al sistema; por el contrario, es un paso adelante. No podemos aquí seguir «explicando» y «resolviendo» las paradojas por el procedimiento de huir de ellas; tenemos que hacerles frente y mirarlas cara a cara. Y ya se gana algo con sólo plantear esta situación. Las paradojas, por así decirlo, se ven obligadas a salir a campo libre, y allí podemos someterlas a análisis. Este análisis tendrá que explicar el hecho de que $F(F)$ no pertenece a la categoría de las proposiciones, explicación que cae dentro de la provincia de la lógica combinatoria tal como ésta se concibe aquí.

C. PLAN DE LA OBRA

El tema esbozado en la anterior discusión se divide, naturalmente, en dos partes principales. La primera parte es el análisis de los procesos de sustitución como tales, sin tener en cuenta la clasificación de entidades en categorías. La segunda parte introduce todo el aparato necesario para efectuar una clasificación en categorías, así como relaciones con notaciones lógicas especiales, como la implicación, la cuantificación universal, etc. Como es natural, la primera parte tiene una relación más íntima con el primero de los objetivos antes indicados, mientras que la segunda se refiere más directamente al segundo objetivo; pero los dos ámbitos temáticos se solapan un tanto.

Ciertos operadores que representan combinaciones como funciones de las variables que contienen (tal vez junto con otras variables) desempeñan un papel básico en el análisis. Las combinaciones en cuestión son las formadas a partir de las variables y exclusivamente por medio de la operación postulada en la anterior exigencia (b). A causa de la exigencia de completitud combinatoria esos operadores estarán representados por determinadas entidades del sistema. Estas entidades, y combinaciones formadas con ellas por medio de la operación postulada, se llaman *combinadores*. El término '*lógica combinatoria*' designa la

---

representarse ninguna función en el sentido de que hablamos aquí. El término 'combinatoriamente completo' se introdujo en [PKR], pág. 455.

parte de la lógica matemática que se ocupa esencialmente de combinadores, incluyendo todo lo necesario para la fundamentación adecuada de las teorías lógicas más corrientes.

Como se verá, la primera parte de la lógica combinatoria trata de los combinadores en sus relaciones formales entre ellos, sin más referencia que a una relación de igualdad; esta parte puede llamarse, por tanto, *lógica combinatoria pura.* La segunda parte trata de los combinadores en cuanto incluidos en determinadas categorías específicas, afectados por cuantificadores, etc.; la llamaremos *lógica combinatoria ilativa.*

Los combinadores mismos pueden definirse sobre la base de una operación de abstracción, o bien algunos de ellos pueden postularse como ideas primitivas y definirse los otros sobre la base de esos primeros. La primera solución lleva al *cálculo de conversión lambda* de A. Church y a varias modificaciones del mismo; la segunda lleva a la *teoría (sintética) de combinadores* [11]. La teoría sintética es la que da el análisis último de la sustitución mediante un sistema de gran simplicidad. La teoría de la conversión lambda tiene un carácter intermedio entre las teorías sintéticas y la lógica ordinaria. Aunque su análisis es en varios sentidos menos profundo —pues deja de analizar algunas complejidades de las variables—, es, de todos modos, de importancia, y tiene la ventaja de apartarse menos radicalmente de nuestras intuiciones. Por eso, y no por consideraciones históricas, hemos decidido tratar primero las varias formas del cálculo lambda y desarrollar luego las teorías sintéticas.

Seguimos así un orden de análisis; la formulación más fundamental se obtiene al final del capítulo **7**. La teoría de los cálculos λ se encontrará en los capítulos **3-4**, mientras que el capítulo **5** es una transición entre los cálculos λ y las teorías sintéticas de los capítulos **6-7**. En el capítulo **6** se establece la equivalencia entre una teoría sintética y su correspondiente cálculo λ, de modo que a partir de ese punto el desarrollo puede basarse en cualquiera de los dos fundamentos. En el capítulo **4** se considera el teorema de consistencia de Church y Rosser; al mismo tiempo se considerarán ciertas generalizaciones de dicho teorema.

La *aritmética combinatoria*, aspecto importante de la lógica combinatoria pura, se ocupa de las relaciones entre combinadores y varias clases de números. Es éste un desarrollo no previsto al comienzo. Las primeras sugerencias vinieron de Church [SPF. II, pág. 863] y otras

---

[11] El término 'teoría de combinadores' puede perfectamente sustituir al término 'lógica combinatoria pura'. No obstante, los usos del primer término han sido hasta ahora como refleja el texto, y sería probablemente confusionario el alterarlos ahora. Cuando se quiera ser explícito se añadirá la palabra 'sintética'.

aportaciones se deben a Rosser [MLV]; pero el desarrollo principal se debe a Kleene [12]. El resultado es no sólo que pueden darse definiciones aceptables de los enteros positivos (o naturales) a base de combinadores, sino, además, que toda función de enteros naturales que sea «genéricamente recursiva» (en el sentido de la teoría desarrollada por Kleene partiendo de ideas de Herbrand y Gödel) es definible por medio de combinadores [13]. Se ha demostrado que este criterio es equivalente a la noción de computabilidad introducida por Turing [CNA]. La equivalencia recíproca de esas tres nociones aparentemente tan heterogéneas induce a suponer que con ellas tenemos una definición de la idea de función efectivamente calculable [14]. Si tal es realmente el caso, entonces toda función numérica efectivamente calculable puede definirse sobre la base de combinadores, y recíprocamente. Church obtuvo por los años treinta [15] algunos notables desarrollos en base a la aritmética combinatoria.

Nuestra primera intención fue publicar esta obra en dos volúmenes, el primero de los cuales debía tratar de lógica combinatoria pura, mientras el segundo se dedicaba a la lógica combinatoria ilativa. Hemos tenido que cambiar esos planes por razones prácticas, pero que no dejan de ser buenas y suficientes. En particular, hemos pospuesto para el segundo volumen el tratamiento de la aritmética combinatoria [16]. En lugar de ella hemos incluido tres capítulos sobre lógica com-

---

[12] Véanse sus [TPI], [LDR] y, en parte, también su [PCF]. Desgraciadamente estos trabajos están escritos con la notación de Church [SPF]; esta notación era molesta y el propio Church la abandonó hacia 1940 (cfr. § 3S2). Se encontrarán exposiciones de los trabajos de Kleene, con una notación como la de Schönfinkel, en Church [CLC] y Rosser [DEL].

[13] Se entiende aquí por «función» una función de un solo valor, definida para todo entero natural y con un entero natural como valor. El recíproco vale también para toda función de este tipo. Hay una formulación análoga para funciones «parcialmente recursivas»; pero nuestro interés no es aquí precisar este punto.

[14] Sobre la recursividad y su relación con el trabajo de Turing, Post y otros véase Kleene [IMM]. Este libro contiene amplias referencias a los trabajos originales relevantes. En muchos aspectos puede considerarse un complemento suyo Péter [RFn]. Se esperan también libros aún inéditos de Martin Davis y de J. Myhill y J. C. E. Dekker. Sobre la relación entre recursividad y calculabilidad efectiva véase, sobre todo, Kleene, *loc. cit.*, § 62.

[15] Véanse sus [RPx], [PFC], [UPE], [MLg], [NEP], [CNE]. La mayor parte de estos trabajos está escrita con la notación de su [SPF], y el más extenso de ellos [MLg], no es muy accesible. La exposición de estos temas en su [CLC] contiene algunas mejoras de detalle, pero es demasiado breve. Hay también una teoría de los números ordinales constructivos a base de combinadores; véase para esto Church y Kleene [FDT], Church [CSN] y Kleene [FPT], [NON].

[16] Teniendo esto en cuenta, la discusión de la aritmética combinatoria en el parágrafo anterior ha sido más extensa de lo que habría sido en otro caso. En realidad, nuestro trabajo se mueve a un nivel tan de fundamentos que la aritmética combinatoria no ha empezado aún a desempeñar un papel importante en él. En el momento de escribir esto tenemos relativamente poco que añadir a lo que se indica en las anteriores referencias y en [PKR] y [FRA].

binatoria ilativa: el primero de ellos, que es el capítulo **8**, es una introducción a la lógica combinatoria ilativa en general; los demás, los capítulos **9** y **10**, tratan de la primera fase de la lógica combinatoria ilativa, a la que llamamos teoría de la funcionalidad. Para más discusiones introductorias remitimos al lector al capítulo **8**.

Antes de entrar propiamente en la lógica combinatoria, lo que ocurre en el capítulo **3**, será necesario formular de un modo preciso algunas nociones relacionadas con la metodología del razonamiento formal. Los conceptos de sistema lógico, entidad de un tal sistema, regla, variable, etcétera, que han sido utilizados ya en la anterior discusión, son necesariamente un tanto vagos por el momento; tendremos que precisarlos más para tener una base consistente sobre la cual proceder. Esta será la tarea de los capítulos **1** y **2**.

D. ESBOZO HISTORICO

La lógica combinatoria empezó con un trabajo de Schönfinkel, [BSM], de 1924 [17]. En este trabajo, preparado para su publicación por Behmann, Schönfinkel llamaba la atención sobre lo deseable que resultaría eliminar variables de la lógica; introducía, además, la idea de aplicación, y mostraba que funciones de diversos números de variables pueden eliminarse por medio de esa idea de aplicación, siempre que se amplíe la idea de función, de tal modo que las funciones puedan ser argumentos y valores de otras funciones (cfr. § 3A). Schönfinkel introdujo los concretos combinadores que más tarde llamaremos I, K, C, B, S (él los llamó, respectivamente, *I*, *C*, *T*, *Z*, *S*), y mostró que las fórmulas lógicas pueden expresarse sin variables por medio de S y K. Pero Schönfinkel no ofreció técnica de deducción y, concretamente, no ofreció medio alguno para demostrar formalmente que dos combinadores intuitivamente iguales son iguales [18].

En [GKL] se obtuvo una teoría deductiva bastante fiel a las líneas

---

[17] Más adelante, en esta misma sección, hay alusiones a algunos precursores anteriores.

[18] Schönfinkel tuvo también algunas ideas respecto de la lógica combinatoria ilativa. Introdujo una «Unverträglichkeitsfunktion» *U* [Función de incompatibilidad], que tiene, con la función de Sheffer (el trazo de Sheffer), la misma relación de la implicación formal con la ordinaria. Mostró que la ordinaria función de Sheffer y los cuantificadores pueden definirse a base de *U*. (Esto anticipaba, en cierto sentido, el uso de la implicación formal como primitiva en Quine [SLg]). Schönfinkel sostuvo entonces que todo enunciado lógico puede expresarse a base de S, K y *U* sin postular las nociones de proposición o de función proposicional. Pero desarrollos más recientes de la lógica combinatoria ilativa han mostrado que todo sistema razonable construido sobre una base tan ingenua es inconsistente.

indicadas por Schönfinkel; [ALS] fue un trabajo preliminar en esa vía. Se trataba de una teoría sintética basada en un conjunto de combinadores primitivos diversos de los de Schönfinkel. En este trabajo se introdujeron los términos 'combinador' y 'lógica combinatoria'. Las demostraciones eran muy largas e incómodas comparadas con las halladas más tarde. Pero se establecía la consistencia de la formulación y su suficiencia para la lógica combinatoria pura.

Mientras tanto, y con completa independencia, Church desarrollaba el sistema de lógica formal que, finalmente, apareció en sus dos trabajos [SPF. I] y [SPF. II]. En esta teoría desempeñaba un papel central cierta operación λ que representaba la abstracción de una función a partir, por así decirlo, de su valor sin especificar. El resultado era que la teoría de Church contenía combinadores (según la definición que hemos dado), y, por tanto, pertenecía a la lógica combinatoria. El sistema contenía también la implicación, etc.; consiguientemente, pertenecía a la lógica combinatoria ilativa. De todos modos, la parte de su teoría que se refería a la lógica combinatoria pura se segregó pronto y cuajó en su cálculo de conversión lambda. Church y sus colaboradores derivaron en ese sistema importantes teoremas de indecidibilidad, y el sistema se puso en relación con la teoría recursiva de números, la teoría de los números ordinales, el cálculo de predicados, etc.[19]. Algunos de esos teoremas nos ocuparán en los últimos capítulos de este libro.

Pronto quedó claro que existía alguna relación entre las teorías de Curry y de Church. Rosser estudió en su tesis [MLV] la relación exacta. Construyó para ello una teoría sintética de combinadores, más débil en algún aspecto que la de Curry, y que equivalía a la conversión λ de Church[20]. Mostró que, a la inversa, una teoría reforzada de la λ-conversión equivalía a la teoría sintética de Curry. A partir de aquel momento quedó claro que una teoría de combinadores puede expresarse como una teoría de λ-conversión, y a la inversa. Algunos importantes perfeccionamientos de las teorías sintéticas se deben asencialmente a indicaciones hechas por Rosser en su tesis o después[21].

---

[19] Cfr. la discusión de la aritmética combinatoria en § C.

[20] Aunque la teoría de Church contenía combinadores no era combinatoriamente completa. No se podían construir en ella funciones constantes sobre todo el campo de sus propias entidades; además, no se basaba en el principio de extensionabilidad. Diremos que el sistema de Church era *combinatoriamente completo en sentido débil.*

[21] El título de la tesis de Rosser *(A mathematical logic without variables* [*Una lógica matemática sin variables*]*)* indica una anomalía de su sistema que merece comentario. El título parecía raro, toda vez que ya se había publicado antes un sistema sin variables. La explicación de esa anomalía consiste en que Rosser pensó en cierto momento que él era el primero en excluir las variables en un sentido peculiar. Así, en el manuscrito de su tesis hay un paso, que luego no apareció impreso, en el que se dice

Un acontecimiento de considerable importancia en el ulterior progreso de nuestra materia fue el descubrimiento, por Rosser y Kleene en colaboración, de una inconsistencia del sistema inicial de Church [22]. Esta inconsistencia es un teorema de lógica combinatoria ilativa. No se aplica a la lógica combinatoria pura, para la cual se ha demostrado en [GKL] la consistencia incluso del sistema más fuerte (y más tarde se mostró lo mismo más elegantemente por métodos que estudiaremos en el capítulo 4). El descubrimiento se aplicaba, de todos modos, al sistema más fuerte de los propuestos en [PEI] [23], y mostraba que la lógica combinatoria ilativa no era una cuestión tan sencilla como ingenuamente habíamos supuesto. El estudio de la paradoja, hecho en [PKR] y en [IFL] respecto del más fuerte de los sistemas subyacentes de lógica combinatoria pura, mostró que la fuente de la paradoja se encuentra en una incompatibilidad fundamental entre la completitud combinatoria y el tipo de completitud que se expresa en el teorema de deducción. Por tanto, un sistema de lógica combinatoria ilativa tiene que ser o

---

que Curry usaba la variable libre, porque en su sistema se podía probar $x = x$ sin restricción sobre x. Pero, dicho en el lenguaje que usaremos, el teorema en cuestión no es un teorema elemental, sino un epiteorema (cfr. capítulo 2); en el sentido de § 2C el sistema de Curry excluye las variables tan rígidamente como el de Rosser. El punto esencial de la exclusión de Rosser es que concebía la igualdad como sólo afirmable entre entidades que sean en algún sentido significantes; mientras que Curry [GKL: págs. 515 y sigs.] sostenía que no hay entidades que no sean significantes en algún sentido, que toda combinación de las entidades primitivas tiene una significación y que las cuestiones de significancia en un sentido más estricto pertenecen a la lógica combinatoria ilativa. Así, pues, la exclusión practicada por Rosser era un vestigio del hecho de que su prototipo, el sistema de Church, era un sistema ilativo. El descubrimiento de la paradoja de Kleene-Rosser (cfr. el párrafo siguiente del texto), que tuvo lugar cuando la tesis de Rosser estaba ya en prensa, motivó la eliminación de gran parte del manuscrito original y quitó mucha importancia a ese rasgo de la obra. De todos modos, hay un resto del mismo punto de vista en la insistencia de Church sobre la posesión de una forma normal como criterio de significancia, lo que recuerda otro criterio de Behmann [WLM]. Cfr. § 3S3.

[22] Kleene y Rosser [IFL]. Aunque muy breve, este trabajo depende esencialmente de casi todos los trabajos de ambos hasta ese momento.

[23] Se ha dicho a veces que la paradoja de Kleene-Rosser mostró la inconsistencia de «el sistema de Curry» igual que la del de Church. Así, por ejemplo, Rosenbloom [EML, pág. 111] dice que Kleene y Rosser «hallaron una seria inconsistencia en los sistemas inicialmente propuestos por Curry y Church». Esta afirmación no es del todo correcta si se entiende literalmente. El sistema inicial de Curry (es decir, el de [GKL]) era un sistema de lógica combinatoria pura y demostrablemente consistente. Los posteriores axiomas de Curry se introducían uno después de otro, individualmente, y la paradoja se aplica sólo al más fuerte de esos sistemas consecutivos, el cual había sido escasamente aplicado en la práctica (cfr. § 8S1). Por lo que hace a Church, lo que ocurrió es que propuso un sistema axiomático para la lógica combinatoria pura y la ilativa a la vez —en realidad, para toda la lógica—, y este sistema es el que resultó inconsistente. Pero la parte de su sistema que formulaba la lógica combinatoria pura era demostrablemente consistente, de modo que la afirmación de Rosenbloom respecto de Church, aunque verdadera al pie de la letra, no es demasiado justa. Está claro que Rosenbloom no pretendía que su afirmación se tomara en ese sentido literal, pues él mismo sienta luego afirmaciones más adecuadas (*loc. cit.*, págs. 125 y sigs.).

bien no-clásico (como el de Ackermann [WFL], por ejemplo), o bien tiene que formular de un modo u otro la categoría de proposiciones.

El anterior esbozo histórico de la lógica combinatoria contiene lo suficiente para dar un trasfondo al desarrollo sistemático. Al final de algunos capítulos se encontrarán más detalles históricos.

Pero hay, además, un punto que debe mencionarse aunque sea incidentalmente. Otros sistemas de lógica matemática contienen consideraciones de naturaleza combinatoria. Feys ha puntualizado [PBF] que ideas de esta naturaleza aparecían ya en Peano y en Burali-Forti. Estas consideraciones son especialmente importantes en los sistemas de teoría abstracta de conjuntos desarrollados por Fraenkel, Von Neumann, Gödel, Bernays y otros [24]. La teoría de Von Neumann postula incluso ciertas funciones que son esencialmente combinadores [25], y tal vez la mitad de esa teoría es primariamente de naturaleza combinatoria. Pero estos desarrollos no utilizan la operación de aplicación de Schönfinkel como medio de reducir funciones poliádicas a funciones monádicas *, sino que en lugar de eso utilizan una operación adicional de pares ordenados. Hasta hace poco no han tenido influencia en el desarrollo de la lógica combinatoria, y viceversa [26]. No obstante, E. J. Cogan, en su tesis doctoral [FTS], mostró que la formulación gödeliana de la teoría de conjuntos puede basarse muy elegantemente en un sistema de lógica combinatoria ilativa, y que, desde este punto de vista, aproximadamente la mitad de los axiomas resultan triviales.

Otro desarrollo relacionado con la lógica combinatoria, pero enteramente independiente de ella, es el estudio de variables, hecho por Menger (véase la lista de trabajos bajo su nombre en la bibliografía). Su trabajo es, sobre todo, valioso para el análisis de los diferentes usos de variables en la matemática ordinaria y en la física.

---

[24] Véase, por ejemplo, Skolem [BAB]; Fraenkel [UGL], [ATG], [ATW]; Von Neumann [AML]; Ackermann [MTB]; Bernays [SAS]; Gödel [CAC].

[25] Así, por ejemplo, la *h* del esquema axiomático de Von Neumann II 6 es el combinador **S**, y la *h* de II 7 es el combinador **B**. Otros combinadores quedan implícitos en otros axiomas de su grupo II.

[26] Obsérvese que lo característico de la lógica combinatoria tal como se expone aquí es subrayar la noción de función, mientras que la teoría de conjuntos, en la tradición de Zermelo, tiende a subrayar la noción de conjunto. La teoría de Von Neumann es, en este respecto, intermedia entre la lógica combinatoria y la teoría de conjuntos tradicional. Las teorías, más recientes, de Bernays y de Gödel, tienden a volver a la tradición, ensanchando la separación que existe entre la teoría de conjuntos y la lógica combinatoria.

* Por razones de mera eufonía, y porque no veo que ello sea poco coherente, utilizo para relaciones y funciones el sufijo -ádica como equivalente al sufijo -aria. (Por ejemplo: prefiero 'poliádica' a 'poliaria', y admito 'monádica' y 'monaria' indiferentemente).—*N. del T.*

Sistemas formales

Como preludio al estudio de la lógica combinatoria presentaremos en este capítulo y en el siguiente algunas ideas acerca de los sistemas deductivos en general. Un tal sistema se concibe aquí como un *sistema formal*, definido como un cuerpo de teoremas obtenidos mediante reglas objetivas y referentes a objetos sin especificar. La primera sección (§ A) contiene una exposición aún sin rigor, una aproximación a dicha noción y un ejemplo concreto. En § B se da una definición más precisa y detallada. La discusión de §§ C-D tiende a iluminar la naturaleza y la relevancia de la noción. En § E se consideran algunas especializaciones y la reducción de los sistemas formales a formas especiales. En esa sección se introduce el último afinamiento de la noción, a saber, el sistema totalmente formal. En § S se dan referencias a otros tratamientos de los sistemas formales, las cuales amplían el texto en varios sentidos, y algunos comentarios históricos.

A. APROXIMACION A LOS SISTEMAS FORMALES

1. Sistemas axiomáticos

Para obtener una primera idea de lo que es un sistema formal partiremos de la geometría elemental tal como se enseña en la escuela secundaria, siguiendo el modelo de los *Elementos* de Euclides.

La geometría elemental empieza con ciertas afirmaciones primitivas, llamadas *axiomas*, que se admiten sin demostración. Partiendo de esos axiomas se deducen todas las demás aserciones admitidas según reglas lógicas que también se adoptan sin discusión. *Teoremas* son los axiomas y las proposiciones deducidas de ellos [1].

[1] Los axiomas se encuentran, por tanto, entre los teoremas. El uso del término 'teorema' en este sentido es consistente. Cuando queramos subrayar que un teorema no es un axioma diremos que es un «teorema derivado».

Los enunciados considerados en la teoría se refieren a ciertos conceptos. Algunos de esos conceptos no se definen. Otros se definen como construcciones obtenidas con los conceptos primitivos.

En una tal teoría axiomática concreta se supone que el sentido de los términos usados y la verdad de los axiomas son intuitivamente dados. El que se deje sin definir conceptos primitivos se debe a que se los supone intuitivamente claros; el que se deje sin demostrar afirmaciones primitivas o axiomas se debe a que se los supone intuitivamente evidentes. Y los teoremas derivados de los axiomas comparten la evidencia intuitiva de éstos.

Como es sabido, esas teorías deductivas concretas han sido sustituidas por teorías deductivas «puras». En ellas los términos indefinidos no quedan restringidos a una interpretación: puede que no tengan interpretación conocida, y son tratables como si designaran cosas totalmente arbitrarias. Los enunciados no demostrados no pretenden evidencia, puesto que no tienen significaciones intuitivas presupuestas; se aceptan con toda arbitrariedad, y los teoremas derivados de ellos comparten su carácter arbitrario. Llamaremos a una teoría de este carácter un *sistema axiomático abstracto (o puro)* [2].

2. Transición a los sistemas formales

Incluso en una tal teoría axiomática pura (forma bajo la cual se presentan la mayor parte de las teorías matemáticas) sigue habiendo un elemento ingenuo, puesto que la teoría está formalizada por medio de conceptos lógicos que se suponen intuitivamente claros, y puesto que las deducciones se llevan a cabo en virtud de reglas lógicas cuya validez se supone también intuitivamente evidente. Si eliminamos este último elemento ingenuo llegamos a lo que llamamos un *sistema formal*. En un tal sistema la deducción procede por medio de reglas que son arbitrarias, pero están, en cambio, explícitamente formuladas.

Más adelante definiremos esta noción con mayor precisión. Como ya hemos dicho, un sistema formal es esencialmente un conjunto de teoremas obtenidos mediante reglas precisas y referentes a objetos indeterminados. La percepción de la validez de una proposición en un tal sistema

---

[2] El término 'abstracto' se usa aquí para distinguir una tal teoría de una teoría deductiva ingenua o concreta; pero puede omitirse cuando lo que importe no sea subrayar este contraste. En relación con sistemas formales, 'abstracto' se define algo diferentemente en § C1. En sentido amplio, 'sistema axiomático' puede entenderse de tal modo que incluya a los sistemas formales; pero, si no se indica lo contrario, un sistema axiomático es un sistema que acepta la lógica como dada e indiscutida.

no requiere experiencia alguna en el sentido corriente, ni tampoco ningún principio *a priori* —ni siquiera los de la lógica—: requiere exclusivamente la capacidad de entender los símbolos empleados de un modo muy preciso, como solemos hacer en matemáticas. Un sistema de este carácter puede aplicarse al estudio de la lógica misma sin incurrir en un círculo vicioso.

Llamaremos *enunciados elementales* a los enunciados formulados por el sistema formal y *teoremas elementales* a los enunciados afirmados por dicho sistema. Los enunciados elementales (y, por tanto, también los teoremas) se refieren a objetos sin especificar, a los que llamaremos los *obs* del sistema formal [3].

3. Un ejemplo de sistema formal

Vamos a considerar el ejemplo, muy sencillo, de una teoría a la que llamaremos *teoría elemental de cifras*, o, abreviadamente, $\mathcal{N}_0$. Los obs de esta teoría elemental serán, 0, 0′, 0″ ...; es decir, cero, el siguiente de cero, el siguiente del siguiente de cero, etc... Enunciados elementales serán ecuaciones entre obs, por ejemplo: $0 = 0$, $0' = 0''$. Tomamos como axioma $0 = 0$, y como regla de derivación la siguiente: «Si dos obs son iguales, sus siguientes son iguales». Con esto podemos derivar teoremas elementales como $0' = 0'$, $0'' = 0''$.

Formulemos más formalmente esta teoría. Tenemos que considerar:

a. Obs (objetos).
   (1) Un ob primitivo: 0.
   (2) Una operación monaria, indicada por el índice.
   (3) Una regla de formación de obs: Si x es un ob, entonces x' también lo es.

b. Enunciados elementales:
   (1) Un predicado binario: $=$.
   (2) Una regla de formación de enunciados elementales: Si x e y son obs, entonces $x = y$ es un enunciado elemental.

c. Teoremas elementales:
   (1) Un axioma: $0 = 0$.
   (2) Una regla de deducción: Si $x = y$, entonces $x' = y'$.

---

[3] Antes de 1950 se usaba la palabra 'término' en este sentido. Pero ese uso es incompatible con el sentido ordinario de dicha palabra. Sobre la naturaleza de los obs cfr. § C2.

Esas convenciones constituyen la definición de la teoría como sistema formal en el anterior sentido.

Los teoremas elementales de este sistema son precisamente los que se indican en la siguiente lista:

$$0 = 0,$$
$$0' = 0',$$
$$0'' = 0'',$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Se trata de enunciados verdaderos del sistema. Pero una vez definido el sistema podemos formar otros enunciados sobre él; por ejemplo, el enunciado

$$\text{Si } y \text{ es un ob, entonces } y = y$$

es un enunciado verdadero sobre el sistema, aunque no es un teorema elemental. Es un ejemplo de lo que llamaremos (en el capítulo 2) un *epiteorema*.

B. DEFINICION DEL SISTEMA FORMAL

En esta sección vamos a generalizar la discusión del anterior ejemplo [4] para dar una definición amplia de lo que es un sistema formal. La definición no nos dirá, en el sentido tradicional de los filósofos, lo que *es* un sistema formal, sino que describirá la naturaleza de las convenciones hechas al construirlo.

1. Definiciones fundamentales

Un sistema formal se define por un conjunto de convenciones que llamaremos su *estructura primitiva*. Esta estructura tiene tres partes, las cuales especifican, respectivamente: (a) un conjunto de objetos, a los que llamamos *obs*; (b) un conjunto de enunciados, que se llaman *enunciados elementales* y se refieren a esos obs; (c) el conjunto de los enunciados elementales que son verdaderos, o sea, los *teoremas elementales*.

En su primera parte, que se refiere a los obs, la estructura primitiva enumera ciertos *obs primitivos* o *átomos*, y ciertas *operaciones (primitivas)*[5], cada una de las cuales es un modo de combinar secuencias finitas

---

[4] Para otros ejemplos, menos triviales, cfr. [OFP], cap. V, y [APM], § 3.

[5] La palabra 'primitivas' se suprimirá a menos que sea necesaria por contraste o por mayor claridad.

de obs para formar un nuevo ob. Esta parte establece, pues, reglas según las cuales deben construirse ulteriores obs partiendo de los átomos y mediante las operaciones. Hay que entender, por tanto, que los obs del sistema son precisamente los formados a partir de los átomos mediante las operaciones y según las reglas de formación; y que obs construidos mediante procesos diferentes (pero todos permitidos por las reglas) son obs distintos [6].

En su segunda parte, la que se refiere a los enunciados elementales, la estructura primitiva enumera ciertos *predicados (elementales)* [7] cada uno de los cuales es un modo de formar enunciados partiendo de una secuencia finita de obs. Esta parte establece también las reglas según las cuales se forman enunciados elementales partiendo de los obs y mediante esos predicados. Se entiende que los enunciados elementales son precisamente los formados de ese modo.

Puesto que las dos primeras partes de la estructura primitiva tienen rasgos comunes es a menudo conveniente tratarlas juntas, adoptando una terminología que pueda aplicarse a ambas. Así, las consideraciones basadas en las dos partes a la vez constituyen la *morfología* del sistema; las reglas de la morfología constituyen las *reglas de formación*, y los átomos, las operaciones y los predicados, colectivamente tomados, constituyen las *nociones primitivas*. La parte morfológica de la estructura primitiva enumera, pues, las nociones primitivas y enuncia las reglas de formación. Para considerar simultáneamente las propiedades de las operaciones y de los predicados los agruparemos juntos bajo el nombre de *functivas* [8]. Así, pues, cada functiva tiene cierto número finito de argumentos; este número se llamará su *grado*. Siguiendo la costumbre establecida, las functivas de grado uno se llamarán *monádicas* o *monarias* [9], las de grado dos *binarias*, y así sucesivamente. Dada una functiva *n*-ádica se llamará *cierre* de dicha functiva (respecto de los obs de que se trate como argumento) al ob o enunciado formado con *n* obs por dicha functiva. A veces es cómodo admitir entre las functivas, como predicados de grado cero, ciertos *enunciados primitivos* sin analizar. El procedimiento análogo, por el cual podrán contemplarse átomos como operaciones de grado cero, se considerará como una extensión del término 'operación'; cualquiera otra operación será de grado positivo.

---

[6] Sobre lo que son procesos diferentes cfr. § 2B1.

[7] Cfr. nota 5.

[8] Este uso es algo diferente del propuesto para el mismo término en [TDF]. Proponemos, no obstante (§ D2), el abandono del uso anterior.

[9] Sobre la razón por la cual se prefiere esta expresión al término 'singular' cfr. [DSR], pág. 252, nota (3).

La tercera parte de la estructura primitiva formula los *axiomas* y las *reglas deductivas* del sistema. Los axiomas son enunciados elementales de los que se afirma que son verdaderos incondicionalmente. Puede haber una lista finita de axiomas, o bien los axiomas pueden darse mediante reglas que determinen un número infinito de axiomas, pero de modo efectivo (por ejemplo, mediante esquemas de axiomas). Las reglas deductivas establecen cómo deben derivarse los teoremas partiendo de los axiomas. Los *teoremas elementales* son los axiomas junto con los enunciados elementales derivados de ellos mediante las reglas deductivas. A diferencia de las relativas a la morfología, las consideraciones que dependan esencialmente de la tercera parte de la estructura primitiva se llamarán *teoréticas*; tomadas colectivamente constituyen la *teoría propiamente dicha*.

Los axiomas, las reglas deductivas y las reglas de formación constituyen, juntos, los *postulados* del sistema. Así, pues, la estructura primitiva enumera las nociones primitivas (en su parte morfológica) y enuncia los postulados.

Las anteriores definiciones deben construirse de tal modo que admitan ciertos casos aberrantes. Por ejemplo, es admisible un sistema sin enunciados elementales. En este caso tendríamos un sistema de obs obtenidos a partir de los átomos mediante las operaciones; podemos estudiar un tal sistema y hacer afirmaciones sobre él del modo que se explica en el capítulo 2. Así, en el ejemplo de § A3 podemos decir que $a = b$ es verdadero si —y sólo si— a y b son el mismo ob, en vez de decir que es verdadero cuando puede derivarse de la estructura primitiva de $\mathscr{N}_0$. Por otra parte, un conjunto finito de enunciados primitivos constituiría un sistema formal trivial sin obs. La admisión de estos casos aberrantes tiene ventajas parecidas a las de procedimientos análogos de la matemática usual.

En sistemas formales más complejos la enunciación de las reglas puede requerir predicados, operaciones, etc., que no aparecen entre los enunciados elementales. Estas nociones se llamarán *auxiliares* [10]. Así, por ejemplo, es frecuentemente necesario dividir los obs en categorías o tipos, definir una operación de sustitución, etc. Cuando se presentan nociones auxiliares las nociones necesarias para la construcción de los enunciados elementales se llamarán *propias*. Las nociones auxiliares son necesarias para reducir ciertos sistemas frecuentemente usados al concepto de sistema formal. De todos modos, introducen cierta vague-

---

[10] En los ejemplos de [OFP] se encontrarán ilustraciones de tales nociones.

dad. Y en la concepción más rigurosa, la de sistema completamente formal (§ E5), quedan todas excluidas.

La noción de sistema formal tiene varias analogías con la de álgebra abstracta en la matemática ordinaria [11]. Es, por tanto, oportuno subrayar algunas diferencias [12]. En un álgebra se parte de un conjunto de elementos y un conjunto de operaciones. Los elementos se conciben como previamente existentes y las operaciones como un establecimiento de correspondencias entre ellos. Dada una secuencia de n elementos una operación de grado n «asigna» a esa secuencia uno de los elementos como «valor». Se admite el caso $n = 0$, dándole como valor un «elemento fijo» o «constante». Estos elementos fijos no son, empero, análogos a los átomos, porque es excepcional, y no la regla general, que los elementos se obtengan a partir de los elementos fijos mediante las operaciones. También se toma, además, como dada la igualdad; y ocurre a menudo que un mismo elemento pueda obtenerse mediante las operaciones de varios modos diversos. En esos respectos la concepción del sistema formal es totalmente diversa. Lo que está previamente dado no es un conjunto de elementos, sino los átomos y las operaciones, y los obs se obtienen mediante ellas y a partir de ellos. Y no sólo ocurre que todos los obs se obtienen a partir de los átomos mediante las operaciones, sino que, además, cada proceso distinto de construcción da lugar por definición a un ob diferente, de tal modo que un ob no es esencialmente más que un tal proceso de obtención. A su debido momento comprobaremos que la concepción de un álgebra abstracta puede subsumirse bajo la de sistema formal [13]. Pero hasta ese momento no hay que confundir las dos nociones.

Hay, por último, algunas nociones emparentadas con las que hemos considerado, pero que no hemos admitido. Podríamos tener, por ejemplo, functivas aplicables a un número finito, pero sin especificar, de argumentos; functivas de grado infinito; *conectivas*, es decir, nociones análogas a las functivas y que combinan proposiciones para formar otras proposiciones, de tal modo que haya, al lado de las proposiciones elementales, otras compuestas; etc. Algunas de esas exclusiones son triviales; por ejemplo, una functiva de grado variable puede considerarse como un conjunto de functivas, una para cada grado admisible.

---

[11] Cfr., por ejemplo, Birkhoff [CSA], pág. 441, o [LTh$_2$], págs. VII; Hermes [EVT], pág. 153. Obsérvese que un álgebra es un sistema axiomático en el sentido de § A1.

[12] En relación con la discusión siguiente cfr. [DSR], §§ 1-2, especialmente nota (2) de la pág. 251.

[13] Cfr., por ejemplo, la formulación de la teoría de grupos en [APM], o la de la teoría elemental de polinomios en [OFP], cap. V. Cfr. también § 2C.

Otras exclusiones vienen dictadas por consideraciones que introduciremos más tarde.

2. Las restricciones de determinación

En § 1 hemos considerado lo que puede llamarse la anatomía de un sistema formal, y hemos subrayado las nociones morfológicas. Ahora vamos a considerar ciertas restricciones que se imponen para que el sistema tenga un carácter finitista, constructivo. Quedará cierta vaguedad inevitable que será parcialmente disipada en la discusión de §§ C-D, y especialmente en § D4.

Hasta el momento nos hemos ocupado de ciertas nociones que, hablando intuitivamente, son clases. Así, por ejemplo, tenemos la clase de los átomos y la clase de los obs; y análogamente, los enunciados elementales, los axiomas, los varios tipos de reglas y los teoremas elementales constituyen clases. Algunas de esas clases —los átomos, las operaciones, los predicados, los axiomas y varios tipos de reglas— son clases dadas; mientras que los obs, los enunciados elementales y los teoremas elementales son definidos.

Dejando aparte por el momento las clases dadas, observamos que cada una de las clases definidas está especificada por una definición que consta de tres pasos, a saber: primero, se especifican ciertos elementos iniciales; segundo, se describen ciertos procedimientos para construir elementos nuevos partiendo de elementos dados; y, tercero, se entiende que todos los elementos de la clase se obtienen a partir de los elementos iniciales por iteración de esos procedimientos. Un tal conjunto de especificaciones se llama una *definición inductiva*, y una clase definida de ese modo se llama una *clase inductiva* [14]. Los tres estadios de una definición inductiva pueden distinguirse, respectivamente, como estadios de las *especificaciones iniciales*, de los *principios genéticos* y de las *especificaciones terminales*. No es necesario formular explícitamente las especificaciones terminales siempre que se entienda que la definición es inductiva.

Dada una definición inductiva de una clase $\mathfrak{C}$, si se conoce alguna construcción de una entidad A a partir de los elementos iniciales y por medio de los principios genéticos, entonces está claro que A pertenece a $\mathfrak{C}$. Pero si se presenta una entidad A para examinar si es o no miembro de $\mathfrak{C}$, entonces puede ocurrir que no haya ningún procedimiento finito

[14] Esta terminología se debe a Kleene [IMM], págs. 258 y sigs. En una obra anterior de Curry se utilizaba en vez de 'inductiva' 'recursivamente producida', y en otra aún anterior se usaba 'recursiva' (cfr. prol. a [OFP]).

para decidir la cuestión. Precisamente cuando queda excluida esta posibilidad —es decir, cuando hay un proceso prescrito tal que, dada cualquier A, ese proceso determinará, efectivamente, si pertenece o no a $\mathfrak{C}$—, entonces $\mathfrak{C}$ se llama una *clase determinada*. Esta definición se aplica a toda clase, sea inductivamente definida o lo sea de otro modo; y se aplica también a relaciones y a otros conceptos análogos de un modo similar.

Las restricciones que hay que imponer a un sistema formal son de dos tipos: unas conciernen a la morfología y otras afectan a la teoría propiamente dicha.

Por lo que se refiere a la morfología, exigimos que sea completamente determinada. Es decir, la formulación tiene que ser tal que las nociones de átomo, operación de grado n, predicado y enunciado elemental sean todas determinadas en el sentido dicho. Por lo que hace a las clases dadas esta condición se cumplirá si las clases son finitas; pero esto no es necesario. El caso de un número infinito de átomos, por ejemplo, no perturba en absoluto si se toman como obs de algún sistema formal más fundamental. Suponemos que cada una de esas clases dadas, si es infinita, constituye una secuencia numerable [15]; esto puede interpretarse en el sentido de que sus miembros pueden engendrarse como los obs de un sistema del tipo $\mathcal{N}_0$ (cfr. § E4).

Por lo que hace a la teoría propiamente dicha no exigimos que los teoremas elementales constituyan una clase determinada. Si pusiéramos esta exigencia el sistema se llamaría *decidible*; y desde varios puntos de vista un sistema decidible es relativamente trivial. Lo que exigimos es que sea determinada la idea de demostración. Una demostración es un esquema que presenta el enunciado que hay que demostrar como derivado de los axiomas según las reglas. Un tal esquema consistirá en una secuencia de enunciados elementales, el último de los cuales es el enunciado que había que demostrar; cada miembro de la secuencia de enunciados es un axioma o una consecuencia de sus predecesores de acuerdo con una regla deductiva. La noción de demostración tiene que ser determinada en el sentido de que pueda determinarse objetivamente si una supuesta demostración es o no es correcta. Esto implica que la clase de los axiomas tiene que ser una clase determinada [16].

---

[15] Esto corresponde al hecho de que ordinariamente designamos tales átomos mediante una letra con subíndices numéricos, por ejemplo, x_1, x_2, ...

[16] Cfr. [OFP], págs. 31 y sigs. Obsérvese que no es necesario que la cuestión de si una secuencia dada de enunciados constituye o no una demostración sea una cuestión determinada. Podemos exigir de una demostración que la regla a aplicar se indique

La validez de un teorema elemental en un sistema formal concebido de este modo es, pues, una cuestión objetiva. No depende de la aceptación de ningún principio *a priori*. Si el proceso tiene presupuestos filosóficos serán presupuestos necesarios del conocimiento humano y de la comunicación humana de cualquier tipo. Precisamente por ese carácter objetivo los sistemas formales pueden utilizarse sin vicio de circularidad para el estudio de la lógica, incluso de la más fundamental.

Para fines distintos de los del análisis lógico fundamental esas restricciones de determinación son a veces demasiado rigurosas, y es útil considerar sistemas más laxos, con nociones tales como functivas de grado infinito y reglas con infinitas premisas. Tales sistemas pueden llamarse indeterminados, pero acaso fuera mejor llamarlos simplemente semiformales. No nos ocuparemos de ellos en este libro.

C. FILOSOFIA DE LOS SISTEMAS FORMALES

Los temas tratados en esta sección se refieren, principalmente, a las relaciones entre el sistema formal y ciertas actividades que desarrollamos respecto de él. La discusión aspira a iluminar la naturaleza y la relevancia de un sistema formal, y a clarificar la definición de § B. Uno de los temas que propiamente pertenecen a esta sección, la relación entre el sistema formal y el lenguaje, es de tal complejidad y de tal importancia que ha parecido mejor reservarle en propio una sección (§ D).

1. Presentación

La enunciación concreta de la estructura primitiva de un sistema formal utilizará, naturalmente, símbolos para designar las nociones primitivas, y tendrá que describir cómo deben simbolizarse los cierres de las functivas. Llamaremos *presentación* de la estructura primitiva (y del sistema formal) una tal enunciación concreta, con su particular elección de simbolismo.

Es claro que un sistema formal no puede comunicarse más que por medio de una presentación. Y también está claro que la concreta elección del simbolismo no es cosa de gran importancia. Mientras satisfa-

---

en cada paso, que las premisas se indiquen también explícitamente (por ejemplo, presentando la demostración en forma de árbol genealógico), etc. Lo importante es que, una vez dada toda la información requerida, la corrección de una supuesta demostración sea determinadamente verificable. (Cfr. la noción de Kleene de deducción con análisis, en [IMM], pág. 87.)

gamos una condición indispensable —a saber, que se asignen a obs distintos nombres distintos [17]—, podemos elegir el simbolismo como queramos sin afectar a nada esencial. Podemos, por tanto, considerar un sistema formal como cosa independiente de dicha elección, y decir que dos presentaciones que difieran sólo en la elección del simbolismo son presentaciones del mismo sistema formal. En este sentido un sistema formal es abstracto respecto de su presentación.

2. Representación

La presentación de la estructura primitiva habla de los obs, usando nombres para nombrarlos; pero no especifica qué cosa determinada es cada ob. Si asignamos una cosa única y determinada a cada ob, de tal modo que cosas distintas sean asignadas siempre a obs distintos, tendremos una *representación* del sistema. Las cosas asignadas pueden ser cualesquiera objetos acerca de los cuales se pueda enunciar algo: símbolos (o combinaciones de signos), cualidades, números, nociones, cosas artificiales, seres naturales. La asignación de una tal representación (o el cambio de la representación, una vez hecha) no afecta en modo alguno al criterio de verdad para los enunciados elementales, de modo que los predicados quedan siempre definidos por la estructura primitiva sin referencia a ningún «significado» externo. Un sistema no deja de ser formal por el hecho de que se le asigne una representación, sino que la representación es, por así decirlo, accidental, y el sistema como tal es independiente de ella. Llamaremos *abstracto* a un sistema para el cual no se especifique ninguna representación.

Dado un sistema formal, podemos encontrarle de varios modos una representación. Así, por ejemplo, podemos establecer una representación mediante símbolos para nuestra anterior teoría elemental de cifras; sea 0 el asterisco ('*'), y sea la operación del sistema la adjunción de un signo de exclamación ('!') a la derecha. En esta representación los obs de $\mathcal{N}_0$ resultan ser los símbolos de la derecha de la tabla siguiente (a la izquierda están sus respectivos nombres):

0	*
0′	*!
0″	*!!
.....	

[17] Esta condición quedaría violada, por ejemplo, si admitiéramos una segunda operación, indicada por dos índices, en el sistema $\mathcal{N}_0$, porque entonces será ambigua la significación de 0‴, que podría ser (0′)″ o bien (0″)′.

Puede mostrarse que un tipo de sistema formal muy general puede representarse en la serie lineal formada por dos o más símbolos distintos [18]. Los predicados quedan definidos exclusivamente por la estructura primitiva y no tienen referencia a ninguna «significación» ajena.

De lo dicho en el § 1 se sigue que los nombres de los obs en cualquier presentación constituyen una representación. Llamaremos *representación autónima* a una representación de este tipo. Este modo de concebir el sistema formal es muy afín a las ideas de Hilbert. La representación autónima está exenta de ambigüedad mientras no se considere el sistema, en el mismo contexto, con una interpretación (cfr. § 3) en la que los símbolos de la presentación tengan otras significaciones [19]. (Cfr. § 2S1 y la discusión del final de [SFL].)

3. Interpretación [20]

La idea de representación debe distinguirse de la de interpretación. Entendemos por *interpretación* de un sistema formal una correspondencia entre sus enunciados elementales y ciertos otros enunciados que son significantes sin referencia al sistema. Los llamaremos enunciados *contentivos*. (Usaremos de un modo muy general el adjetivo 'contentivo' [21] para indicar cualquier cosa definida con precedencia o anterioridad al sistema.) Se entiende que un sistema formal puede ser interpretado por otro, y que su interpretación puede ser totalmente intuitiva.

La noción de interpretación no requiere que haya, efectivamente, una traducción contentiva de todo enunciado elemental. Tenemos, en efecto, que recoger el hecho de que una teoría formal puede ser una idealización más que una mera transcripción de la experiencia [22]. Así, por ejemplo, si se formalizaran como sistemas formales ciertas teorías físicas,

---

[18] Cfr. [LLA], apéndice, § 3; Quine [TCP]; Rosenbloom [EML], pág. 171. Para una representación a base de objetos artificiales cfr. [APM], § 4, pág. 231. Para ulterior discusión de la filosofía cfr. [OFP], cap. VI. Una representación a base de un símbolo es equivalente a una representación a base de números (es decir, de obs de $\mathcal{N}_0$); esto puede obtenerse siempre mediante los métodos de Gödel.

[19] Como es natural, en lo que sigue no estamos obligados a esta representación. Nuestro tratamiento es abstracto, y el lector que desee una representación puede escogerla como le interese, autónima o heterónima.

[20] Véase, para una ampliación de los §§ 3-4 [OFP], cap. XI, y [TFx]. El tema se trata aquí brevemente porque no es de gran relevancia para la lógica combinatoria. Pero lo dicho aquí exige cierta revisión de los trabajos citados.

[21] Esta palabra es traducción del alemán 'inhaltlich'*, que no queda exactamente traducido si se da por 'intuitivo'. Se introdujo en [APM].

[22] Cfr. [HB. I], págs. 2-3.

---

* 'inhaltlich' es adjetivo y adverbio de 'Inhalt', contenido.—*N. del T.*

esos sistemas contendrían, sin duda, enunciados intraducibles a enunciados experimentalmente verificables. Aún menos necesario es que haya un objeto contentivo correspondiente a cada ob. Así, en interpretaciones de sistemas que contienen variables (§ 2C) los objetos contentivos no se asocian ordinariamente a las variables, sino sólo a las constantes. Además, cuando existen tales objetos contentivos no es siempre regla general que objetos contentivos distintos estén asociados a obs distintos.

Una interpretación es *válida* cuando todo enunciado contentivo que corresponde a un teorema elemental es verdadero; también se dirá en este caso que el sistema es válido para dicha interpretación. Una interpretación es directa cuando asigna simultáneamente a todo ob un objeto contentivo (pero sin exigirse que sean distintos los objetos asignados a distintos obs).

La interpretación de un sistema formal (o semiformal) por otro es importante en la lógica moderna. En ciertas condiciones, demasiado complejas para examinarlas ya, esto da origen a «modelos».

4. Aceptabilidad [23]

Consideraremos unos pocos principios generales relativos a las razones por las cuales elegimos un determinado sistema formal para su estudio. Las razones se refieren a alguna intención; y cuando quedan satisfechas desde el punto de vista de esa intención, decimos que el sistema formal en cuestión es *aceptable* para la misma.

Como es natural, el criterio de aceptabilidad más importante es la validez de una interpretación en algún campo determinado que nos interese. En la práctica, tenemos por de pronto usualmente una teoría concreta, y luego derivamos de ella por abstracción el sistema formal. Así, al establecer lo que llamamos la teoría elemental de cifras especificamos que el símbolo 0 era el cero intuitivo, que x' era el siguiente de x y que $=$ era el predicado expresable por 'igual a'; a continuación hicimos abstracción de esta interpretación. En las más complejas teorías de la ciencia la situación es menos trivial, pero sigue siendo análoga. Puede haber en ellas, como ya se ha dicho, una mayor o menor idealización. En estos casos la validez de la interpretación —al menos la validez aproximada— es la *conditio sine qua non* de la aceptabilidad.

Pero hay también otros criterios. De dos sistemas igualmente válidos para una misma interpretación el uno puede ser más simple, más natural

---

[23] Cfr. nota 20.

o más conveniente que el otro; o puede ofrecer un análisis más profundo e instructivo; o puede sugerir relaciones con otros campos de estudio y abrir nuevos campos de investigación; o puede ser más conforme a ciertos prejuicios filosóficos, etc. La aceptabilidad debe, pues, distinguirse de la validez; esta última es una relación veritativa entre el sistema como un todo y el asunto al que se aplica; la primera, toma en cuenta nuestras intenciones al estudiar dicho asunto, campo o tema.

Cuando un sistema formal se considera en relación con una aplicación hay que distinguir entre dos tipos de concepto de verdad. La verdad de un teorema elemental del sistema formal está determinada por la naturaleza abstracta de la teoría misma. La validez y la aceptabilidad son propiedades del sistema como un todo y en relación a un determinado objeto temático; si éste es empírico aquellos conceptos lo son también. Y el que el análogo contentivo de un teorema elemental resulte falso no afecta a la verdad del teorema elemental, sino que muestra sólo que la interpretación no es válida para el sistema [24]. Para un objeto temático empírico la validez no puede determinarse más que hipotéticamente. En un caso tal un sistema conveniente y útil se considera aceptable mientras no se conozca ningún caso que lo muestre no-válido; cuando se descubre algún caso de no-validez hay que abandonar o modificar el sistema [25].

D. ASPECTOS LINGÜISTICOS DEL SISTEMA FORMAL

Un lenguaje se usa en la exposición de un sistema formal igual que en cualquier actividad intelectual; y ese lenguaje se usa, como cualquier lenguaje, para nombrar objetos y para formar enunciados sobre ellos. El sistema formal no es una discusión sobre ese lenguaje. Pero podemos iluminar un tanto la naturaleza del sistema formal examinando ese lenguaje según lo practica la moderna semiótica [26]. Lo haremos en esta sección; y, al mismo tiempo, consideraremos la relación que hay entre un sistema formal y las nociones, más lingüísticamente orientadas, que son la formulación corriente.

1. Lenguajes

Se entiende por lenguaje, en el sentido general usado en semiótica, cualquier sistema de objetos, llamados *símbolos*, que pueden darse en can-

[24] Como es natural, el descubrimiento de una inconsistencia interna implicaría la no-validez para cualquier interpretación.

[25] Sobre el efecto de una inconsistencia cfr. § 8C3.

[26] En el sentido de Morris [FTS]. Cfr. también § S2, al final de este capítulo.

tidad ilimitada, como las letras de imprenta o como los fonemas del habla, y combinados en series lineales [27] llamadas *expresiones*. Es irrelevante que el lenguaje se use o no con fines de comunicación; si se usa con esos fines se llamará *lenguaje comunicativo*.

Para hablar de un lenguaje necesitamos algún expediente para referirnos a sus símbolos, expresiones y demás partes. Por lo que hace a las expresiones es práctica común la de usar un ejemplar de la expresión, puesto entre comillas, y entenderlo como nombre de la expresión. Pero este uso entra parcialmente en conflicto con otros usos de las comillas; usamos, pues, comillas simples para evitar algo de esa confusión. Así, Bruselas es la capital de Bélgica, mientras que 'Bruselas' es una palabra de ocho letras que constituye el nombre de dicha ciudad en castellano.

2. Gramática

A veces deseamos considerar partes de un lenguaje comunicativo respecto de sus funciones gramaticales. Llamaremos *frase* a cualquier combinación de símbolos con función gramatical. Es claro que no todas las expresiones son frases; y también es verdad, puesto que las frases pueden constar de partes sueltas, que no todas las frases son expresiones. Las frases más simples se llaman a veces *palabras*.

Hay tres tipos principales de frases, a saber: *nombres*, que nombran objetos; *sentencias*, que enuncian enunciados, y *functores*, que combinan frases para formar otras frases más amplias. Entre los functores se incluyen los *operadores*, que forman nombres partiendo de otros nombres; *predicativos*, o verbos, que forman sentencias partiendo de nombres; y conectivos o *conectivas*, que forman sentencias partiendo de otras sentencias [28]. Para designar la significación de frases en general usaremos a veces las palabras 'concepto', 'idea', o 'noción'. Los conceptos correspondientes a los seis tipos de frases que acabamos de enumerar se llamarán *objetos* (obs, términos), *enunciados* o *proposiciones*, *funciones*, *operaciones*, *predicados* y *conexiones*, respectivamente. En cada caso diremos que la frase *designa* su concepto; a diferencia de 'nombrar', 'designar' no supone que su sujeto sea un nombre, ni tiene ninguna específica connotación filosófica [29].

---

[27] Cfr. [LFS], primer párrafo; [TFD], pág. 11. Nos limitamos aquí a lo que en esos trabajos se llama lenguajes lineales.

[28] No se aspira aquí, obviamente, a una clasificación exhaustiva.

[29] El uso de nombres distintos para las frases y las significaciones de las frases no obliga a adoptar ninguna filosofía determinada. Puede, en efecto, admitirse que no hay, en realidad, más que una diferencia de acento entre los dos nombres distintos.

Los términos 'grado', 'cierre', 'monádico', 'binario', etc., se definen para functores exactamente igual que lo fueron para functivas en el § B1, con la diferencia de que los argumentos de un functor pueden ser frases de cualquier tipo. La terminología puede aplicarse también a funciones.

Estas distinciones se refieren a un lenguaje comunicativo. Pero puede ocurrir que estas nociones y otras relacionadas con ellas sean también significantes en una situación más abstracta. Se ha llamado *gramática* al estudio de las consecuencias de estas convenciones, y un lenguaje en el que dichas convenciones sean significantes se llama *lenguaje gramatical.*

Para disponer de una notación completa para functores necesitaríamos indicar cómo hay que simbolizar su cierre, y esto impondría algún modo de indicar blancos o lugares en los que hay que insertar los argumentos. Pero corrientemente los functores son de los tres tipos siguientes: *prefijos*, escritos delante de los argumentos; *infijos*, que son functores binarios escritos entre los dos argumentos; y *sufijos*, escritos detrás de los argumentos. Prefijos y sufijos pueden tener un número cualquiera de argumentos, y, como ha mostrado Lukasiewicz, no son necesarios paréntesis cuando no se presentan más que functores de uno solo de los dos tipos[30]; los infijos son necesariamente binarios y requieren el uso de paréntesis. Puesto que podemos considerar conocidas las reglas del uso de los paréntesis, en los casos más simples será suficiente tratar el functor como un símbolo simple; cuando este símbolo se usa como nombre se entenderá que es nombre de la función correspondiente. Así, en la notación del § A3 el símbolo '′' es un operador sufijo monádico, el símbolo '=' es un predicativo infijo (binario), y $=$ es un predicado binario. En la matemática ordinaria '+' es un operador infijo, y $+$ es una operación binaria. Pero en casos más complejos será necesario usar una notación que, efectivamente, explicite los lugares para argumentos; así '$(\text{---}_1)^{\text{---}_2}$' para exponenciar, '$\text{---}_1(\text{---}_2)$' para la aplicación de una función a un argumento, '--- es positivo' para la propiedad de ser positivo, etc.[31].

---

[30] Para la demostración de este teorema y referencia a demostraciones anteriores cfr. Rosenbloom [ETM], cap. IV, § 1. Otra demostración en [LLA], apéndice 2. Reciente discusión en Lukasiewicz [FTM] y notas.

[31] El anterior resumen de la gramática se toma abreviado de [TFD], cap. I, § 5. La distinción allí hecha entre 'función' y 'functiva' se ha abandonado aquí, pues la notación en '-iva' pareció innatural para los fines de este lugar. Así, pues, 'función' de aquí corresponde a 'functiva' de allí; para 'función' de allí usaremos 'cierre de una función', etc. Esto nos deja disponible el término 'functiva' para el uso más especial que hacemos de él en § B1.

3. El lenguaje U

La construcción de un sistema formal tiene que exponerse en un lenguaje comunicativo entendido tanto por el que habla como por el que escucha. Llamaremos a este lenguaje *lenguaje U* (el lenguaje usado). Se trata de un lenguaje en el sentido corriente de la palabra. Está bien determinado, pero no fijado rígidamente; se pueden introducir en él nuevas locuciones por vía de definición, se pueden precisar locuciones antiguas, etc. Todo lo que hagamos dependerá del lenguaje U; no podemos transcenderlo; estudiemos lo que estudiemos, lo estudiaremos por medio de él. Sin duda, es siempre inherente al lenguaje U cierta vaguedad; pero mediante un uso hábil podemos obtener cualquier grado de precisión por un proceso de aproximación sucesiva.

4. El lenguaje A.

Podemos considerar la formulación de un sistema formal como una introducción de símbolos nuevos en el lenguaje U. Al establecer una estructura primitiva utilizamos dos tipos de símbolos: por una parte, palabras o expresiones ya conocidas; por otra parte, símbolos completamente nuevos. En la presentación de nuestro sistema elemental de cifras, palabras tales como 'enunciado', 'ob', 'operación', 'teorema', son palabras que se suponen significantes en el lenguaje U (el cual contiene la terminología técnica presupuesta) ya antes de que se introduzca el sistema formal. Incluso las variables '*x*' e '*y*' se usan en un sentido ya conocido intuitivamente en U (y por eso se pueden llamar «U-variables»). Pero símbolos como '0', ''', '=' son nuevos; puede decirse que son los símbolos elementales de cierto nuevo lenguaje —en el sentido generalizado antes mencionado— incrustado ahora en el lenguaje U. Llamaremos a este lenguaje *lenguaje A*.

Más en general: dada una presentación determinada de un sistema formal, el lenguaje A es aquel lenguaje (en el sentido generalizado) que está constituido por los símbolos y las expresiones utilizados para las nociones primitivas y sus combinaciones. Los símbolos del lenguaje A son símbolos añadidos al lenguaje U para usarlos en él; cumplen en él funciones gramaticales. Así, el símbolo '0' en el lenguaje A de $\mathcal{N}_0$ es un nombre de una especial clase de nombres que designan lo que llamamos «cifras». El símbolo ''' es un sufijo que, puesto a la derecha de uno de esos nombres, forma a partir de él otro nombre de los dichos.

El símbolo '=' es un verbo que, colocado entre dos nombres de los dichos, forma con ellos una *sentencia elemental*[32]. Las convenciones gramaticales así enunciadas expresan de hecho las mismas nociones que la parte morfológica de la estructura primitiva de $\mathcal{N}_0$. Lo que describe la estructura primitiva es, pues, la estructura y el modo de uso del lenguaje técnico A, inserto en el lenguaje U [33].

Así podemos contemplar desde un punto de vista lingüístico el proceso de definición de un sistema formal. Haciéndolo así podemos afinar un tanto las prescripciones de § B. Por ejemplo, las restricciones de determinación pueden ahora establecerse del modo siguiente: dada una expresión del lenguaje U+ A, la cuestión de si esa expresión es el nombre de un átomo, el nombre de un ob, un predicativo que designa un predicado, o una sentencia elemental, tiene que ser una cuestión determinada; si la expresión es una sentencia elemental, tiene que ser determinada la cuestión de si es o no un axioma; y dada una aplicación de una regla, tiene que ser determinada la cuestión de si se trata de una regla aceptada y de si la aplicación es correcta.

Pero la excesiva insistencia en este punto de vista tiende a oscurecer la naturaleza abstracta del sistema formal respecto de sus presentaciones.

5. Sistemas sintácticos

Un sistema formal general, como queda formulado en § B, puede compararse con los sistemas sintácticos por medio de los cuales suele describirse la lógica matemática. En estos sistemas sintácticos tenemos que distinguir dos lenguajes distintos: el lenguaje U y un *lenguaje-objeto* que se mantiene totalmente aparte del lenguaje U, en el sentido de que sus símbolos no se usan nunca, sino que sólo se habla de ellos. Los objetos en discusión son las expresiones de este lenguaje-objeto [34]. Si todas las expresiones del lenguaje objeto son considera-

---

[32] Usamos este término para significar una sentencia que expresa un enunciado elemental.

[33] Se ha observado ya que el lenguaje U puede cambiar, y que el añadido del lenguaje A es precisamente un tal cambio. Para mayor precisión llamaremos *lenguaje U originario* al lenguaje U antes del añadido del lenguaje A, y usaremos la expresión 'U + A' para indicar el lenguaje U con el lenguaje A añadido. Pero en la mayoría de los casos bastará el simple término 'lenguaje U'. Sobre el origen de los términos 'lenguaje U' y 'lenguaje A' cfr. [LFS] y [LMF].

[34] En nuestro uso 'sistema sintáctico' denota cualquier teoría que trate de las expresiones del lenguaje no teniendo en cuenta más que la clase y la disposición de los signos que las componen. La teoría puede ser completa o parcial; también es irrele-

das por la teoría hablaremos de *sintaxis completa*; una *sintaxis parcial* trata sólo de ciertas expresiones *bien formadas* [35].

La única diferencia entre un sistema formal y un sistema sintáctico se encuentra en la descripción de los objetos; los enunciados elementales, los teoremas (y lo mismo los epiteoremas) del sistema sintáctico pueden formularse, prácticamente, como los del sistema formal. La representación mencionada en § C2 convierte un sistema formal arbitrario en la sintaxis parcial de un adecuado lenguaje-objeto. A la inversa, si asociamos a cada objeto símbolo una operación monádica, por ejemplo, la de ponerle un prefijo, y tomamos como átomos la expresión vacía o todas las expresiones que consistan en un símbolo solo, entonces puede exponerse una sintaxis completa en la forma de un sistema formal representado en las expresiones objetos, y puede tratarse una sintaxis parcial introduciendo las expresiones bien formadas como categoría auxiliar. En este caso la concatenación se define recursivamente, al modo de la adición en la aritmética de Peano [36]. En cambio, si se toma la concatenación como operación primitiva será necesaria alguna formalización adicional para que el sistema sea estrictamente formal; y habrá entonces una interpretación directa, más que una representación, a base de las expresiones del lenguaje-objeto [37]. En cualquier caso el sistema se hace abstracto con sólo prescindir del lenguaje-objeto.

Los sistemas sintácticos y los sistemas abstractos tienen sus respectivas ventajas, y unos y otros pueden ser igualmente formales. Una formulación sintáctica acarrea ciertas complicaciones [38] y es, en este sentido, menos abstracta que la formulación no-sintáctica. Aquí formularemos las diferentes formas de lógica combinatoria como sistemas abstractos [39].

El hecho de que manejemos un sistema abstracto, y no un sistema sintáctico, tiene una consecuencia de cierta importancia. Los autores de semiótica han precisado los peligros del «modo autónimo de hablar»

---

vante el que alguna categoría de expresiones se segregue como «sentencias» y, caso de hacerlo, el que se defina o no una relación de consecuencia directa. Sistemas que en la literatura se describen como «semánticos» pueden ser sintácticos en este sentido. Cfr. § S2.

[35] Este término, introducido por Church [SPF. I], está hallando muy amplia aceptación.

[36] Estas ideas se deben en gran parte a Hermes [Smt]. Sobre definiciones recursivas cfr. § 2E. Para expresar las reglas hará falta, además, una formalización de la igualdad (v. la frase siguiente).

[37] Como la concatenación es asociativa, una misma expresión puede construirse a veces de modos diversos, y puede, por tanto, corresponder a obs diferentes. Para una mayor elaboración de lo dicho en el texto cfr. [LLA], cap. I, § 5 (cfr. [SFL]); sobre la formalización cfr. referencias al final de § S2.

[38] Para la discusión de estas complicaciones cfr. [OFP], págs. 41-46; [LLA], I, § 5; [SFL].

[39] En esta discusión hemos evitado el término 'metalenguaje'. Cfr. § S2.

—el modo, esto es, en el cual un ejemplar de una expresión simbólica se usa como nombre de esa expresión—. Estos peligros son especialmente serios cuando el objeto temático es lingüístico; hacen falta entonces no sólo comillas, sino también otros expedientes (por ejemplo, los «ángulos» de Quine) para estar seguros de que se ha evitado la «confusión entre uso y mención». Pero cuando el objeto temático no es lingüístico, o cuando el lenguaje-objeto no está interpretado (cfr. § C2), estos peligros son menores; los expedientes del lenguaje ordinario son, por lo común, suficientes para dejar la significación en claro. Por eso nos hemos permitido a veces cierta laxitud en estas cuestiones y no hemos introducido más notación técnica al respecto que las comillas simples. (Cfr. [OFP], págs. 44 y sigs.; Carnap [LSL], págs. 156 y siguientes; Quine [MLg_2], §§ 4, 53.)

E. FORMAS ESPECIALES DE SISTEMAS FORMALES

Los sistemas formales han sido definidos en § B con tal generalidad que cualquier teoría deductiva rigurosa puede ponerse en forma de sistema formal. En esta sección vamos a considerar sistemas formales de formas especiales, y la reducción de sistemas formales más generales a ellos.

1. Sistemas relacionales

Llamaremos *sistema relacional* a todo sistema formal en el que haya un solo predicado primitivo, con la condición de que éste sea binario. Llamaremos *sistema ecuacional* a todo sistema relacional cuyo predicado primitivo tenga las propiedades de la igualdad— la reflexividad, la simetría, la transitividad y ciertas propiedades de reemplazo que discutiremos en el capítulo **2**; y un sistema cuya relación primitiva sea cuasi-ordenadora (cfr. § **2**D) se llamará *sistema cuasi-ordenado*.

En la mayor parte de sistemas de la matemática ordinaria la igualdad se toma sin discusión. Al formalizar un sistema de este tipo se obtienen muy naturalemnte sistemas ecuacionales. El sistema $\mathcal{N}_0$ es un sistema ecuacional. Ejemplos menos triviales son la formulación de la teoría de grupos en [APM], § 3[40], y varias formulaciones del álgebra booleana. Las álgebras booleanas, los retículos, etc., pueden formalizarse también de modo muy natural como sistemas cuasi-ordenados [41].

---

[40] Repetido en [TFD], I, § 2, y [LLA], II, § 2.
[41] Cfr., por ejemplo [LLA].

Puede mostrarse que un sistema formal cualquiera es reducible a otro relacional [42]. Pero no parece que esto tenga ningún interés, a menos que el sistema obtenido sea ecuacional (o cuasi-ordenado), y de tal estructura que tenga importancia la analogía con el álgebra ordinaria [43].

Como estadio intermedio, en el capítulo 6, nos resultará conveniente obtener un sistema ecuacional de la teoría de combinadores. En el capítulo 7 nos ocuparemos de esta reducción por el método del § 2.

2. Sistemas logísticos

Un sistema formal cuyo único predicado sea monádico se llama *sistema logístico*.

En un tal sistema el predicado único representa una clase de obs, y todo enunciado elemental indica que algún ob pertenece a esa clase. En este libro llamaremos a los obs de esa clase *obs afirmados*, y diremos que un enunciado afirma X si —y sólo si— dice que X pertenece a esa clase. Empleamos el signo de Frege '$\vdash$' como prefijo para designar el predicado. El 'ist beweisbar' * de Hilbert o el 'is in T' ** de Huntington son otros modos de expresarlo; lo corriente en la literatura es que no se exprese en absoluto, dejando su significación al contexto.

Mostraremos ahora que *un sistema formal cualquiera es en principio reducible a un sistema logístico con una categoría adicional auxiliar*. Sea $\mathfrak{S}$ el sistema formal dado; elijamos para él una presentación que no use '$\vdash$'. Llamemos $\mathfrak{S}'$ al sistema logístico que hay que construir. Admitiremos dos clases de obs en $\mathfrak{S}'$, a saber: *obs básicos* y *fórmulas* (o proposiciones) [44]; los obs básicos coincidirán con los obs de $\mathfrak{S}$, y las fórmulas corresponderán a los enunciados elementales de $\mathfrak{S}$. Para conseguir lo primero basta, evidentemente, con usar los mismos átomos y operadores en $\mathfrak{S}'$ que en $\mathfrak{S}$, traduciendo [45] todas las reglas de formación de obs de $\mathfrak{S}$ en obs básicos de $\mathfrak{S}'$. Luego hagamos corresponder biunívocamente a cada predicado de $\mathfrak{S}$ un operador del mismo grado en $\mathfrak{S}'$.

---

[42] Esto es una consecuencia trivial del § 2, porque podemos sustituir '$\vdash A$' por 'A **R** 1', siendo 1 un nuevo átomo.

[43] Para un estudio de esas transformaciones en relación con el álgebra proposicional cfr. [LLA], cap. II.

* 'es demostrable'.—*N. del T.*

** 'está en T'.—*N. del T.*

[44] El término 'fórmula' es más usual para este fin.

[45] Si en $\mathfrak{S}$ hay varias categorías de obs, en $\mathfrak{S}'$ habrá otras tantas categorías correspondientes de obs básicos.

Establezcamos, por último, reglas de formación tales que cuando el predicado forma un enunciado elemental $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{S}$ el operador forme una fórmula A en $\mathfrak{S}'$; la correspondencia entre $\mathfrak{A}$ y A es, pues, biunívoca. Establezcamos entonces que el predicado $\vdash$ forma un enunciado elemental en $\mathfrak{S}'$ a partir de cualquier fórmula. Sea la proposición

$$\vdash A$$

de $\mathfrak{S}'$ la traducción de $\mathfrak{A}$. De este modo la estructura primitiva de $\mathfrak{S}$ puede traducirse a una estructura primitiva para $\mathfrak{S}'$. Los teoremas elementales de $\mathfrak{S}'$ son precisamente las traducciones de los de $\mathfrak{S}$ y la relación entre los dos sistemas tiene un carácter análogo al de la relación entre dos representaciones del mismo sistema formal.

Para ilustrar este proceso lo aplicaremos al sistema $\mathscr{N}_0$. Tomemos el infijo '$\square$'[46] para indicar la operación correspondiente a la igualdad. Entonces, si $\mathfrak{S}$ es el sistema $\mathscr{N}_0$, la estructura primitiva de $\mathfrak{S}'$ será como sigue:

0 es un ob básico.

Si a es un ob básico, entonces a' es un ob básico.

Si a y b son obs básicos, entonces $a \square b$ es una fórmula.

Si A es una fórmula, $\vdash A$ es un enunciado elemental.

$\vdash 0 \square 0$.

Si a y b son obs básicos y $\vdash a \square b$, entonces $\vdash a' \square b'$.

En este caso, como es obvio, resulta innecesaria la categoría auxiliar añadida; porque en el caso de que colocáramos sin distinción los obs básicos y las fórmulas (que es la categoría añadida) en una sola categoría de obs, se producirían, sin duda, algunos obs raros — por ejemplo, $(0 \square 0')'$—, pero no cambiarían los teoremas elementales. No obstante, la prescindibilidad de la categoría auxiliar añadida no es un caso general.

Este proceso se aplica también a sistemas que admitan conectivas, que excluimos al final del § B1. Podemos, en efecto, hacer que a una conectiva de $\mathfrak{S}$ corresponda un operador de $\mathfrak{S}'$ que combine fórmulas para dar otras fórmulas. Pueden incluirse otras varias generalizaciones.

De esto se sigue que es posible limitar la atención a sistemas logísticos sin perder generalidad. Así se hace casi siempre en la lógica moderna. En este caso es natural que se produzcan concepciones diversas de nociones relacionadas con los sistemas formales. Esta diferencia puede ilustrarse a propósito del término 'axioma'. En § B un axioma es un enunciado elemental; se expresa por una sentencia del lenguaje U.

---

[46] Léase «cuad».

En un sistema logístico lo que hace ese enunciado es afirmar un determinado ob (una fórmula). Lo corriente es aplicar el término 'axioma' al ob (fórmula) en vez de al enunciado que lo afirma. Diferencias análogas afectan a algunas otras nociones [47].

3. Sistemas aplicacionales

Por un método debido esencialmente a Schönfinkel, [BSM], podemos efectuar reducciones a un sistema de una sola operación binaria. Se empieza por introducir en el sistema átomos nuevos correspondientes a las operaciones originarias. Añadimos una operación binaria y la denotamos por mera yuxtaposición. Para evitar paréntesis superfluos convenimos que en una fila de símbolos sin paréntesis las operaciones tienen que realizarse a partir de la izquierda, de tal modo que '*abcd*', por ejemplo, significará lo mismo que '((ab)*c*)*d*'. Sea F el ob asociado a una operación m-ádica del sistema originario; llamemos f a esa operación originaria. Entonces podemos definir $f(a_1, a_2, ..., a_m)$ por $Fa_1a_2 \ldots a_m$, y así eliminamos f como primitiva.

Supongamos, por ejemplo, un sistema que contenga una operación de adición; si A es el ob asociado podemos definir $a + b$ por Aab. En nuestro sistema $\mathcal{N}_0$ puesto en forma logística podemos asociar un ob S a la operación $'$, y un ob Q a la operación $\square$; entonces podemos definir x' por Sx y $x \square y$ por Qxy, eliminando así $'$ y $\square$ como primitivas.

La nueva operación se llama *aplicación* porque en el caso $m = 1$ corresponde a la aplicación de una función a un argumento. En el capítulo 3 se hará un estudio de su significación intuitiva en otros casos. La operación permite, ciertamente, formar combinaciones intuitivamente sin sentido (como AA); pero no nos interesaremos aquí por ellas.

Llamaremos *sistema aplicacional* a un sistema sin más operación que la aplicación; si tiene la aplicación además de otras operaciones se llamará *cuasi-aplicacional*. Todo sistema puede entonces reducirse a un sistema aplicacional siempre que introduzcamos obs auxiliares.

Para la mayoría de los fines de este libro usaremos la notación de la operación de aplicación que acabamos de describir. Pero hay otra notación que evita todo paréntesis. Se obtiene, según el resultado de Lukasiewicz mencionado en § B2 [48], utilizando un prefijo binario de

---

[47] Cfr. [OFP], pág. 35; [IFI]. En este último se distingue entre proposiciones y fórmulas axiomáticas (allí llamadas «proposiciones»), y 'axioma' puede significar una u otra cosa, según el contexto.

[48] Nota 30.

operador. Uno útil es el '*' de Chwistek [49]. Con él '*fa(gb)(hcd)*' se traduce por '****fa***gb****hcd*'. La notación puede aún mejorarse usando exponentes para indicar las repeticiones de '*'; la anterior expresión se traduce entonces por '$*^3fa*gb*^2hcd$'; y '$Fa_1 \ldots a_m$' se traduce por '$*^m Fa_1 \ldots a_m$'.

4. Reducción a un solo átomo

Podemos reducir cualquier sistema formal a un sistema con un solo ob primitivo [50]. Supongamos, en efecto, que el sistema es aplicacional y tiene los obs primitivos $E_1, E_2 E_3, \ldots$ Sea C un nuevo ob primitivo; definamos (' $\equiv$ ' indica la identidad por definición):

$$E_1 \equiv CC, \quad E_2 \equiv CE_1, \quad E_3 \equiv CE_2, \ldots$$

El sistema resultante tiene esencialmente el mismo contenido que el viejo, pero no tiene ya más ob primitivo que C.

Se trata, evidentemente, de una reducción meramente técnica; desde el punto de vista de la inteligibilidad es más bien nociva. De todos modos, esa misma idea en lo esencial ha sido utilizada por Post, Chwistek y otros [51], para reducir un número infinito de obs primitivos a un número finito. Así, en vez de la secuencia

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

podemos introducir los obs primitivos X, S (pudiendo ser S un ob que ya estuviera en el sistema), y definir

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv X, \\ x_2 &\equiv X' \equiv SX, \\ x_3 &\equiv X'' \equiv S(SX), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Y si hay otra secuencia

$$y_1, y_2, \ldots,$$

---

[49] [GNk], pág. 62 (=[LSc], pág. 86); cfr. Christek and Hetper [NFF]. Rosenbloom [EML], pág. 111, usa un trazo vertical '|'. En [OFP] se usó '*a*'.

[50] Schönfinkel, [BSM], dio ya también esta reducción.

[51] Véase, por ejemplo, Rosenbloom [EML], págs. 40 y sigs., 158 y sigs.

podemos utilizar un ob primitivo Y en combinación con el mismo S, o bien el mismo ob primitivo X con otro S diferente. Más o menos, así podemos proceder con secuencias dobles y triples. Es evidente que todo esto es en sustancia una formalización de los subíndices numéricos mediante la incorporación de la morfología del sistema $\mathcal{N}_0$ al sistema. Así, pues, en cierto sentido este sistema $\mathcal{N}_0$ está contenido en todo sistema infinito que se encuentre suficientemente formalizado.

5. Formalización completa

Diremos que un sistema es completamente formalizado cuando no contenga nociones auxiliares ni restricciones a la aplicabilidad de sus functivas. No tendrá, pues, más que una categoría de obs; el cierre de un operador n-ádico respecto de cualesquiera n obs será siempre un ob; y el cierre de un predicado n-ádico respecto de cualesquiera n obs será siempre un enunciado elemental. Aceptadas estas estipulaciones, su morfología consistirá simplemente en una enumeración de sus nociones primitivas. La estructura primitiva puede, pues, organizarse del modo siguiente:

(a) Nociones primitivas.
  (1) Obs primitivos (átomos).
  (2) Operaciones (clasificadas por grados).
  (3) Predicados (clasificados por grados).

(b) Postulados.
  (1) Axiomas.
  (2) Reglas deductivas.

Esta formulación disipa algo la vaguedad que es aún inherente a la definición del § B, puesto que la morfología queda formalizada exactamente igual que la teoría. Puede, pues, tomarse esta formulación como la concepción básica; la noción de sistema incompletamente formal es una concesión a necesidades prácticas [52].

El sistema $\mathcal{N}_0$ está completamente formalizado, puesto que su morfología consiste estrictamente en una enumeración de los obs primitivos (el ob 0) y de las operaciones y predicados primitivos, es decir, $'$ (monádica) y $=$ (binario).

---

[52] Cfr. [LLA], pág. 24; [OFP], págs. 36 y sigs.

Serían ejemplos de sistemas formales incompletamente formalizados: (1) un sistema cuya morfología divida los obs en varios «tipos»; (2) un sistema con una regla de sustitución, puesto que esta regla tiene que especificar una clase particular de obs con los cuales pueda practicarse la sustitución [53].

Es admisible que todo sistema formal puede reducirse a un sistema completamente formalizado mediante la introducción de nociones primitivas adicionales, de tal modo que las nociones morfológicas y las auxiliares puedan expresarse en el lenguaje A (introduciendo al mismo tiempo sus reglas en la parte teorética de la estructura primitiva).

La reducción de ciertos tipos generales de sistemas formales a sistemas completamente formalizados es una tarea de la lógica combinatoria. Veremos que esa tarea puede realizarse de tal modo que conduzca a sistemas de estructura estrictamente finita, preservando al mismo tiempo la naturalidad de los sistemas como no pueden hacerlo las reducciones artificiales de § 4.

S. TEMAS SUPLEMENTARIOS

1. Comentario histórico y bibliográfico.

La historia de los métodos formales, en general, cae fuera del presente libro. Nos limitaremos aquí a citar las obras que han tenido un efecto directo y registrable en el desarrollo de nuestras ideas, a mencionar algún material expositivo e histórico que hemos recogido y que nos parece merecer atención, y a indicar en qué puntos el tratamiento dado en el texto a los diversos problemas puede ampliarse en una u otra dirección. Las historias de la matemática y de la lógica pueden suministrar más información. Las citas bibliográficas pueden complementarse mediante las bibliografías generales de [CB], Fraenkel [AST]. Bibliografías más breves, pero también útiles, se encuentran en Wilder [IFM], Kleene [IMM], Beth [SLG], y Church [BBF]. Las dos últimas son especialmente útiles para la historia de la lógica.

Para un tratamiento general de los métodos axiomáticos remitimos a: Hilbert [ADn], [GLG$_7$]; [HB], § 1; Weyl [PMN]; Wilder [IFM], capítulo I-II (contiene referencias); Tarski [ILM], capítulo VI; Kleene [IMM], especialmente páginas 59-72, 246-251; Young [LFC]; Bell [MQS]; Huntington [CTS]; Kershner and Wilcox [AMth]; Dubislav [PMG]; Fraenkel [EML$_3$], capítulo 5 (hay anunciada una reedición inglesa de esta obra); Cavaillès [MAF]. Hay, además, toda una serie de libros de divulgación que no hemos examinado.

La noción de sistema axiomático se desarrolló en el siglo XIX a partir de la idea de sistema deductivo interpretado, tal como queda descrita en § A1. El movimiento fue, sobre todo, importante en geometría, donde culminó con las formulaciones de Pasch, Hilbert, Pieri, Veblen y otros. Para la historia de este movimiento nos remitimos a Nagel [FMC]; Enriques [HDL]; Jørgensen [TFL]; Cavaillès [MAF], capítulo I. Exposiciones más breves se encuentran en las historias de Bell [DMth] y Cajori [HMth]; y también se encuentra alguna referencia en Wilder [IFM] y Kleene [IMM].

---

[53] Para ejemplos de estos casos cfr. los ejemplos 4, 5, 6, 7 de [OFP], cap. V.

Durante los primeros años del siglo XX este movimiento continuó en América en una serie de memorias sobre la aplicación del método axiomático a diversas ramas de la matemática. Ejemplos de estos trabajos son: Dickson [DGF]; Huntington [CTS], [FPA], y varios trabajos citados por Fraenkel [AST]; Veblen [DTO], [SAG], [SRR]; en este período apareció la excelente exposición de Young [LFC]; cfr. también la introducción a Veblen and Young [PGm. I]. El análisis general de E. H. Moore [IFG], expresado en un simbolismo que mostraba claramente la intensa influencia de Peano, usaba métodos postulacionales y epiteoréticos. Hubo, naturalmente, desarrollos análogos en otros países; pero no han tenido la misma influencia directa en este libro.

Hasta el presente hemos considerado la noción de sistema axiomático, un sistema que admite como dada la lógica. Pero es difícil formular la noción de sistema axiomático sin preguntarse casi inmediatamente cómo hay que formular la lógica. (Bôcher [FCM] da un reciente ejemplo de esta transición.) Ya en Boole [MAL] se encuentra una concepción de la formalización sorprendentemente moderna; y en Frege hay una noción estrictamente moderna de sistema sintáctico (cfr. Scholz [WIK]). No entraremos aquí en la historia remota de este desarrollo, sino que nos limitamos a remitir al lector a las obras clásicas de historia de la lógica. La historia remota en cuestión no ha tenido influencia directa en esta obra.

Los *Principia Mathematica* [PM] que aparecieron en 1910 eran un tanto deficientes en cuanto a rigor de formalización (crf. § 0A), pero ejercieron una gran influencia en el desarrollo de la lógica matemática en general. El efecto del libro fue precedido por otros varios trabajos de sus autores (ver citas en §[CB]). El libro dominó más o menos totalmente el tema en Inglaterra y en América durante el primer tercio del siglo XX.

Durante ese período de dominio las nociones de sistema axiomático y de razonamiento formal en general fueron discutidas filosóficamente por varios autores. Puede citarse a los siguientes por alguna influencia, en un momento u otro, en el presente libro: Dodgson [54] [WTS]; Brouwer [IFr]; Lewis [SSL], capítulo VI; Keyser [MPh]; Eaton [STr], capítulo VII; Church [AZA]; Dresden [PAM]; Pierpont [MRP]; Weiss [NSs]; Dubs [NRD]. La obra de Sheffer, tan altamente apreciada por sus discípulos, ha tenido escasa influencia directa a causa de su inaccesibilidad [55]. Debe prestarse especial atención a Lewis *(loc. cit.)*, que obtiene una formulación sintáctica que es estrictamente formal y parece ser del todo independiente de la de Hilbert.

El desarrollo de los métodos formales en el continente europeo empezó dominado en el siglo XX por la escuela de Hilbert y su disputa con los intuicionistas. El desarrollo de las ideas de Hilbert está resumido (con referencias) en Bernays [HUG]; cfr. también Weyl [DHM], Cavaillès [MAF]. En [HB] se tiene una exposición sistemática que se ha hecho clásica. Para detalles de la evolución hay que consultar los trabajos de Hilbert, Ackermann, Bernays y Von Neumann citados en las bibliografías generales. Citaremos como de particular importancia para el presente libro: Hilbert [ADn], [NBM], [Und]; Bernays [PMth], [PEM]; y Von Neumann [HBT]. A la discusión con los intucionistas se debe, sin duda, la precisión de algunas de las ideas; así lo dicen los intuicionistas, como puede verse en Brouwer [IBF], Heyting [MGL]. Para una exposición inteligible de las ideas del intuicionismo cfr. Wilder [IFM], capítulo X; cfr. también Heyting [MGL]. Hay una amplia literatura crítica sobre la discusión Hilbert-Brouwer; citaremos a Hardy [MPr]; Fraenkel [EML_3], § 18; Heyting [MGL], y las referencias generales sobre métodos formales dadas antes. El hilbertismo desembocó en la concepción sintáctica de los métodos formales, que es la versión más admitida corrientemente (cfr. § 2).

La noción de sistema formal expuesta en esta obra es la desarrollada por Curry en

---

[54] Dodgson es anterior al período, pero pertenece en espíritu a él; nosotros lo hemos conocido tardíamente.

[55] Curry recuerda haber visto un ejemplar de Sheffer [GTN] en la biblioteca de la Universidad de Harward, pero casi no recuerda su contenido.

una serie de trabajos. Los principales de la serie, en su orden de redacción (que no es el de publicación), son: [ALS]; [OFP]; [APM]; [TFD], capítulo I; [LLA], capítulo I; resúmenes más breves en [RDN]; [PKR], § 2; [SFL]; temas más especiales en [MSL], [FRA], [LFS], [LMF], [LSF], [DSR] y [TEx]. De esos trabajos, [ALS] debe considerarse caducado; el autor pensaba entonces con critcrios conceptualistas, que más tarde ha considerado irrelevantes; y en aquel momento no estaba influido más que por la corriente angloamericana. El librito [OFP] es el más extenso de la serie de trabajos; aunque publicado recientemente, la mayor parte del mismo estaba escrito en 1939 [56]. Los trabajos posteriores son en su mayor parte condensaciones de partes de [OFP] con modificaciones y revisiones (que en algunos casos han sido esenciales).

En esos trabajos puede encontrarse, del modo siguiente, material suplementario del presente libro: en [OFP] se encontrará una lista de nueve ejemplos de sistemas formales; el noveno de esos ejemplos, que es una formalización de los polinomios ordinarios, está revisado en el apéndice (que data de 1947). Otro ejemplo —formalización de un conjunto de postulados para la teoría de grupos, debido a Dickson [DGF]— está tratado de un modo esencialmente idéntico en [APM], § 3; [TFD], I, § 2, y [LLA], II, § 2. Ejemplos más complejos se encuentran en [FRA] y [LSF]. Algunos ejemplos de epiteoremas (que se discutirán en el capítulo **2**) se encuentran en [OFP], capítulo IX, y [APM] § 6. Para la definición de la matemática y la crítica del intuicionismo y otros puntos de vista idealistas cfr. [OFP], capítulos III y X, y [APM], §§ 2 y 7. Para la ontología y varias representaciones de un sistema formal cfr. [OFP], capítulo VI, y [APM], § 4; la representabilidad de un sistema formal a base de un lenguaje con dos símbolos se muestra en [LLA], apéndice, § 3. La aceptabilidad y la relación de un sistema formal con la realidad se tratan en [OFP], capítulo XI; [APM], § 8, y [TEx]. Las relaciones con la lógica se tratan en [OFP], capítulo XII, y [LLA], introducción; las relaciones con la semiótica (cfr. también § 2) en [OFP], capítulo VIII; [APM], § 5; [MSL]; [LFS]; [LMF]; [LSF]; [LLA], capítulo I, y [SFL].

En el capítulo 7 de este libro se recogerán algunos perfeccionamientos de la concepción del sistema formal debidos a Rosser, mientras que las relaciones con la recursividad no nos ocuparán hasta el segundo volumen.

En su reciente libro [IMM] Kleene utiliza el término de 'sistema formal' en un sentido diverso del utilizado aquí. El sistema formal de Kleene es determinadamente sintáctico. Lo que él llama una aritmética generalizada ([IMM], § 50) es, empero, una clase especial de sistema formal en el sentido de este libro. El libro de Kleene contiene discusiones muy profundas y aclaratorias de los métodos formales. Citaremos aquí, en particular, las siguientes: la explicación de la formalización en las páginas 59-65; la noción de deducción y su análisis, páginas 86-89; la aritmética generalizada de que acabamos de hablar; y las definiciones inductivas, páginas 258-261. El libro es también una fuente importante de información por lo que hace a los métodos epiteoréticos que incluyen la aritmetización.

Los trabajos siguientes afectan también al tema de este capítulo, pero los recibimos demasiado tarde para poder tenerlos en cuenta: Lorenzen [EOL], Heyting [Int], Markov [TAlg-1954]. La segunda edición de Church, [IML], está anunciada, pero no nos ha sido aún accesible.

2. METASISTEMAS

Pasamos en § D5 con unas pocas observaciones por encima de la noción de sistema sintáctico porque la lógica combinatoria, que es nuestro tema esencial, se presenta como sistema abstracto. Pero puesto que la mayor parte de la corriente literatura sobre metodología formal está escrita desde un punto de vista semiótico, será oportuno

---

[56] El manuscrito fue examinado por Kleene en mayo de 1940.

añadir aquí unas cuantas observaciones suplementarias. Por lo que hace a los detalles, nos remitimos a la literatura; pero aquí discutiremos unas cuantas cuestiones en las que nos parece que la literatura necesita amplificación, si no corrección incluso.

Supongamos dado un «lenguaje» $\mathfrak{L}$ en el sentido semiótico generalizado de § D1. Una teoría en la cual las expresiones de $\mathfrak{L}$, o los modos de construirlas (cfr. los «composés» de [LLA], capítulo 1, § 5), se tomen como obs se llama una *metateoría* de $\mathfrak{L}$; si la teoría está formalizada, parcialmente al menos, puede ser llamada *metasistema*. Llamaremos *metalenguaje* (sobre $\mathfrak{L}$) al lenguaje A de un tal metasistema. En la literatura, el término 'metalenguaje' se usa también en el sentido de lo que aquí llamamos «lenguaje U», y hay, por lo común, cierta confusión entre estos dos sentidos (cfr. [LFS], [LMF]).

La consideración de metasistemas es así una parte del estudio de los lenguajes en general. Morris [FTS] (Cfr. Carnap [ISm], página 9) llamó *semiótica* a este estudio, y lo dividió en tres partes. La primera parte, llamada *sintaxis*, trata de las expresiones del lenguaje como objetos físicos, y admite exclusivamente consideraciones que se refieran sólo a la disposición y a las clases de símbolos de que se componen las expresiones. La segunda parte, llamada *semántica*, toma también en consideración las significaciones; la tercera parte, llamada *pragmática*, toma, además, en cuenta el uso concreto del lenguaje.

Lo primero que deseamos subrayar es que la distinción entre sintaxis y semántica no es en modo alguno tan clara como puede parecer por las definiciones respectivas. En la práctica, tal como se usan esos términos, no sólo son un tanto vagos, sino que, sin duda alguna, se solapan en sus significaciones. Basaremos nuestra discusión en Carnap [ISm] y supondremos que el lector conoce esta obra.

Empezaremos por observar —sin molestarnos demasiado por la cuestión de la significación precisa de 'significar' o 'significación'— que el elemento semántico puede introducirse en un lenguaje gradualmente, por así decirlo. Así, por ejemplo, 'sentencia' y 'verdadero' son palabras del lenguaje U originario que tienen significancia en él. Si sabemos que expresiones determinadas de $\mathfrak{L}$ son sentencias, ya sabemos algo semántico sobre $\mathfrak{L}$; y lo mismo, *a fortiori*, si sabemos qué sentencias de $\mathfrak{L}$ son verdaderas. Desde este punto de vista, el lenguaje A de un sistema formal es semántico; por otra parte, en cambio, las categorías de 'sentencia' y 'sentencia verdadera' para un tal lenguaje A son puramente sintácticas. Podemos, pues, tener información semántica que resulta accidental en el mismo sentido en que es accidental una determinada representación de un sistema formal. Así, en algunos ejemplos dados por Carnap [ISm] como semánticos, la noción de L-verdad es sintácticamente definible; y también lo es la verdad ordinaria en los ejemplos dados.

Examinemos ahora más de cerca la significación de 'semántico'. Según Carnap, *loc. cit.*, página 24, un sistema semántico admite tres clases de reglas, a saber, reglas de formación [57], reglas veritativas y reglas de designación. Supongamos que dividimos la semántica en tres partes según las clases de reglas presentes. Si se trata sólo de reglas de formación, hablaremos de *gramática*; si se trata de reglas veritativas, hablaremos de *alethéutica*; si se trata de reglas de designación, hablaremos de *onomática*. Es evidente que un sistema alethéutico tendrá que ser, además, gramatical; y si la designación se entiende en el sentido generalizado de Carnap § 12, entonces Carnap ha mostrado que un sistema onomático es, además, alethéutico. No es seguro que tenga interés el dividir en dos partes ulteriores lo que aquí llamamos onomática (como se sugirió en [LFS] y [LMF]); tampoco está resuelta la posibilidad de considerar dos clases de relación de designación, como ocurre en [SBd], de Frege (cfr. Church [FLS]).

Ahora bien: ¿dónde empieza la semántica? Hay que admitir que existe una rotura grande entre la alethéutica y la onomática; pues al formalizar una metateoría onomática habrá obs que habrá que interpretar como expresiones (o formas de construir

[57] Las reglas de formación dicen qué expresiones son sentencias.

expresiones) y obs cuyas interpretaciones son los designata de esas expresiones, cosa que no ocurrirá al formalizar una teoría alethéutica. Por otro lado, gran extensión de las partes B y C del libro de Carnap se refiere a la alethéutica; particularmente los §§ 9, 14, 18 y algunas otras secciones tratan de teoremas referentes a un sistema alethéutico cualquiera. Este y otros muchos detalles dan la impresión de que Carnap quería incluir la alethéutica en la semántica. Y no vemos por qué razón no debe incluirse entonces también la gramática.

Examinemos ahora el término 'sintáctico'. Carnap lo usa en dos sentidos. El más amplio de ambos corresponde al sentido en el cual hemos usado recientemente la palabra. Este sentido incluye, pues, teorías como las de Post [FRG] y Markov [TAl], así como la teoría de la lambda-conversión de Church al modo como él mismo la expone en [CLC] [58]. Pero Carnap introduce otro sentido más estrecho en las páginas 155 y siguiente de su libro. En este sentido un sistema sintáctico o «cálculo» es un sistema con reglas de formación y reglas de consecuencia. Y puesto que las reglas de consecuencia pueden considerarse como una forma de reglas veritativas (cfr. [LFM], página 351), un tal sistema es alethéutico. Es la réplica sintáctica de un sistema logístico semiformal.

Todo esto indica que es deseable una nueva definición de algunos conceptos semióticos básicos. Nosotros proponemos usar 'sintaxis' y 'semántica' en los sentidos amplios que acabamos de decir. La semántica incluye entonces la gramática, la alethéutica y la onomática. Un sistema sintáctico puede entonces ser semántico o no, y en circunstancias determinadas puede pertenecer a cualquiera de las dimensiones de la semántica (incluso a la onomática, cuando la información propiamente onomática sea accidental). Los sistemas considerados por Carnap en la parte B (por lo menos §§ 9, 14, 18, etc.) son alethéuticos y sintácticos (cfr. [LSF]), como los de la parte D. No distinguimos entre esas dos formas de sistemas alethéuticos, aunque el último podría llamarse deductivo y el primer tipo esquemático —porque las reglas son todas esquemas de axiomas—. La misma distinción puede hacerse para sistemas formales en general, pero es poco probable que sea fundamental. Un sistema puede formularse en forma esquemática si —y sólo si— es decidible. (Cfr. ejemplos 3-5 de [OFP], capítulo V.)

Hemos visto en § D5 que sistema formal y sistema sintáctico son nociones esencialmente equivalentes. Para más detalles sobre esto y discusión de sus ventajas relativas puede verse las referencias del final de § 1. Como ya se ha dicho, la mayor parte de la literatura usual sobre metodología formal se refiere a sistemas sintácticos sólo parcialmente formalizados; toda ella podría convertirse en una literatura sobre sistemas formales con sólo completar la formalización y suprimir el lenguaje-objeto.

Las referencias siguientes se refieren a los aspectos de la semiótica que son de interés desde el punto de vista de los sistemas formales. Para semiótica en general cfr. Morris [FTS], [SLB]; Carnap [ISm], [FLg]. Para sintaxis en especial cfr. también Carnap [LSL]; Lewis [SSL], capítulo VI; Scholz [WIK]; Tarski [ILM]; Quine [CBA]; Rosenbloom [EML], páginas 152-193, 205-208 (describe el trabajo de Post, el cual muestra a su vez influencia de Lewis). La «teoría de los algoritmos», desarrollada por Markov y su escuela, se trata brevemente en Markov [TAl-1951] y más extensamente en [TAl-1954]; este último trabajo no nos ha llegado a tiempo para poder tenerlo en cuenta. Para la formalización de la sintaxis cfr. también Tarski [BBO]; Hermes [Smt]; Schröter [AKB], [WIM]. Para cuestiones metodológicas cfr. también Tarski [FBM], [GZS]. El texto esencial sobre la definición semántica de la verdad por Tarski es el trabajo de éste [WBF]; cfr. también McKinsey [NDT]. El término 'gramática' se introdujo en [MSL]; para la sustancia temática del mismo cfr. Adjukiewicz [SKn]; también, [FPF], [TFD], capítulo I; Bochenski [SCt]; Bar-Hillel [SCt]. Para las nociones de lenguaje U, lenguaje A y metalenguaje cfr., especialmente, [LFS], [LMF], [TFD]: estos trabajos y [MSL] deben consultarse también para el desarrollo de las ideas aquí

---

[58] En nuestro capítulo 3 se expone como sistema formal.

esbozadas a propósito de la subdivisión de la semiótica. No se incluyen aquí trabajos acerca de la teoría filosófica de la significación, argumentaciones en favor o en contra del nominalismo, etc. [58a].

3. Sistemas formales y nominalismo

En lo que precede hemos hecho varios esfuerzos por mostrar que la noción de sistema formal puede entenderse desde varios puntos de vista filosóficos diversos. Aquí vamos a considerar cierto punto de vista filosófico extremo, el nominalismo, para el cual la noción de sistema formal requiere cierta modificación.

Hemos visto que un sistema formal puede interpretarse a base de las expresiones bien formadas de un determinado lenguaje-objeto. Pero, desde el punto de vista nominalista, incluso la noción de expresión —en el sentido del término «diseño de expresión» de Carnap [59]— es un concepto abstracto, puesto que se pueden tener diferentes ejemplos de una misma expresión. Se le sustituye entonces por la noción de *inscripción*, que es un ejemplo concreto material de una expresión. Los diferentes ejemplos de una expresión son entonces diferentes inscripciones; pero podemos decir que son semejantes, o *equiformes* (lo que traduce el «gleichgestaltet» de Leśniewski).

Así, pues, desde un punto de vista nominalista podemos considerar un ob como una categoría de inscripciones bien formadas semejantes. Llamemos *cob* un ejemplo concreto particular de un tal ob. Podemos entonces imaginar una máquina capaz de imprimir una serie de cobs estandardizados en una cinta de papel, por ejemplo. Cuando una regla de formación permite la construcción de un ob a partir de obs previos la máquina usa para este fin obs que sean equiformes con cobs estandardizados y previamente impresos en la cinta. De este modo un ob puede identificarse con un cob *standard*, y los ejemplos de ese ob pueden identificarse con cobs equiformes.

Todo esto impone algunos cambios en la descripción del sistema formal en el lenguaje U. Otros cambios análogos hay que hacer también. Pero todas esas modificaciones son más bien triviales y pueden realizarse sistemáticamente. No hay, pues, dificultad alguna para describir un sistema formal con términos aceptables desde el punto de vista nominalista.

Más interesante es la cuestión de la interpretabilidad nominalista del lenguaje-objeto de un tal sistema formal. La cuestión es de especial importancia para la teoría de combinadores, la cual incluye obs primitivos tales como K y S (cfr. capítulos 5-7), cuyas interpretaciones conceptuales son nociones de alto grado de abstracción. Pero la presencia de términos abstractos no basta para hacer que una teoría sea inaceptable desde el punto de vista nominalista. Es por el contrario, presumible que, dada una teoría cualquiera $\mathfrak{S}$, podamos encontrar una teoría $\mathfrak{S}'$, basada en la teoría de los combinadores y que sea equivalente a $\mathfrak{S}$ (en un sentido que no intentaremos ahora precisar). Aceptando esto como principio heurístico, entonces, si existe alguna teoría que sea aceptable desde el punto de vista nominalista, habrá una equivalente a ella basada en la

---

[58a] (Añadida en galeradas). Remitimos a ulteriores publicaciones ciertas correcciones a este artículo provocadas por hechos ocurridos durante la impresión del libro. De todos modos, es obligatorio mencionar los puntos siguientes: para referencias de orientación histórica más ricas que las dadas aquí (cfr. prólogo) v. Church [IML_2]. El solapamiento entre la sintaxis y la semántica está reconocido por Tarski en [WBF]. La discusión de Church *(loc. cit.)* nos convence de que es muy improbable que pueda hacerse una distinción razonablemente tajante respecto de una metateoría no-formalizada. La distinción puede, en cambio, concebirse respecto de un metasistema formal en el sentido en que lo hemos definido aquí; pero la epiteoría de un metasistema sintáctico puede seguir siendo semántica.

[59] Leśniewski usó un término parecido (cfr. Tarski [WBF], págs. 267-269, notas 3 y 5).

teoría de combinadores. Admitimos que la cuestión de la interpretación nominalista de una tal teoría supone nuevos problemas; pero no nos parecen irresolubles.

El criterio propuesto por Quine [Unv] para examinar el «compromiso ontológico» de una teoría basada en el cálculo de predicados de primer orden es la naturaleza de los objetos que pueden ser valores de las variables ligadas; las variables libres no ofrecen dificultad alguna. Pero este criterio no es aplicable a teorías basadas en la teoría sintética de combinadores, pues en esta teoría no hay variables de ninguna clase. La generalidad, ya sea expresada ordinariamente por variables ligadas o por variables libres, tiene que expresarse en lógica combinatoria mediante cuantificadores explícitos. Para aplicar el criterio de Quine hay que apelar, pues, a algún tipo de traducción, y no está del todo claro cómo puede practicarse tal traducción.

Aunque consideramos prematuro el intentar dar ya una respuesta definitiva a esta cuestión, sugerimos la solución siguiente a título de ensayo: el cuantificador universal, o algo esencialmente análogo, se usará para el tipo de generalidad ordinariamente expresado mediante variables libres; y necesitamos este tipo de cuantificador para expresar de un modo finito los axiomas y las reglas de la teoría traducida. Pero las reglas de introducción del cuantificador existencial no son necesarias en este estadio fundamental, y probablemente exigen en cualquier caso restricciones para evitar la contradicción. Es, por tanto, natural establecer la separación de caminos en el punto en el cual se introduce un cuantificador existencial. En las teorías originarias de Church, y en el sistema de teoría de conjuntos de Cogan [FTS], el cuantificador existencial Σ se introduce de tal modo que implique la existencia de conjuntos u otros objetos abstractos; por tanto, estas teorías no son aceptables desde el punto de vista nominalista. Pero no vemos razón alguna que excluya por principio la posible construcción de teorías aceptables desde el punto de vista nominalista.

La cuestión no se nos presentará en este volumen porque no tendremos en él cuantificador existencial. Por tanto, y excepto por lo que hace a este artículo informativo, no prestaremos atención a las exigencias del nominalismo. Es muy posible que la manera conceptualista de hablar que utilizamos en este libro sea traducible a un discurso nominalista. Pero dejamos abierta la cuestión de cómo puede llevarse a cabo tal traducción.

Para teorías nominalistas en general nos remitimos a Goodman [SAp] y a varios trabajos de Quine recogidos en su [LPV] [60].

---

[60] Debemos a P. C. Gilmore varias sugerencias en relación con lo anterior; pero él no es responsable de las opiniones expuestas.

Epiteoría

No estudiamos los sistemas formales simplemente para derivar teoremas elementales uno tras otro. Una vez definido con precisión el sistema podemos hablar con sentido de él con los medios del lenguaje U. Para indicar ese tipo de estudio del sistema formal, que va más allá de la derivación sucesiva de los teoremas elementales, utilizaremos el prefijo 'epi-', y hablaremos de *epiteorías*, *episistemas*, *epienunciados* y de *epiteoremas* en un sentido que resulta obvio [1]. En este capítulo estudiaremos procesos epiteoréticos desde un punto de vista general. Además de discutir la naturaleza de la epiteoría estableceremos convenciones y derivaremos resultados que serán útiles más adelante.

A. LA NATURALEZA DE LA EPITEORIA

Por definición, un epiteorema es un teorema *sobre* un sistema formal, y no, por tanto, un teorema elemental *del* sistema formal. Para obtener una idea de la naturaleza de un tal teorema empezaremos por considerar algunos ejemplos aclaratorios. Luego discutiremos las condiciones en las cuales un tal epiteorema tiene sentido desde el punto de vista constructivo. En § 4 discutiremos la naturaleza de las definiciones.

1. Ejemplos de epienunciados

Vamos a dar unos cuantos ejemplos, sin preocuparnos, por de pronto, de lo que significan estos enunciados, es decir, de cómo deben exponerse sus condiciones veritativas, o condiciones de verdad. A menos que se indique otra cosa, los ejemplos se refieren al sistema $\mathcal{N}_0$ (§ 1A3) [2].

[1] Hasta 1950 se usó en este sentido el prefijo 'meta-'. Pero eso suponía cierta confusión con el uso de ese prefijo en relación con el metalenguaje (cfr. § S1).

[2] Para otros ejemplos cfr. [OFP], cap. IX; [APM], § 6.

a. Enunciados formados con un número finito de proposiciones elementales, mediante las habituales conectivas proposicionales. Por ejemplo:

$$0' = 0' \text{ y } 0 = 0,$$
$$\text{si } 0 = 0', \text{ entonces } 0'' = 0,$$
$$0 \neq 0,$$

leyéndose, naturalmente, el signo '$\neq$' como «no es igual a».

b. Proposiciones que incluyen generalizaciones respecto de los obs. Las mismas reglas deductivas son de este carácter; otros ejemplos:

$$\text{si } x \text{ es un ob, entonces } x = x,$$
$$\text{si } x = y, \text{ entonces } x'' = y''.$$

El segundo de esos ejemplos es un caso de *regla derivada*, o auxiliar.

c. Enunciados que incluyen generalizaciones respecto de los teoremas elementales. Tales son todas las condiciones necesarias de la validez, por ejemplo:

$$\text{todo teorema elemental es de la forma } a = a.$$

d. Propiedades generales del sistema tomado como un todo, como la consistencia, la completitud, la decidibilidad, etc.

e. Propiedades que incluyen extensiones del sistema de un modo u otro. Un sistema puede extenderse o ampliarse: 1) mediante el añadido de átomos nuevos que constituyen una *extensión de los obs* (a veces *de los átomos*); 2) mediante el añadido de nuevos postulados que constituyan una *extensión de los enunciados* (y cuando los postulados añadidos sean axiomas se tratará de una *extensión de los axiomas*); o 3) mediante alguna combinación de esos métodos. Por ejemplo, supongamos que añadimos al sistema los postulados:

$$0 = 0',$$
$$\text{si } a = b \text{ y } b = c, \text{ entonces } a = c.$$

Así conseguimos un sistema en el cual el predicado $=$ tiene las propiedades corrientemente atribuidas a '$\leq$'.

La extensión mediante definiciones es de particular importancia. Incluiremos como definiciones no sólo las corrientes definiciones «explícitas», sino también las de carácter recursivo. Así, por ejemplo, los teoremas de la aritmética recursiva son epiteoremas del sistema $\mathcal{N}_0$. Volveremos a hablar de las definiciones en § 4.

f. Más en general: relaciones del sistema con otros sistemas, incluyendo si se quiere sus propios subsistemas o extensiones, o proyecciones de un sistema en otro, etc., entre esos otros sistemas a relacionar con el primero. Dado un sistema $\mathfrak{S}$, siempre que usamos subíndices numéricos para indicar una secuencia X_0, X_1, X_2 ... de obs de $\mathfrak{S}$, estamos, en realidad, formando una proyección de los obs del sistema $\mathscr{N}_0$ en $\mathfrak{S}$. Esta es, naturalmente, una de las aplicaciones más simples de esta idea. Por el proceso de aritmetización todo sistema formal puede proyectarse sobre los obs de $\mathscr{N}_0$.

g. Relaciones de un sistema con sus interpretaciones, contentivas o de otro tipo; el estudio de sus modelos; las definiciones de verdad y otros temas análogos. Las investigaciones de este tipo son de gran importancia en la lógica moderna.

2. Constructividad

Antes de distinguir los criterios de verdad para epienunciados vamos a distinguir de los demás una clase de epiteoremas a los que llamaremos constructivos. Estos teoremas se caracterizan por la exigencia siguiente: la demostración de un epiteorema constructivo tiene que mostrar de un modo determinado cómo puede realizarse, efectivamente, la demostración formal de cualquier caso especial. En este sentido la demostración del teorema de completitud del cálculo de predicados de primer orden por Gödel [VAL] es no-constructiva; mientras que su famoso teorema de incompletitud [FUS] es constructivo.

Todos los epiteoremas considerados en este libro son constructivos. Es necesario subrayar este hecho. El desarrollo de la lógica combinatoria se basa desde el primer momento en el uso de poderosos métodos epiteoréticos. El hecho de que las demostraciones sean constructivas es un hecho esencial. Aunque el detallar las instrucciones que permiten obtener una demostración formal de un determinado caso especial puede ser una tarea larga y tediosa, tal vez incluso demasiado larga para una vida humana, lo importante es que sea, en principio, posible, y esta posibilidad representa el criterio concluyente de la validez. De este modo los epiteoremas constructivos participan del carácter objetivo de los teoremas elementales [3].

[3] Para más observaciones sobre este punto cfr. [GKL], pág. 518; [AVS], pág. 385.

3. Criterios de la verdad.

Los ejemplos de § 1 tienen un carácter muy variado; y no podemos esperar que sea posible especificar los criterios veritativos o de verdad para los epienunciados de un modo tan sencillo como hicimos para los epienunciados elementales del capítulo 1. Para especificar detalladamente los nuevos criterios tenemos que considerar por separado las varias clases de epienunciados. En las últimas secciones de este capítulo lo haremos para varias clases de epienunciados. Ahora consideraremos algunos casos sencillos y algunos principios generales.

Para algunos casos de epienunciados puede ocurrir que resulte mostrable que son equivalentes a enunciados elementales de algún otro sistema formal. Puede incluso ocurrir que este segundo sistema formal sea idéntico al primero. Así, por ejemplo, refiriéndonos al sistema $\mathcal{N}_0$, podemos definir $a \equiv b$ como significando que a y b son el mismo ob; entonces se tiene que el epienunciado $a \equiv b$ es equivalente al enunciado elemental $a = b$ [4]. Si en un caso así el enunciado es preciso y determinado podemos incluso decidirnos a prescindir, si nos conviene, del enunciado elemental. Más concretamente: tratándose de un sistema formal decidible puede suprimirse la teoría propiamente dicha y considerar el sistema como mera morfología [5]. Por otro lado, cuando el epienunciado es vago, ese proceso de formalización es un eficaz método de explicación precisa del epienunciado.

En [TFD] se hace un estudio de este tipo para *enunciados compuestos*, es decir, de los tipos a-b del § 1 de este capítulo. La necesidad de este estudio puede hacerse patente considerando la negación de un enunciado elemental. Desde un punto de vista constructivo es, sin duda, cosa necesitada de explicación. Si la explicamos diciendo que significa que el enunciado elemental negado es diferente de cualquier teorema elemental (llevando, pues, la cuestión al tipo de epienunciados c de § 1), entonces, el epienunciado es no-constructivo a menos que el sistema sea demostrablemente consistente. Por tanto, también la implicación y la disyunción, si se definen de un modo clásico, son no-constructivas. La teoría de [TFD] muestra que, para una clase restringida de sistemas formales, podemos definir constructivamente esos y

---

[4] Un ejemplo menos trivial puede ser, en el álgebra proposicional, la equivalencia entre el enunciado elemental $\vdash P$ y el epienunciado «P es una tautología». Respecto de todo sistema formal decidible existe una situación análoga. Cfr. [OFP], ejemplos 3-5.

[5] Cfr. las observaciones sobre sistemas aberrantes en § 1B1.

otros conceptos relacionados con ellos; quedamos para ellos remitidos al cálculo intuicionista (Heyting). Esta teoría es aplicable a la lógica combinatoria. Pero las aplicaciones son tan sencillas que es conveniente tratarlas directamente en § B.

4. Definiciones

Aunque algunas cuestiones relativas al análisis de las definiciones pertenecen a secciones posteriores es necesario tratar aquí el tema para poder usar la técnica correspondiente.

Consideramos la definición de un nuevo símbolo nominal como la introducción de un ob nuevo, el *definiendum* (cuyo nombre es ese símbolo), junto con un axioma que le pone en relación con un ob ya poseído, el *definiens*, mediante una relación de *identidad* que simbolizamos con el infijo '$\equiv$'. De modo análogo tratamos la definición de ciertas combinaciones nominales, como introducción de una nueva operación (cfr. § B2). Si las definiciones se hacen correctamente, después de cualquier serie de definiciones, por complicada que sea, una serie inversa y terminada de reposiciones de definienda por definientia trasformará un ob A del sistema ampliado en un solo ob B del sistema originario. Llamaremos a B el *definiens terminal* de A.

Postulamos, además, por el momento, que $\equiv$ tiene las propiedades de la identidad en el sistema ampliado; así, para dos obs cualesquiera A y B del sistema ampliado,

$$A \equiv B$$

valdrá si —y sólo si— A y B tienen el mismo definiens terminal. En § E mostraremos que con este expediente no se pierde rigor.

Pues que este proceso hace de $\equiv$ una relación entre obs, usaremos uu infijo diferente '$\rightleftarrows$', para definir conceptos predicativos. Definimos análogamente las nociones de definiendum, definiens y definiens terminal. Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son enunciados, entonces el enunciado [6]

$$\mathfrak{A} \rightleftarrows \mathfrak{B}$$

significará que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son equivalentes por virtud de definiciones, es decir, que tienen el mismo definiens terminal.

---

[6] Obsérvese que utilizamos '$\mathfrak{A}$' y '$\mathfrak{B}$' simultáneamente como sentencias y como nombres de enunciados. Creemos que este doble uso no tiene peligros (cfr. la observación al final de § 1D5).

Las definiciones, del tipo que sea, no son necesariamente permanentes. En la práctica, cuando tenemos una formulación de una regla u otro epiteorema general en el que 'X' se usa para indicar un ob sin especificar (cfr. § C1) y deseamos especializar esa regla para el caso en el cual X es un ob particular, A, podemos escribir '$X \equiv A$'; y ésta es una definición que puede cambiarse por otra, pocas líneas más tarde.

Como es obvio, el efecto de las definiciones consiste en fijar la significación del nuevo símbolo introducido. Pero en esto no difieren de las demás convenciones de la estructura primitiva (cfr. § 1D4).

B. TECNICAS DE INDUCCION

En esta sección trataremos algunos procesos epiteoréticos relacionados con las clases inductivas. Suponemos que estamos tratando con un sistema completamente formalizado; con unas cuantas modificaciones, la discusión puede ampliarse hasta abarcar otros sistemas, pero no dedicaremos atención a este punto. En § 5 se exponen puntos de notación, y aunque algunas notaciones no se refieren al tema de esta sección es conveniente tratarlas al mismo tiempo que otras nociones análogas referentes al mismo.

1. Construcciones

Sea $\mathfrak{X}$ la clase inductiva definida por ciertos elementos iniciales $\mathfrak{A}$ y ciertos principios genéticos $\mathfrak{P}$. Lo que decimos en este artículo se aplica indiferentemente a cualquiera de los casos siguientes: 1) los elementos de $\mathfrak{A}$ son obs, y $\mathfrak{P}$ consta de reglas de formación del cierre de una operación respecto de argumentos dados; o 2) los elementos de $\mathfrak{A}$ son enunciados, y $\mathfrak{P}$ consta de reglas de inferencia. Para mayor concreción usaremos un lenguaje adecuado a la primera de esas dos posibilidades, entendiéndose que mediante un cambio de terminología adecuado puede incluirse también la segunda (cfr. § 3).

Si X está en $\mathfrak{X}$, entonces, por definición de clase inductiva, existe por lo menos una secuencia $Y_1, \ldots, Y_n$ tal que Y_n es X y cada Y_k o bien está en $\mathfrak{A}$ o bien está formado a partir de alguno de su predecesores mediante la aplicación de una operación de $\mathfrak{P}$. Llamaremos a una secuencia así: *secuencia constructiva de X a partir de $\mathfrak{A}$ por medio de $\mathfrak{P}$*. $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ son los *términos* de dicha secuencia constructiva.

Sea $\mathfrak{C}$ una tal secuencia constructiva. Asociaremos a $\mathfrak{C}$ un diagrama $\mathfrak{E}$ al que llamaremos *diagrama arborescente*. Este constará de *nodos*

enlazados de un modo determinado; habrá un único nodo último, y todo nodo distinto de este último estará enlazado con otro, y sólo uno, inferior a él (situado debajo de él); éstos serán todos los enlaces; además, para todo nodo que no sea un nodo inicial estará especificada la operación de $\mathfrak{P}$ que da lugar al mismo. Estos nodos corresponden a los términos de $\mathfrak{C}$ del modo siguiente: el nodo último corresponde a X; y si un nodo corresponde al cierre de una operación los nodos enlazados con éste desde arriba corresponderán a los argumentos del cierre, tomados de izquierda a derecha, y la operación indicada será la usada en dicho cierre. Los nodos son notaciones de los términos correspondientes. Por tanto, los nodos iniciales corresponden a objetos de $\mathfrak{A}$. En la práctica construiremos $\mathfrak{C}$ del modo siguiente: trazaremos una línea por encima de todo nodo que no sea inicial; por encima de esta línea, y de izquierda a derecha, pondremos los nodos que hay que enlazar con el nodo dado desde arriba; y junto a la extremidad derecha de la línea escribiremos una indicación de la operación que hay que hacer para el cierre correspondiente. Por ejemplo, si se trata de construir $(a \times b) + (a \times c)$ a partir de a, b, c, d mediante las operaciones $+$, $\times$, el diagrama arborescente tendrá el siguiente aspecto:

(1)
$$\cfrac{\cfrac{a \quad b}{a \times b} \times \quad \cfrac{a \quad c}{a \times c} \times}{(a \times b) + (a \times c)} +$$

Esto corresponde a cualquiera de las secuencias constructivas siguientes:

(2) $a, b, c, a \times b, a \times c, (a \times b) + (a \times c)$;
$a, d, c, c \times d, b, a \times c, (a \times c) + (a \times c), a \times b, (a \times b) + (a \times c)$;
$a, b, a \times b, a, c, a \times c, (a \times b) + (a \times c)$.

Como hemos visto en este ejemplo, varias secuencias constructivas diferentes pueden corresponder al mismo diagrama arborescente. Pero, evidentemente, el diagrama arborescente corresponde más a lo que podríamos llamar un proceso de construcción y corresponde a ello mejor que una secuencia. Las diferencias entre secuencias correspondientes al mismo diagrama arborescente son en lo esencial diferencias en el orden de ejecución de operaciones [7], y esas diferencias no afectan a la estructura del producto final más que las diferencias entre los posibles órdenes de poner los ladrillos al edificio mismo. Por eso diremos que esas se-

[7] Incluyendo la inserción de operaciones inútiles (cfr. el segundo ejemplo de (2)).

cuencias pertenecen todas a la misma *construcción*[8] *de X a partir de* $\mathfrak{A}$ *por medio de* $\mathfrak{P}$. Podemos especificar una construcción dando el diagrama arborescente o una de las secuencias constructivas con aclaraciones. En el último caso es algunas veces conveniente usar una secuencia llamada *secuencia constructiva normal* y que se obtiene del diagrama tomando los términos en un orden unívocamente determinado por las condiciones siguientes: 1) los argumentos de cualquier cierre tienen que tomarse antes que el cierre mismo; 2) todos los argumentos situados a la izquierda de un argumento dado tienen que tomarse antes que éste; 3) las repeticiones tienen que tomarse tal como se presentan y como si fueran términos distintos. Según esto, la última secuencia de (2) es la secuencia constructiva normal de la construcción (1). Hay, evidentemente, una correspondencia biunívoca entre construcciones y secuencias constructivas normales (con análisis).

En el caso de la construcción (1) toda esta elaboración era superflua porque la notación usada determinaba la construcción de un modo unívoco. Lo mismo ocurre con otras varias notaciones que son corrientes en lógica y en matemática. Estas notaciones son, por tanto, otros expedientes útiles para representar construcciones. Pero en la aplicación que se verá en § 3 la notación corrientemente usada no da indicación alguna acerca de la naturaleza de la construcción.

Dada una construcción $\mathfrak{C}$ de X a partir de $\mathfrak{A}$ por medio de $\mathfrak{P}$, y un diagrama arborescente $\mathfrak{E}$ asociado a $\mathfrak{C}$, se establecen aquí, para fines de referencia, las siguientes convenciones que son útiles en varias secciones técnicas de esta obra (identificando los nodos con los términos a los que corresponden). Llamamos a $\mathfrak{A}$ una *base* y a X el *término* de $\mathfrak{C}$. Los miembros de $\mathfrak{A}$ que efectivamente aparecen como nodos en $\mathfrak{E}$ se llaman *data* de $\mathfrak{C}$. Una *rama* de $\mathfrak{E}$ es una secuencia de nodos formada partiendo de un datum y tomando como sucesor de cada nodo el nodo (único) enlazado con él por abajo; un nodo Y está *encima* de un nodo Z (y Z está *debajo* de Y) si Y y Z se encuentran en una misma rama y Z aparece después (o sea, debajo) de Y en la secuencia. Por último, si Y es un nodo, los nodos que están encima de Y, junto con Y mismo, constituyen una construcción que termina en Y; llamamos a esta construcción la *construcción* de Y determinada por $\mathfrak{C}$.

En algunas aplicaciones en las que el argumento de la izquierda tiene una situación especial utilizamos, además, las siguientes conven-

---

[8] Dos construcciones son, pues, diferentes si difieren en algún aspecto del diagrama arborescente, incluida la formulación de las operaciones. Con esto exigimos prácticamente que toda construcción se acompañe por un análisis en el sentido de Kleene [IMM], págs. 87 y 234.

ciones. En cualquier operación el primer argumento (el que está más a la izquierda) se llama *argumento mayor*, y los demás, *menores*. La rama obtenida partiendo del extremo inferior y tomando en cada paso ascendente el argumento mayor es la *rama principal*; el datum inicial de la rama principal es el *datum principal*. Las otras ramas se llaman entonces *ramas colaterales*, y los data correspondientes se llaman *data colaterales*; se considera que las ramas colaterales terminan donde desembocan en la rama principal. A veces llamamos *construcción colateral* a la construcción basada en un argumento menor.

Toda notación indicativa de una construcción puede aplicarse con algunos data (o, más generalmente, con algunos elementos de $\mathfrak{A}$) sin especificar, o especificados en base a parámetros indeterminados [9]. De este modo podemos definir nuevas operaciones (§ 2) o derivar reglas nuevas (§ 3). El procedimiento es análogo al uso de variables en matemáticas y no supone principios que no sean necesarios para la formulación de las reglas de deducción misma. (Cfr. § C1).

2. Combinaciones

Consideremos ahora el caso en el cual para la clase $\mathfrak{X}$ de § 1 $\mathfrak{A}$ es una clase de obs de un sistema formal $\mathfrak{S}$, y $\mathfrak{P}$ son las reglas de formación del cierre de una clase de operaciones $\mathfrak{O}$, que forman obs a partir de obs. En este caso llamaremos a $\mathfrak{X}$ las *combinaciones de* $\mathfrak{A}$ por medio de $\mathfrak{O}$. Se trata obviamente de una clase de obs.

Si $\mathfrak{A}$ consta de los átomos de $\mathfrak{S}$ y $\mathfrak{O}$ de las operaciones primitivas, entonces las combinaciones de $\mathfrak{A}$ por medio de $\mathfrak{O}$ son precisamente los obs de $\mathfrak{S}$. Deseamos, empero, incluir otros casos. La clase $\mathfrak{A}$ es una clase arbitraria (pero determinada) de obs; no es, pues, necesario que incluya todos los átomos, y puede perfectamente contener obs que no sean átomos. $\mathfrak{O}$, a su vez, puede contener también operaciones definidas. Como vimos en el § 1, una operación de grado *n* puede definirse describiendo, para argumentos sin especificar, la construcción del cierre de la operación con los argumentos (y acaso, además, con determinados obs especificados) mediante las operaciones primitivas (o mediante operaciones previamente definidas). Pero hasta podemos incluir en $\mathfrak{O}$ operaciones definidas por algún otro método epiteorético.

La restricción de § 1B1 —que no hay más que un proceso de construc-

---

[9] Obsérvese que la estructura del diagrama arborescente y el «análisis» es uniforme para todos los valores de los parámetros. Cfr. Kleene [IMM], pág. 234.

ción para un ob cualquiera— se interpretará en el sentido de que no hay más que una construcción para un ob cualquiera a partir de los átomos y por medio de las operaciones primitivas. Consecuentemente, cuando los $\mathfrak{A}$ son átomos y las $\mathfrak{O}$ son primitivas no hay más que una construcción única para cualquier combinación; y, por tanto, las combinaciones pueden considerarse como los obs de un subsistema determinado de $\mathfrak{S}$. En el caso general esto no será siempre verdadero. Por ejemplo, refiriéndonos a § 1A3, 0''' es una combinación de 0 y 0' por medio de (—)', o bien una combinación de 0 por medio de (—)' y ((—)')'; en cualquiera de los dos casos hay dos construcciones distintas. Las condiciones bajo las cuales la construcción es única nos ocuparán en § E7.

Una combinación de $\mathfrak{A}$ por medio de $\mathfrak{O}$ que no sea una combinación de ningún subconjunto propio de $\mathfrak{A}$ se llamará una *combinación propia.*

Para el caso contemplado en este artículo se usarán ocasionalmente las siguientes adiciones a la terminología de las construcciones. Una combinación Y que se presente como nodo en una construcción de X se llamará una *componente* de X; una componente distinta de X mismo se llamará *componente propia.* Si Y es una componente, habrá al menos una rama que termina en X y pasa por Y; la secuencia formada con esta rama borrando todos los términos por encima de Y se llamará una *composición de Y a X por medio de* $\mathfrak{O}$.

3. Deducciones

En el caso de que el $\mathfrak{A}$ de § 1 sea un conjunto de enunciados elementales $\mathfrak{B}$ y el $\mathfrak{P}$ un conjunto de reglas de inferencia $\mathfrak{R}$, el conjunto $\mathfrak{X}$ se llamará conjunto de las *consecuencias de* $\mathfrak{B}$ *por medio de* $\mathfrak{R}$. Tomamos entonces toda la terminología de § 1, cambiando 'construcción' por '*deducción*' y 'datum' por '*premisa*'. Los demás términos de § 1, como 'secuencia', 'diagrama arborescente', 'nodo', 'normal', 'base', 'término', 'rama', 'encima' y 'debajo' pueden tomarse sin cambio alguno. Pero el término de una deducción se llamará también *conclusión* de la misma.

Llamaremos *derivación* a una deducción realizada a partir de los axiomas de un sistema formal por medio de las reglas deductivas de la estructura primitiva. La conclusión de una derivación es por definición un teorema elemental; además, todos los teoremas elementales se obtienen de ese modo. Una deducción respecto de esas mismas reglas primitivas es, naturalmente, una derivación de la extensión proposicional (§ A1e) obtenida añadiendo la base a los axiomas.

Si realizamos (con símbolos) una argumentación que tenga la forma

de una deducción, excepto en que algunos de los nombres de la base se consideren nombres de obs sin especificar, entonces la argumentación nos da una deducción para cualquier asignación de obs a dichos nombres. Es conveniente ampliar el término 'deducción' de modo que incluya también tales argumentaciones. Una tal deducción variable constituye una demostración constructiva de una regla derivada. Así, por ejemplo, la argumentación

$$\frac{\dfrac{x = y}{x' = y'}}{x'' = y''}$$

tomada relativamente al sistema del § 1A3, sin más regla aplicada que la única regla deductiva de aquel sistema, es una demostración del segundo ejemplo mencionado en § A1b.

4. Demostraciones por inducción

A toda clase inductiva corresponde un método de demostración por inducción. Sea $\mathfrak{X}$ como se dijo en el § 1, y supongamos que se ha establecido constructivamente: 1) que todo elemento de $\mathfrak{A}$ tiene una propiedad determinada; 2) que cada uno de los principios genéticos $\mathfrak{P}$ lleva de elementos que tienen esa propiedad a otro elemento que también la tiene. Estos dos pasos juntos bastan para construir una demostración constructiva de que todo X de $\mathfrak{X}$ tiene la propiedad en cuestión. Los dos pasos se llaman a veces [10], respectivamente, *paso básico* y *paso inductivo* de la demostración. Hay tres clases principales de demostraciones por inducción, a saber:

a. *Inducción estructural*

Consiste en mostrar que un epiteorema vale para todos los obs (o, más en general, para todas las combinaciones de ciertos obs básicos), por el procedimiento de mostrar: 1) que vale de los elementos básicos; y 2) que es invariante respecto de las operaciones. Demostremos, por ejemplo, que

(3) $$x = x$$

[10] Seguimos aquí la terminología de Kleene [IMM], pág. 22.

vale para toda cifra o numeral del sistema $\mathcal{N}_0$. Para el paso básico se tiene $x \equiv 0$, y en este caso (3) es un axioma. Para el paso inductivo suponemos $x \equiv y'$ e $y \equiv y$; (3) se sigue por la regla.

b. *Inducción deductiva*

Consiste en mostrar que todas las consecuencias de ciertos enunciados básicos tienen una determinada propiedad, por el procedimiento de mostrar: 1) que los enunciados básicos tienen esa propiedad; y 2) que si las premisas de una regla tienen la propiedad, también la tiene la conclusión. Así, por ejemplo, demostramos que todos los enunciados elementales de $\mathcal{N}_0$ son de la forma (3). Para el paso básico nos limitamos a observar que el único axioma es de la forma (3), siendo $x \equiv 0$. Para el paso inductivo suponemos que la premisa de la regla única es $y = y$; la conclusión es entonces $y' = y'$, que es de la forma (3), con $x \equiv y'$.

c. *Inducción natural*

Esta es la «inducción matemática» ordinaria. Se presenta cuando demostramos que una cierta propiedad $\mathfrak{P}(n)$, definida para todo número natural n, vale para todo n. El paso básico consiste en demostrar $\mathfrak{P}(0)$; el paso inductivo consiste en inferir $\mathfrak{P}(n+1)$ partiendo de $\mathfrak{P}(n)$. Como los números naturales pueden identificarse con los obs del sistema $\mathcal{N}_0$ esta inducción es al mismo tiempo una inducción estructural respecto de ese sistema.

5. Notación

Vamos a explicar ahora ciertos símbolos que usaremos como parte del lenguaje U en el curso de discusiones epiteoréticas. Estos símbolos son los infijos binarios

$$\equiv,\ \not\equiv,\ \&,\ \Rightarrow,\ \rightarrow,\ \epsilon,$$

el prefijo '$\neg$', los cuantificadores (X), (EX), y los puntos usados como paréntesis. Hemos explicado ya en § A4 los dos primeros símbolos. Las significaciones de los demás se exponen a continuación.

a. *Puntos*

Usamos puntos como paréntesis o corchetes según las convenciones siguientes [11]. Un grupo de cero o más puntos gráficos a cada lado de un infijo binario y a la derecha de un prefijo monádico se llamará un *punto* en el sentido de nuestro simbolismo; un punto a la derecha de un functor se llamará un *punto derecho*; un punto a la izquierda, un *punto izquierdo*. Estos puntos quedan clasificados en orden de prioridad según reglas que vamos a dar. Establecidas éstas, un punto indicará que el argumento de ese lado del functor se extiende desde el punto, en la dirección indicada, hasta el primer punto con prioridad puesto en la dirección contraria, o hasta el final de la expresión, indicado por un paréntesis, corchete, etc., explícitos. La relación de prioridad es una relación transsitiva engendrada por las reglas siguientes, más la precisión de que una regla establecida antes tiene precedencia sobre cualquiera de las que le siguen: (I) un punto puesto a una conectiva tiene prioridad respecto de uno puesto a un predicativo; (II) un punto puesto a un predicativo tiene prioridad respecto de uno puesto a un operador; (III) un punto que consta de más números de puntos gráficos que otro tiene prioridad respecto de éste; (IV) entre puntos puestos a distintos functores de la lista

$$\rightleftarrows, \rightarrow, \Rightarrow, \& \neg,$$

el punto puesto a functor más a la izquierda tiene prioridad respecto de los puestos a functores más a la derecha en esa lista; (V) un punto izquierdo tiene prioridad respecto de un punto derecho (regla de asociación por la izquierda). Para ejemplos de esta técnica véase *infra*, § e. Es a menudo conveniente usar más puntos gráficos de los estrictamente necesarios y combinarlos con paréntesis explícitos.

b. *Conjunción*

La significación del conector '&' es la misma que la de la conjunción ordinaria 'y' situada entre dos sentencias. Así, si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son enun-

[11] Estas convenciones difieren de las habituales por las estipulaciones (i), (ii) y (v) referentes a prioridad. Se basan en [UDB], con modificaciones. No responden a ciertas eventualidades recogidas en [UDB] y que son teóricamente posibles, pero prácticamente confusionarias. Por otra parte, las estipulaciones (i) y (ii) difieren de [UDB]; concuerdan en principio con Turing [UDB]. Para una exposición del sistema [UDB] de Curry cfr. Rosenbloom [EML], pág. 32. Rosser [LMt], pág. 19, da una lúcida exposición de la técnica habitual. Para más referencias e historia cfr. [TFD], pág. 43, nota 15.

ciados, el enunciado $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{B}$ es verdadero si —y sólo si— $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son ambos verdaderos[12].

c. *Implicación fuerte*

El conector '$\Rightarrow$' expresa la relación de implicación de [TFD]. Se presenta aquí sólo en contextos de la forma

$$\mathfrak{T}_1 \,\&\, \mathfrak{T}_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{T}_m \Rightarrow \mathfrak{T}_{m+1} \tag{4}$$

en los que $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, . . . , $\mathfrak{T}_m$, $\mathfrak{T}_{m+1}$ son enunciados elementales. El enunciado (4) significa que hay una deducción que termina en $\mathfrak{T}_{m+1}$ y cuya base se forma añadiendo $\mathfrak{T}_1$, ..., $\mathfrak{T}_m$ a los axiomas[13]. En un sistema logístico, en el que $\mathfrak{T}_k$ es $\vdash T_k$, podemos expresar (4) también del siguiente modo[14]:

$$T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_m \vdash T_{m+1}. \tag{5}$$

d. *Implicación débil*

Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son enunciados, el enunciado

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \tag{6}$$

significa que hay un método constructivo para pasar de una demostración de $\mathfrak{A}$ a una de $\mathfrak{B}$. Este método constructivo puede incluir una demostración por inducción, y en este sentido (6) es más débil que el enunciado correspondiente con $\Rightarrow$.

e. *Un ejemplo.*

A continuación ilustramos algunas de las anteriores convenciones. Considérese el enunciado

$$x = y \,\&\, y = z \rightarrow x = z \tag{7}$$

---

[12] Por lo que hace al doble uso de una letra como sentencia y como nombre de un enunciado cfr. la nota a § A4.

[13] El caso en el cual no se usan más axiomas que los explícitamente indicados es muy frecuentemente interesante. Y se le puede tomar en cuenta refiriendo (4) al sistema que surge cuando se suprimen los axiomas.

[14] Esta notación se debe a Rosser [MLV]. En su [LMth], pág. 57, sugiere que se llame a '$\vdash$' «torniquete», y se lo lea; «dan». Otra lectura posible es: «vinculan».

De acuerdo con las reglas de prioridad, esto es lo mismo que

$$x = y \cdot \& \cdot y = z : \rightarrow \cdot x = z,$$

o sea,

$$[(x = y) \& (y = z)] \rightarrow (x = z).$$

Con referencia al sistema $\mathcal{N}_0$, se sigue de § 4b que la premisa no puede ser verdadera más que si x, y, y z son el mismo ob, es decir, cuando

$$x \equiv y \equiv z.$$

En este caso vale también la conclusión, y, por tanto, (7) es verdadera. En cambio,

(8) $$x = y \,\&\, y = z \Rightarrow x = z,$$

considerada universalmente para todos los obs x, y, z, es falsa [15]. He aquí, efectivamente, un contraejemplo:

$$0 = 0' \,\&\, 0' = 0'' \Rightarrow 0 = 0''.$$

f. *Otros símbolos*

Los demás símbolos de la lista se usan menos frecuentemente y no por mucho tiempo. Las convenciones que se refieren a ellos se indican aquí con meros fines de referencia. Si $\mathfrak{A}$ es un enunciado, las notaciones

$$\neg\, \mathfrak{A},\ (X)\, \mathfrak{A}, \qquad (EX)\, \mathfrak{A},$$

indican, respectivamente, que $\mathfrak{A}$ es falso, que $\mathfrak{A}$ es verdadero para todo X, y que hay un X para el cual $\mathfrak{A}$ es verdadero. La primera notación se usa ordinariamente sólo si $\mathfrak{A}$ es constructivamente decidible; la tercera sólo cuando la existencia es constructiva.

Las notaciones

$$X \in \mathfrak{A}, \qquad \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B},$$

indican (como es usual) que X es un miembro de la clase $\mathfrak{A}$, y que todo miembro de la clase $\mathfrak{A}$ es también miembro de la clase $\mathfrak{B}$, respectivamente.

---

[15] Obsérvese que si $\mathfrak{A}$ es falsa (6) no tiene contenido; cuando esta falsedad puede mostrarse constructivamente consideramos que (6) es «vacuamente verdadera». Pero éste no es el caso de (8).

C. VARIABLES

En esta sección tratamos cuestiones relacionadas con el término 'variable'. En el § 1 se establecen definiciones preliminares. En los artículos posteriores discutimos algunas explicaciones suplementarias necesarias para precisar las definiciones.

1. Definiciones preliminares

La palabra 'variable' tiene dos sentidos distintos que deben distinguirse cuidadosamente.

Por una parte, una variable es un símbolo o expresión del lenguaje U que usamos de un modo determinado. Llamaremos a estas variables variables intuitivas, o *variables U*. Por ejemplo, las 'x', e 'y' usadas en la formulación de la regla de deducción en § 1A3 son variables U. Es evidente que no podemos formular regla general alguna —y, por tanto, que no podemos establecer ningún sistema formal con tales reglas— sin utilizar variables de esta clase. (Pues si usáramos perífrasis, estas perífrasis serían también variables U.) Por tanto, repetimos, las variables U son símbolos, no obs, y el sistema formal no trata de ellas. Pero son un expediente esencial para la formulación de epiteoremas; y las hemos usado, implícitamente al menos, en varios lugares de lo que antecede.

Por otra parte, ciertos sistemas formales tienen una categoría de átomos [16] llamados «variables» ya en la estructura primitiva; éstas son *variables formales*. Una variable formal no es, pues, un símbolo, sino un ob; si este ob tiene que recibir un nombre (en el lenguaje U) su nombre no será una variable intuitiva, sino una constante. Consideramos que las variables formales son de tres clases: (a) indeterminadas, (b) variables sustitutivas, y (c) variables ligadas. Puede darse la siguiente definición preliminar:

(a) Una *indeterminada* es un átomo respecto del cual la estructura primitiva no especifica nada, excepto que es un ob [17]. Una indeterminada no tiene por qué ser necesariamente rotulada como tal. Pueden existir indeterminadas en sistemas completamente formales.

(b) *Variables sustitutivas o de sustitución* son aquellas respecto de las cuales hay una regla de sustitución. Una tal regla exige que se especifi-

[16] Respecto de algunos sistemas en los que las variables formales no son atómicas cfr. § 3.

[17] Cuando se forma una extensión de los obs (§ A1e) los obs añadidos son indeterminados por definición. Cfr. § 5.

que una clase de obs que pueden ser sustituidos en ciertas circunstancias por obs arbitrarios o por obs de una cierta categoría; los obs de esta clase constituyen las variables sustitutivas. Las variables sustitutivas no son indeterminadas porque desempeñan un papel respecto de la regla de sustitución. Tienen que formularse como categoría auxiliar, y la idea misma de sustitución es un complejo concepto auxiliar [18] (cfr. *infra*).

(c) Un sistema contiene *variables ligadas* cuando se tiene formulado un conjunto de variables sustitutivas y, por lo menos, una operación propia [19] respecto de la cual estas variables desempeñan un papel especial. Toda operación de ese tipo tiene uno o más argumentos para los cuales no son admisibles más que variables; y una variable que aparezca como un tal argumento está «ligada» en todo el resto del cierre de la operación; las sustituciones de una variable ligada se restringen a ciertos cambios de variable. Así, por ejemplo, en una formalización del cálculo integral la integral

$$\int_0^3 x^2 dx$$

se consideraría como cierre de una operación de cuatro argumentos, x, x^2, 0 y 3; la variable x está ligada [20]. Como muestra este ejemplo, se usan variables ligadas cuando tenemos argumentos que deben interpretarse como funciones. Obsérvese que no rotulamos o marcamos de un modo absoluto como variables ligadas del sistema alguna clase determinada de obs. Las variables ligadas tienen todas las complejidades de las variables sustitutivas y algunas otras complejidades propias.

2. Sustitución

Es necesario aclarar la noción de *sustitución*. En un sistema sintáctico la sustitución se explica simplemente como subrogación de una expresión en el lugar de un símbolo. La sustitución es así una idea intui-

---

[18] No afirmamos que esto ocurra en todo caso concebible, sino sólo que ocurre, en principio, en los casos que no sean demasiado diferentes de los que ahora son corrientes. En sistemas como los citados en la nota 27 la noción de variable es un concepto propio, pero nuestra discusión sigue aplicándose a ellos con algunas modificaciones inesenciales. También en algunos sistemas sintácticos la sustitución puede definirse sin recurrir a una clase de variables designada; pero si sobre una tal base se levantan sistemas deductivos con una regla de sustitución nuestra discusión seguirá probablemente aplicándose en principio.

[19] A diferencia de las operaciones auxiliares (cfr. § 1B1).

[20] Obsérvese que, por el dominio de la formulación sintáctica en la teoría, muchos dirían aquí que 'x' está ligada; pero éste no es el punto de vista del sistema formal.

tiva. Pero en un sistema formal la sustitución es una operación sobre obs que hay que definir abstractamente. En un sistema sin variables ligadas la definición es como sigue: Sean a y b obs, y sea x una variable; lo que se necesita es definir el ob b^* obtenido por sustitución de a por x en b. El ob b está construido a partir de los átomos mediante una construcción unívoca [21]. Entonces b^* es el ob obtenido por el mismo proceso de construcción, pero usando a en vez de x en todos los lugares en que se presenta x. Esta definición es equivalente a la siguiente definición recursiva:

(I) si b es x, entonces b^* es a.
(II) Si b es un átomo distinto de x, entonces b^* es b.
(III) Si b se obtiene por una operación ω_i a partir de los argumentos $c_1, c_2 \ldots, c_n$, entonces b^* se obtiene mediante ω_i a partir de los argumentos $c_1^*, c_2^*, \ldots, c_n^*$.

Cuando hay variables ligadas, esta definición tiene que modificarse de un modo que se discutirá en el capítulo **3**. Adoptaremos la notación

$$[a/x]\ b$$

para indicar el b^* definido como queda dicho. La sustitución simultánea

$$[a_1/x_1, a_2/x_2, \ldots, a_n/x_n]\ b$$

puede definirse análogamente, o puede serlo en base a la sustitución simple [22]. Estas definiciones tienen sentido siempre que x, x_1, etc., sean átomos, independientemente de que sean o no variables.

3. Variables formales

Hay también cierta vaguedad en la definición de la variable formal. Empezaremos la discusión por el caso de las indeterminadas.

Intuitivamente, una indeterminada desempeña el papel —o puede desempeñar el papel— de un ob no especificado, es decir, tiene que ser posible interpretar el sistema de tal modo que el nombre de la indeterminada resulte ser una variable intuitiva. Condición necesaria de esto es que el nombre de la indeterminada pueda ser sustituido por un ob no especificado. Puede mostrarse por inducción deductiva que esta condi-

[21] Cfr. § B2.
[22] Cfr. Church [IML], pág. 6 y sigs.; cfr. § 3E y [DSR].

ción se cumple en el caso de que la enunciación de la estructura primitiva no mencione la indeterminada más que para colocarla en la lista de los átomos. Entonces la indeterminada no puede presentarse en un teorema elemental más que mediante la especialización de una variable intuitiva, 'X', en una premisa de la forma 'X es un ob' y perteneciente a una regla o a un esquema axiomático [23]. Supondremos que ésa es la situación, a menos de explicación en contrario.

Pero en algunos sistemas no hay reglas ni esquemas de axiomas que contengan una tal premisa sin más restricciones sobre X. En tales casos, en los que a falta de alguna precisión la noción de indeterminada sería vacía, podemos especificar un predicado, primitivo o derivado, como *predicado universal*, estableciendo un régimen excepcional para axiomas que afirmen que el predicado universal se aplica a un ob. Si el sistema resultante es tal que el predicado universal se aplica a todo ob, entonces queda satisfecha la condición necesaria para una indeterminada [24]. En otro caso, la sustitución será sólo posible para los obs que satisfagan el predicado universal, a los cuales podemos llamar *obs propios*. Pero puede ocurrir que a pesar de ello nuestras intuiciones queden satisfechas en todo caso, situación en la cual los obs impropios serán en cierto respecto sin-sentidos [25]. El predicado universal es cosa de definición arbitraria. Así, la cuestión de si 0 es o no es una indeterminada en el sistema $\mathcal{N}_0$ depende de que admitamos o no admitamos el predicado de igualdad consigo mismo como predicado universal; a falta de explicación contraria diremos que no hay predicado universal que corresponda a nuestras intuiciones [26].

Hace falta una modificación análoga para incluir sistemas de los que se obtienen mediante el proceso de § 1E3 para reducir un sistema de infinitos átomos a otro de estructura finita [27]. En este caso tomamos como obs propios los que corresponden a los obs del sistema original; éstos son combinaciones (§ B2) de los *cuasi-átomos*, es decir, los átomos que corresponden a los átomos originarios, por medio de las operaciones originarias. Si el sistema inicial contiene variables formales éstas no serán, en general, atómicas en el sistema reducido, pero sí serán cuasi-atómicas. Nuestra discusión se aplicará con modificaciones de escasa entidad a los obs propios.

---

[23] La indeterminada puede presentarse de este modo en un axioma formado así.

[24] Esta situación se presenta en lógica combinatoria. El predicado universal nos permite expresar «X es un ob» como proposición elemental.

[25] Por ejemplo, en las formas sintácticas del cálculo λ de Church, en el que las «fórmulas bien formadas» son obs propios.

[26] Obsérvese que 0 satisface la condición necesaria para ser una indeterminada (por el epiteorema según el cual $y = y$ vale para todo ob y).

[27] Ejemplos en Rosenbloom [EML], págs. 40, 159, 182 y sigs.

Harán falta otras modificaciones cuando se trate de sistemas incompletamente formalizados, como son los que incluyen distintas categorías de obs. Pero este punto no nos interesa aquí.

La noción de indeterminada supone, pues, ciertas convenciones arbitrarias que tienen que hacerse específicamente para cada tipo de sistema formal. Las demás clases de variables formales suponen, por su parte, la especificación explícita de una categoría de variables (formales) en la estructura primitiva, y, consecuentemente, vale de ellas la misma afirmación que acabamos de hacer, y aún *a fortiori*. No es útil intentar definir el término 'variable formal' *a priori* para cada uno de tales sistemas. Pero insistiremos en que las variables formales son obs relacionados de algún modo con la sustitución.

4. Variables libres

Las indeterminadas y las variables de sustitución, tomadas juntas, se llaman *variables libres*. Esas dos categorías tienen, en efecto, muchos rasgos comunes. Siempre es posible practicar sustituciones de variables libres por obs arbitrarios; pero en el caso de las variables de sustitución esta posibilidad se sigue directamente de una regla, mientras que tratándose de indeterminadas la sustitución tiene que justificarse por un epiteorema.

Hay, pues, en la práctica cierta equivalencia entre las dos clases de variables libres. Supongamos, por ejemplo, que deseamos establecer la ley conmutativa de la adición en un sistema formal de aritmética en el cual x e y sean variables libres. La ley puede formularse mediante un esquema, del modo siguiente:

(1) Si X e Y son obs, entonces $X + Y = Y + X$.

De aquí se sigue como un caso especial que

(2) $$x + y = y + x.$$

A la inversa, si vale (2), (1) se sigue por la regla de sustitución. Así, pues, si x e y son variables de sustitución, el axioma (2) equivale al esquema de axiomas (1). Por otro lado, si se reemplazan todos los axiomas del tipo de (2) por los esquemas exiomáticos correspondientes (1), la regla de sustitución se hace superflua; y como han desaparecido de los axiomas, las variables libres son ahora todas indeterminadas

(a menos de que aparezcan en las reglas, caso en el cual hay que hacer otras varias modificaciones). Se trata de una situación general, y en la práctica hay una equivalencia entre sistemas con axiomas y variables de sustitución y sistemas con esquemas axiomáticos e indeterminadas [28]. Obsérvese que en (1) '*X*' e '*Y*' son variables intuitivas, mientras que '*x*' e '*y*' de (2) son nombres de obs específicos, es decir, nombres propios.

Los enunciados acerca de variables formales tienen la paradójica propiedad de que, en la interpretación, parecen ser enunciados acerca de algo determinado, y ese algo es, por ejemplo, en (2), *x* e *y*. Como estableceremos detalladamente en § 3A, los enunciados que incluyen variables formales deben interpretarse realmente como enunciados acerca de funciones.

Las variables formales son, pues, un expediente un tanto artificial para expresar propiedades de funciones; de aquí nace la idea de que lo que se expresa a base de variables puede expresarse mejor sin ellas, mediante funciones «abstractas» o «puras». Tal es, precisamente, el rendimiento de la teoría de combinadores.

5. Extensiones

La noción de variable tiene importancia para nosotros en relación con las extensiones de obs. Aunque nuestro objeto temático primario está constituido por sistemas de lógica combinatoria que no contienen variables formales, en nuestro estudio sentamos epiteoremas sobre ellos que contienen extensiones de obs con variables formales. Por ejemplo, en § 6E se muestra que hay una equivalencia esencial entre una teoría de combinadores y el cálculo de conversión-lambda correspondiente. Es, por tanto, conveniente establecer algunas convenciones sobre este proceso.

Dado un sistema $\mathfrak{S}$, formamos una extensión de obs, $\mathfrak{S}'$, de $\mathfrak{S}$ por el procedimiento de añadir a $\mathfrak{S}$ ciertos otros obs sin más especificación sobre ellos que la de que satisfacen el predicado universal si lo hay. Estos nuevos obs son por definición indeterminadas de $\mathfrak{S}'$. Los llamaremos *indeterminadas añadidas*, para distinguirlos de todas las indeterminadas que hubiera ya en $\mathfrak{S}$. Si las indeterminadas añadidas constituyen una clase $\mathfrak{x}$, llamaremos a $\mathfrak{S}'$ la *extensión* $\mathfrak{x}$ *de* $\mathfrak{S}$.

Aunque esto no es esencial, para mayor precisión podemos considerar todas las indeterminadas como procedentes de una clase infinita y fi-

---

[28] El primero en señalarlo fue Von Neumann [HBT].

jada, $\mathfrak{k}$, la cual estaría previamente dada. Esto es natural cuando concebimos los obs como símbolos; en este caso, $\mathfrak{k}$ es una clase de símbolos que convenimos en usar para este fin. Cuando constituimos una extensión, de la naturaleza que sea, las sentencias elementales del lenguaje A expresan enunciados diferentes en las diferentes extensiones (puesto que son diferentes las condiciones veritativas). Pero en lo que sigue hablaremos de los enunciados así relacionados como si fueran el mismo enunciado.

D. SUBROGACION Y RELACIONES MONOTONAS

Consideramos en esta sección la noción de subrogación e ideas relacionadas con ella. Estas ideas incluyen los atributos básicos de las relaciones de equivalencia y de las relaciones cuasi-ordenadoras, las cuales son monótonas respecto de la subrogación. Estas ideas son intuitivamente muy claras para un sistema sintáctico, pero cuando se trata de sistemas abstractos exigen para su precisión explicaciones algo complejas.

1. Explicaciones preliminares

Consideramos las combinaciones $\mathfrak{X}$ de un cierto conjunto de obs básicos $\mathfrak{A}$ mediante las operaciones $\mathfrak{O}$, tal como hicimos en § B2. No se exige que los obs $\mathfrak{A}$ sean átomos, ni que las operaciones $\mathfrak{O}$ sean primitivas, aunque sí se supone que estas operaciones $\mathfrak{O}$ están explícitamente definidas sobre la base de las primitivas [29]. Los términos 'combinación', 'construcción', 'componente', 'composición', etc., se entienden como en § B2.

Suponemos que $\mathfrak{O}$ consta de las operaciones ω_1, ω_2, ..., siendo ω_k de grado n_k. El cierre de ω_k respecto de los argumentos A_1, ..., A_{n_k} se indica por la notación

$$\omega_k\ (A_1,\ \ldots,\ A_{n_k}).$$

Usamos cursivas mayúsculas para indicar obs sin especificar, minúsculas griegas para indicar operaciones, y mayúsculas góticas para indicar clases de obs (y para otras nociones).

En los últimos artículos de esta sección tratamos las propiedades de

[29] Esto excluye ciertas posibilidades epiteoréticas.

una relación $\boldsymbol{R}$. En esta obra usamos el signo de implicación fuerte ('$\Rightarrow$') para indicar una implicación que puede ser fuerte o débil según las circunstancias, siempre que ello ocurra uniformemente en un contexto. El signo '$\rightarrow$' indica una implicación que es siempre débil. En el establecimiento de los teoremas todas las ideas que supongan implicación se refieren a la implicación débil.

2. Definición de subrogación

Sea $\mathfrak{C}$ una construcción de X, y sea Y una componente de $\mathfrak{C}$. Entonces existe una composición (§ B2) de Y a X en $\mathfrak{C}$. Además, es intuitivamente evidente que si Y se presenta más de una vez como componente habrá una composición distinta para cada vez que se presente. Esto sugiere la definición de un *caso* de Y en X como una composición de Y a X en alguna construcción $\mathfrak{C}$.

Podemos caracterizar una tal composición sin hacer referencia explícita a $\mathfrak{C}$, sino considerándola meramente como una secuencia $V_1, ..., V_n$ con $V_1 \equiv Y$, $V_n \equiv X$, y

$$V_{k+1} \equiv \varphi_k (V_k) \qquad k = 1, 2, ..., n - 1,$$

siendo φ_k una operación monádica definida mediante la fijación en algún ω_i de todos los argumentos menos uno.

Sea dado un caso de Y en X. El ob X', obtenido de X por *subrogación* de ese caso de Y por Y' se define del modo siguiente: Sea $V_1, ..., V_n$ la secuencia que define el caso de Y, y sean $\varphi_1, ..., \varphi_{n-1}$ como queda dicho en el párrafo anterior. Sea $V_1' \equiv Y'$, y definamos $V_2', ..., V_n'$ del modo siguiente:

$$V_{k+1}' \equiv \varphi_k (V'_k) \qquad k = 1, ..., n-1.$$

Entonces: $X' \equiv V_n'$.

Podemos ampliar esta definición de modo que abarque la subrogación en un enunciado elemental del sistema formal. Sea, efectivamente, $\mathfrak{A}$ la expresión $\psi (X_1, ..., X_n)$, en la que $X_1, ..., X_n$ son obs y ψ es un predicado primitivo. Hágase que la subrogación convierta X_i en X_i'; entonces esa subrogación convierte a $\mathfrak{A}$ en $\psi (X_1', ..., X_n')$.

Se apreciará que esas definiciones coinciden, en el caso sintáctico, con el simple proceso intuitivo de colocar un caso de una expresión en el lugar de otra expresión componente. Pueden establecerse

rigurosamente las propiedades elementales de una tal subrogación [30]. Obsérvese que la subrogación se distingue de la sustitución por el hecho de que el ob subrogado no tiene que ser necesariamente primitivo, y por el hecho, además, de que no es necesario que la subrogación se practique en todos los casos del ob eliminado.

3. El teorema de la subrogación

Podemos derivar ahora un teorema análogo del que en otro lugar [31] se llamó el *teorema de subrogación*. Una '$\boldsymbol{R}$' infija indicará una relación (es decir, un predicado binario). Se dirá que una operación φ de un argumento es *positiva* [32] respecto de $\boldsymbol{R}$ si

$$X \boldsymbol{R} Y \Rightarrow \varphi(X) \boldsymbol{R} \varphi(Y) \tag{1}$$

para todo ob X, Y; se dirá que es *negativa* respecto de $\boldsymbol{R}$ si, para todo X, Y,

$$X \boldsymbol{R} Y \Rightarrow \varphi(Y) \boldsymbol{R} \varphi(X). \tag{2}$$

Sea $\psi(X)$ una expresión derivada de X por medio de una secuencia de operaciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, todas las cuales son o bien positivas o bien negativas respecto de $\boldsymbol{R}$. Si el número de operaciones negativas es par, ψ es positiva, es decir:

$$X \boldsymbol{R} Y \Rightarrow \psi(X) \boldsymbol{R} \psi(Y);$$

y si ese número es impar, entonces ψ es negativa, es decir:

$$X \boldsymbol{R} Y \Rightarrow \psi(Y) \boldsymbol{R} \psi(X).$$

Vimos antes que en la secuencia $V_1, \ldots, V_n$ de § 2, cada $V_{k+1} \equiv \psi_k(V_k)$, siendo ψ_k alguna ω_i considerada como una función de uno sólo de sus argumentos. Así, pues, si cada ω_i es positiva o negativa respecto de cada uno de sus argumentos, cada subrogación será positiva o negativa según las circunstancias. Para referirnos a este teorema de la subrogación usaremos en adelante la sigla Subr [33].

---

[30] Cfr. [DSR], § 8.
[31] [LLA], II, § 5, pág. 41.
[32] Cfr. sobre '$\Rightarrow$' § 1, *in fine*.
[33] Subr es lo mismo que el Rp de [LLA], *loc. cit.* La idea básica se debe a MacLane [ABL] y a Herbrand [RTD].

4. Relaciones monótonas

Definiremos una *relación monótona* como una relación $\boldsymbol{R}$ tal que

$$X\,\boldsymbol{R}\,Y \Rightarrow A\,\boldsymbol{R}\,B, \tag{3}$$

siendo B el resultado de subrogar en A a un caso de la componente X un caso de A por Y. Del teorema de la subrogación se sigue que *una condición necesaria y suficiente*[34] *para que* $\boldsymbol{R}$ *sea monótona es que toda* ω_i *sea positiva respecto de todos sus argumentos.*

Llamaremos relación *monótona cuasi-ordenadora* a toda relación monótona que sea reflexiva y transitiva; si además es simétrica se llamará *equivalencia.* Las propiedades características de una equivalencia son, pues, la reflexividad, la simetría, la transitividad y la monotonía; si se excluye la simetría, lo que tenemos es una relación monótona cuasi-ordenadora. Diremos que una relación concreta tiene una de las anteriores propiedades si la propiedad se da cuando $\boldsymbol{R}$ se especializa para constituir esa relación.

Las propiedades características de una equivalencia en un sistema aplicacional son las siguientes:

(ρ)	$X\,\boldsymbol{R}\,X$	(reflexividad)
(σ)	$X\,\boldsymbol{R}\,Y \Rightarrow Y\,\boldsymbol{R}\,X$	(simetría)
(τ)	$X\,\boldsymbol{R}\,Y\ \&\ Y\,\boldsymbol{R}\,Z \Rightarrow X\,\boldsymbol{R}\,Z$	(transitividad)
(μ)	$X\,\boldsymbol{R}\,Y \Rightarrow ZX\,\boldsymbol{R}\,ZY$	(monotonía derecha)
(ν)	$X\,\boldsymbol{R}\,Y \Rightarrow XZ\,\boldsymbol{R}\,YZ$	(monotonía izquierda)

En un sistema cuasi-aplicacional tendremos, además, otras propiedades expresivas de la positividad de las operaciones adicionales.

5. Relaciones monótonas cuasi-ordenadoras producidas por una relación dada

Si $\boldsymbol{R}_0$ es una relación dada, la *relación monótona cuasi-ordenadora engendrada por* $\boldsymbol{R}_0$ es la relación $\boldsymbol{R}$, definida por los postulados (ρ), (τ), Subr., junto con la siguiente ley:

$$X\,\boldsymbol{R}_0\,Y \Rightarrow X\,\boldsymbol{R}\,Y. \tag{ε}$$

---

[34] La argumentación precedente prueba la suficiencia; la necesidad se sigue al tomar $A = \omega_i\,(\ldots, X, \ldots)$.

La equivalencia monótona engendrada por $\boldsymbol{R}_0$ está definida por esos postulados y, junto con ellos, (σ). Así, tenemos el siguiente teorema, en el cual el término 'necesaria y suficiente' se refiere a la implicación débil.

TEOREMA 1. *Si* $\boldsymbol{R}$ *es la monótona cuasi-ordenadora engendrada por* $\boldsymbol{R}_0$, *una condición necesaria y suficiente de*

$$X \boldsymbol{R} Y \tag{4}$$

es que se pueda pasar de X *a* Y *por una serie de cero o más subrogaciones de componentes* U_k *por obs* V_k *tales que*

$$U_k \boldsymbol{R}_0 V_k \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Demostración. La condición es suficiente [35]. Pues si vale para cero subrogaciones, entonces $X \boldsymbol{R} Y$ vale por (ρ). En otro caso existirán $X_1 \equiv X, X_2, \ldots, X_n \equiv Y$, tales que X_{k+1} se obtiene de X_k mediante subrogación de U_k por V_k. Entonces, por (5), (ε),

$$U_k \boldsymbol{R} V_k;$$

y, consiguientemente, por Subr

$$X_k \boldsymbol{R} X_{k+1};$$

de aquí, por (τ).

$$X \boldsymbol{R} Y.$$

La condición es, además, necesaria. Sea $\boldsymbol{S}$ la relación definida por la condición. Mostraremos que $\boldsymbol{S}$ satisface los postulados que definen a $\boldsymbol{R}$, y de ello se seguirá (por inducción deductiva) que

$$X \boldsymbol{R} Y \rightarrow X \boldsymbol{S} Y.$$

Es claro que $\boldsymbol{S}$ satisface a (ε). Satisface también (ρ), puesto que se permite que el número de subrogaciones sea cero. Satisface a (τ), puesto que un conjunto de subrogaciones que lleve de X a Y, seguido por otro conjunto que lleve de Y a Z, dará un conjunto de subrogaciones que lleva de X a Z. Y satisface a Subr puesto que las subrogaciones

---

[35] La suficiencia vale en sentido fuerte si las propiedades definitorias de $\boldsymbol{R}$ valen en sentido fuerte.

en una componente de X son subrogaciones en X [36]. Esto completa la demostración.

COROLARIO 1.1. *Si* $\boldsymbol{R}_0$ *es simétrica, la monótona cuasi-ordenadora definida por* $\boldsymbol{R}_0$ *es una equivalencia débil* [37].

Demostración. Está claro que la $\boldsymbol{S}$ de la demostración del teorema 1 es una equivalencia.

TEOREMA 2. *La equivalencia monótona engendrada por* $\boldsymbol{R}_0$ *es la misma, en el sentido de la implicación débil, que la monótona cuasi-ordenadora definida por* $\boldsymbol{R}_0'$, *siendo*:

$$X \boldsymbol{R}_0' Y \rightleftarrows X \boldsymbol{R}_0 Y \text{ o } Y \boldsymbol{R}_0 X.$$

Demostración. Sea $\boldsymbol{R}$ la primera relación y $\boldsymbol{S}$ la segunda. Está claro por (ε) y por (σ) que

$$X \boldsymbol{R}_0 Y \text{ o } Y \boldsymbol{R}_0 X \Rightarrow X \boldsymbol{R} Y,$$

que es el análogo de (ε) para $\boldsymbol{R}_0'$. Así, pues, $\boldsymbol{R}$ satisface los postulados de $\boldsymbol{S}$; por tanto,

$$X \boldsymbol{S} Y \rightarrow X \boldsymbol{R} Y.$$

Por otro lado, $\boldsymbol{S}$ satisface los postulados de $\boldsymbol{R}$, puesto que $\boldsymbol{S}$ es simétrica (Corolario 1.1) y

$$X \boldsymbol{R}_0 Y \rightarrow X \boldsymbol{R}_0' Y \rightarrow X \boldsymbol{S} Y;$$

por tanto,

$$X \boldsymbol{R} Y \rightarrow X \boldsymbol{S} Y.$$

Con esto se completa la demostración.

6. APLICACIONES

En lógica combinatoria consideraremos dos clases de relaciones de equivalencia. Por una parte, usaremos el infijo '$\equiv$' para designar la *identidad* por definición. La tenemos ya definida como la relación de equivalencia engendrada por las definiciones y para un contexto particular (cfr. § E3). Usaremos, además, el infijo '$=$' para una *igualdad*

---

[36] Para ciertos detalles cfr. [DSR], §§ 9-10.

[37] Esto es, una cuasi-ordenadora monótona en la que (σ) vale en sentido débil.

definida por los predicados del sistema. Tendrá, por tanto, significaciones diferentes en sistemas diferentes.

También tendremos ocasión de considerar ciertas relaciones monótonas cuasi-ordenadoras obtenidas por la supresión de la propiedad (σ); usaremos para estas relaciones infijos tales como '$\geq$', '$\succ$'. El lector debe tener en cuenta que en estos casos la relación cuasi-ordenadora puede ser más fuerte, y no más débil, que la igualdad correspondiente. Al comparar sistemas diversos puede ser necesario usar subíndices u otras notaciones especiales para evitar confusión.

7. Subrogabilidad

Resulta frecuentemente de importancia la noción de subrogabilidad. Vamos a dar aquí una definición de esta noción y a formular un teorema sobre ella que nos será luego de utilidad como lema en el capítulo 7.

Si X e Y son obs de $\mathfrak{S}$, diremos que Y *es subrogable* a X (o que X es subrogable por Y) si —y sólo si— cuando la subrogación de casos de X por casos de Y convierte un enunciado elemental $\mathfrak{A}$ en otro enunciado elemental $\mathfrak{B}$, tenemos

$$\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}.$$

Y diremos que X *es intercambiable con* Y si —y sólo si— X es subrogable a Y e Y a X.

Así definidas, la subrogabilidad es una relación monótona cuasi-ordenadora y la intercambiabilidad es una equivalencia monótona. Interesa establecer la siguientes propiedad:

Teorema 3. *Si* $\mathfrak{S}$ *está definido por una equivalencia monótona denotada por* '$=$', *es condición necesaria y suficiente de la subrogabilidad de* Y *a* X *que*

$$X = Y. \tag{6}$$

Demostración. La condición es necesaria porque derivamos (6) de $X = X$ mediante una subrogación admisible.

Para mostrar que la condición es suficiente supongamos que $\mathfrak{A}$ es $A_1 = A_2$ y $\mathfrak{B}$ es $B_1 = B_2$. Entonces, por (6), Subr y (σ), podemos inferir $B_1 = A_1$, y $A_2 = B_2$; de aquí se sigue, por (τ), $B_1 = B_2$ a partir de $A_1 = A_2$.

Corolario 3.1. *Si* X *es subrogable por* Y, *es intercambiable con* Y.

E. TEORIA DE LA DEFINICION

El tema de la definición ha sido tocado brevemente en § A4, y aún de modo más breve en § B y en § D6. Aquí vamos a desarrollar una técnica, de acuerdo con los principios de § A4, que se aplica no sólo a las definiciones explícitas ordinarias, sino también a las de carácter recursivo. Postulamos un determinado sistema formal $\mathfrak{S}_0$ previamente fijado; luego formamos varias extensiones de $\mathfrak{S}_0$ mediante la adición de nuevos átomos [38] y operaciones, una relación de identidad definicional y postulados para expresar las definiciones, así como métodos para eliminarlas. Suponemos que $\mathfrak{S}_0$ es completamente formal. Y como la única parte de $\mathfrak{S}_0$ que consideraremos es la morfología de sus obs, la discusión puede llamarse epimorfológica. Cuando se especializa $\mathfrak{S}_0$ de tal modo que coincida con el sistema $\mathcal{N}_0$, la teoría se convierte esencialmente en la teoría de las definiciones recursivas desarrolladas por Kleene en [IMM]. En realidad, nuestro tratamiento puede considerarse como una adaptación de la teoría de Kleene a nuestras circunstancias.

1. Extensiones definicionales

Como acabamos de decir, vamos a considerar varias extensiones de un determinado sistema completamente formal, $\mathfrak{S}_0$, al que llamamos *sistema básico*. Usaremos las letras '*A*', '*B*', '*C*', etc., para indicar obs no especificados de $\mathfrak{S}_0$, mientras que '*X*', '*Y*', '*Z*', etc., indicarán obs de una extensión. Llamamos *nuevos* a los obs, operaciones, etc., de una extensión que no se presenten ya en $\mathfrak{S}_0$; los que se dan en $\mathfrak{S}_0$ son obs *básicos*.

Una *extensión definicional* de $\mathfrak{S}_0$ es un sistema $\mathfrak{S}_1$ que satisface las condiciones siguientes:

1.° Los obs de $\mathfrak{S}_1$ se forman añadiendo a los de $\mathfrak{S}_0$ ciertas operaciones nuevas. El término 'operación' debe entenderse aquí en el sentido amplio (§ 1B1), de modo que átomos nuevos quedan incluidos bajo ese término como operaciones nuevas de grado 0. Se entiende que $\mathfrak{S}_1$, al igual que $\mathfrak{S}_0$, es completamente formal, de modo que cualesquiera combinaciones formadas mediante operaciones básicas o nuevas son obs de $\mathfrak{S}_1$.

---

[38] En toda esta sección consideramos los nuevos átomos como operaciones de grado 0, de tal modo que tenemos ahora operaciones en el sentido amplio de § 1B1.

2.° En $\mathfrak{S}_1$ hay un nuevo predicado binario que expresa la identidad por definición. En la práctica usaremos el infijo '$\equiv$' para formular definiciones; pero en la presente sección usaremos un símbolo especial, '$\boldsymbol{D}$', como infijo para indicar ese predicado. Las propiedades relacionales, como (ρ), (τ), se refieren a esta relación $\boldsymbol{D}$, salvo formulación expresa en contrario.

3.° Los axiomas de $\mathfrak{S}_1$ constituyen cierto conjunto $\mathfrak{E}$, llamado de los *axiomas definidores*, todos los cuales son de la forma [39]

$$(1) \qquad \varphi\,(A_1, \ldots, A_m)\ \boldsymbol{D}\ Z,$$

siendo φ una nueva operación de grado m. Postulamos, además, casos de (ρ).

4.° Hay, además, una regla de *reducción definicional*, Rd, que permite inferencias de la forma

$$(2) \qquad X\ \boldsymbol{D}\ Y\ \&\ \varphi\,(A_1, \ldots, A_m)\ \boldsymbol{D}\ B \Rightarrow X\ \boldsymbol{D}\ Y',$$

siendo φ una nueva operación e Y' el resultado de subrogar un caso de $\varphi\,(A_1, \ldots, A_m)$ en Y por B. Llamamos a φ *operación contracta* y a la inferencia (2) una *contracción* respecto de φ; también llamamos a la primera y la segunda premisas de (2), respectivamente, premisa *mayor* y premisa *menor*. La regla Rd es un caso especial de Subr; la premisa menor restringida exige la eliminación de nuevas operaciones, por así decirlo, de dentro afuera. Esta forma restringida se debe a Kleene. Se mostrará que es suficiente y que hace más específico el proceso de reducción.

Llamaremos *reducción definicional* [40] a una deducción obtenida a partir de los nuevos axiomas mediante Rd. Si la conclusión de una tal reducción $\mathfrak{D}$ es

$$(3) \qquad X\ \boldsymbol{D}\ Y$$

llamamos a X el *definiendum* y a Y el *definiens* de $\mathfrak{D}$ y de (3); también decimos que $\mathfrak{D}$ es una *reducción de* X a Y. Si Y es un ob básico A, lla-

---

[39] En la práctica los axiomas definidores se expresan mediante esquemas axiomáticos con variables intuitivas: no es relevante aquí el modo como se expresen. En cualquier caso, los axiomas de $\mathfrak{E}$ tienen que ser de la forma (1). Cfr. § 4.

[40] Se usa este término para distinguir esta forma de reducción de otras que consideraremos más adelante.

mamos a *A definiens último* de $\mathfrak{D}$, y decimos que X tiene a A como definiens último o *valor* [41] (por virtud de $\mathfrak{D}$). Evidentemente, una proposición de la forma

(4) $$XDA$$

no puede ya reducirse ulteriormente mediante Rd.

Cuando se presenta una reducción en forma de esquema arborescente exigimos que la premisa mayor esté a la izquierda. Llamamos *rama principal* de la reducción a la rama de más a la izquierda, la cual lleva del definiendum de la reducción al definiens; las demás ramas se llaman *colaterales*, y las consideramos terminadas en el punto en que desembocan en la rama principal (cfr. § B1). Los nodos de la rama principal son entonces de la forma (3), con X fija (pues es el definiendum de la reducción) e Y que cambia de nodo a nodo. Llamamos *axioma* principal al que comienza la rama principal; el axioma principal puede ser de la forma (1) o bien un caso de (ρ).

Evidentemente, podemos modificar el esquema arborescente del modo que se indica a continuación. En vez de poner (3) en un nodo dado ponemos simplemente Y, colocando X al comienzo de la rama principal de la reducción que termina en ese nodo. De este modo los dos primeros nodos de cualquier rama serán, respectivamente, los lados izquierdo y derecho de un axioma. Llamaremos al resultado *diagrama arborescente modificado*. Este resulta muy conveniente en la práctica, mas, para fines teoréticos, es más explícita la forma plena del diagrama.

Si X es el cierre de una operación φ, llamamos a φ la *operación principal* de X, de la proposición (3) y de cualquier reducción $\mathfrak{D}$ para la cual X sea el definiendum. Si los argumentos de X son básicos, de modo que X sea de la forma $\varphi\ (A_1, \ldots, A_m)$, diremos que X es *simple*; en otro caso diremos que X no es simple.

Pasamos ahora a examinar más detenidamente la estructura de una reducción.

Sea $\mathfrak{D}$ una reducción el axioma principal de la cual es (3). Si Y es de la forma $\varphi\ (Y_1, \ldots, Y_n)$ y uno por lo menos de los Y_i es nuevo, entonces no puede haber contracción respecto de φ en el primer paso. Los pasos siguientes tienen que ser subrogaciones mediante Rd en el seno de los componentes Y_i. Serán tantos pasos cuantos sean necesarios hasta que el definiens sea simple. Al alcanzar un definiens Y' de la forma

---

[41] Se preferirá el término 'valor' cuando el contexto evite la ambigüedad; pero ese término tiene otros usos que no hay que abandonar.

$\varphi(A_1, \ldots, A_n)$, llamamos a la deducción que termina en Y' *fase primaria* de $\mathfrak{D}$, y la designamos aquí mediante $\mathfrak{D}_1$.

Si φ es una operación básica no es posible ulterior reducción después de $\mathfrak{D}_1$. Pero si no lo es es posible una continuación cuando hay un axioma con Y' como definiendum [42]. Si admitimos como axiomas todos los casos de (ρ), cosa, por cierto, deseable por otras razones, nos encontraremos siempre en el caso dicho; pero está claro que el uso de cualquiera de esos axiomas será trivial, y por eso lo excluiremos en una reducción-tipo [43]. Por tanto, en este caso la continuación después de $\mathfrak{D}_1$ es posible si —y sólo si— hay un axioma definidor (1) con Y' a la izquierda. En este caso comenzamos una nueva reducción $\mathfrak{D}_2$ con este axioma como axioma principal. Si $\mathfrak{D}_2$ tiene un definiens último B, y sólo en este caso, la conclusión de $\mathfrak{D}_2$ puede usarse como premisa menor, junto con la conclusión de $\mathfrak{D}_1$ como premisa mayor, para formar una contracción respecto de φ. Llamamos a esta contracción *contracción principal* de $\mathfrak{D}$. Si existe, y sólo si existe, $\mathfrak{D}$ tiene un definiens último B.

Volvamos ahora a $\mathfrak{D}_1$. Las subrogaciones en el seno de las diferentes Y_i son, evidentemente, independientes las unas de las otras. Por eso podemos exigir que se hagan primero las que afectan a Y_1, luego las que afectan a Y_2, etc. Definimos una *reducción-tipo* como una reducción que cumple esta exigencia y excluye, además, usos triviales [44] de (ρ). Entonces, dada cualquier reducción $\mathfrak{D}'$, hay una reducción-tipo correspondiente y con el mismo definiens, que se obtiene de $\mathfrak{D}'$ mediante una simple transformación; además, si una reducción-tipo no termina, tampoco terminará ninguna reducción correspondiente a ella.

Supongamos ahora que $\mathfrak{D}$ (y, por tanto, $\mathfrak{D}_1$) es típica (es una reducción-tipo), y que Y_1 es nuevo. Consideremos la parte $\mathfrak{D}_{11}$ de $\mathfrak{D}_1$ que da las subrogaciones en el seno de Y_1, y supongamos que ella convierte a Y_1 en Y_1'. Si Y_1 es simple, la subrogación de Y_1 por Y_1' tiene que ser una inferencia por Rd con el propio Y_1 como definiendum de la premisa menor; entonces Y_1' tiene que ser un ob básico A_1, y la premisa menor tiene que ser una reducción $\mathfrak{D}_{11}'$ de Y_1 a Y_1', con un axioma definidor como axioma principal. Si Y_1 no es simple, podemos empezar una reducción $\mathfrak{D}_{11}'$ con $Y_1 \boldsymbol{D} Y_1$; haciendo entonces las mismas subrogaciones que en $\mathfrak{D}_{11}$, conseguimos una reducción de Y_1 a Y_1'. En cualquier caso tenemos una $\mathfrak{D}_{11}'$ de Y_1 a Y_1', y $\mathfrak{D}_{11}$ puede obtenerse simplemente a partir de $\mathfrak{D}_{11}'$. Si Y_1 no es nuevo, $\mathfrak{D}_{11}$ y $\mathfrak{D}_{11}'$ son reducciones triviales

---

[42] Si hay un teorema con Y' como definiendum, hay también un axioma.
[43] Cfr. el párrafo siguiente.
[44] Es decir, cuando el definiendum es simple. Toda consecuencia última de un tal axioma puede obtenerse también de un axioma definidor.

con sólo un nodo. Así, $\mathfrak{D}_{11}$ subroga a Y_1 un Y_1' tal que $Y_1 \; D \; Y_1'$; dentro de ciertos límites, Y_1' puede ser cualquier definiens de Y_1 [45].

Si lo que queremos es encontrar una reducción de X, tenemos que continuar todo lo posible toda reducción de componentes, del tipo de $\mathfrak{D}_{11}$. Y si la reducción debe ser una reducción-tipo, el proceso es único excepto por la posibilidad de que haya más de un axioma definidor para $\varphi\,(A_1, \ldots, A_m)$. Si se excluye esta posibilidad, decimos que $\mathfrak{E}$ es un *conjunto propio de axiomas definidores* [46], y que, $\mathfrak{S}_1$ es una *extensión definicional propia*. En una tal extensión la reducción de cualquier X es, en principio, un algoritmo en el sentido de Markov [TAl]. Este algoritmo puede terminar o no en un ob básico; si después de alguna fase primaria no hay axioma definidor que recoja la $\varphi\,(A_1, \ldots, A_m)$ dada, la reducción terminará en un ob no básico; el algoritmo puede también continuar indefinidamente.

Será oportuna aquí una observación por lo que hace a los axiomas no definidores. Si (3) es un axioma, toda proposición obtenida de él como premisa mayor tendrá el mismo definiendum; por otra parte, si X no es simple, no podrá obtenerse proposición alguna usando (3) como premisa menor. Se sigue de aquí que la presencia o ausencia de axiomas que no sean de la forma (1) no puede tener efecto alguno sobre la valoración de obs simples. Admitimos aquí casos arbitrarios de (ρ) porque ello tiene dos ventajas. En primer lugar, hace a D reflexiva, lo cual simplifica ciertos teoremas. En segundo lugar, nos permite valorar ciertos X que no son elementales; concretamente, si un tal X puede reducirse a Y como a un componente de algo, podrá ser así reducido totalmente. (Cfr. la $\mathfrak{D}_{11}'$ de antes) [47].

2. Definiciones completas

Sea $\mathfrak{S}_1$ una extensión definicional de $\mathfrak{S}_0$, y sea φ una nueva operación de $\mathfrak{S}_1$. Diremos que $\mathfrak{S}_1$ es una *definición completa* de φ (que define a φ completamente) si —y sólo si— hay un valor único para cada $\varphi\,(A_1, \ldots, A_m)$ [48]; decimos que $\mathfrak{S}_1$ es una *definición univalente* de φ (y que φ es univalente en $\mathfrak{S}_1$) si —y sólo si— hay al máximo un valor para $\varphi\,(A_1, \ldots, A_m)$. El sistema mismo $\mathfrak{S}_1$ se llamará *extensión definicional*

---

[45] Y_1' no es completamente arbitrario. Si Y_1 es la parte izquierda de un axioma definidor lo único que puede subrogársele es un definiens último de la parte derecha.

[46] En § 4 aplicamos 'propio' de un modo obvio a subconjuntos de $\mathfrak{E}$.

[47] Evidentemente, D es también transitiva, pero, como se ha observado en la nota 45, no tiene Subr.

[48] Según las convenciones de § 1, $A_1, \ldots, A_m$ son obs básicos.

completa (univalente) si —y sólo si— define completamente (univalentemente) toda nueva operación φ. Estas definiciones pueden hacerse relativas a cualquier conjunto $\mathfrak{A}$ de obs básicos añadiendo la condición de que $A_1, \ldots, A_m$ estén en $\mathfrak{A}$.

Se dice que la extensión $\mathfrak{S}_1$ constituye una *definición explícita* para φ relativamente a ciertas funciones $\psi_1, \psi_2, \ldots$ si —y sólo si— en todos los axiomas (1), con φ como operación principal, Z no contiene más operaciones nuevas que las ψ; si no hay ψ, de tal modo que los Z son básicos, tenemos una definición (absolutamente) explícita de φ. Podemos ampliar estas nociones para aplicarlas al sistema mismo, $\mathfrak{S}_1$.

Llamaremos *definición recursiva* de φ a un sistema $\mathfrak{S}_1$ formulado por medio de un conjunto finito de esquemas axiomáticos y completo respecto de la nueva operación φ; análogamente, un $\mathfrak{S}_1$ de esa naturaleza, pero que sea sólo univalente respecto de φ, se llamará *definición recursiva parcial* de φ. Diremos también que φ es recursiva o parcialmente recursiva, respectivamente, en $\mathfrak{S}_1$. En el caso de que $\mathfrak{S}_0$ sea el sistema $\mathcal{N}_0$, estos términos corresponden exactamente a los sentidos de Kleene [49].

Por lo que hace a la relación entre la completud definicional y la recursividad, lo esencial es la finitud del número de esquemas axiomáticos. Esto afecta a la aritmetización en la teoría de Kleene [50]. Es problemática cualquier generalización de esta noción a conjuntos cualesquiera determinados de axiomas [51]. No obstante, la cuestión no es de gran interés en este contexto, porque por ahora no se conoce ninguna generalización simple de la función μ de Kleene para sistemas formales en general, y, por tanto, el estudio más profundo de las definiciones recursivas tiene que hacerse por el rodeo de la aritmetización.

Más interesante es la relación entre estas formas de definición y el carácter «propio» definido en § 1. Está claro que toda extensión definicional propia es univalente. Pero la inversa no es verdad, como muestra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1. Sea $\mathfrak{S}_0$ el sistema $\mathcal{N}_0$, y quede dado $\mathfrak{E}$ por el axioma y esquema axiomático del modo siguiente:

$$\varphi(0) = 0, \qquad (5)$$
$$\varphi(x) = \varphi(x').$$

---

[49] [IMM], págs. 264-266, 275-276, 326. Kleene parece admitir ecuaciones definitorias que no son de la forma (1); pero, por lo dicho al final de § 1, tales ecuaciones son irrelevantes.

[50] La restricción se incluye en la definición de 'sistema de ecuaciones', en la pág. 264, y afecta a la aritmetización por Df6, pág. 277.

[51] Cfr. la discusión de la relación entre recursividad y calculabilidad por Kleene, *loc. cit.*, § 62.

Esto da una definición recursiva parcial de φ; efectivamente, el conjunto axiomático asigna a $\varphi(0)$ el valor 0, pero no asigna ningún valor a todo otro $\varphi(x)$. Hay, sin embargo, dos axiomas cuyo miembro izquierdo es $\varphi(0)$, a saber, la primera ecuación (5) y el caso de la segunda ecuación en la que x es 0. Esto da lugar a dos algoritmos para el cálculo de $\varphi(0)$; uno de ellos conduce inmediatamente a 0, y el otro continúa indefinidamente. Así, pues, $\varphi(0)$ está, por así decirlo, determinada e indeterminada a la vez. Además, aun siendo, por ejemplo $\varphi(2)$ indeterminado, no se le puede definir como distinto de 0 sin destruir la recursividad parcial.

Este ejemplo muestra que las extensiones impropias pueden presentar algunos extraños fenómenos; y, consecuentemente, presenta algún interés la cuestión de si es posible convertir definiciones impropias en definiciones propias mediante la omisión de axiomas. En el caso del ejemplo 1 esto es fácil de hacer; pero no está claro que ello resulte siempre constructivamente posible [52].

3. Equivalencia producida

Consideramos ahora la equivalencia producida por los axiomas definidores de una extensión definicional. Y nos preguntamos si esa relación tiene las propiedades que normalmente esperamos tenga la relación de identidad por definición. Los teoremas siguientes nos dan una respuesta parcial [53].

Teorema 1. *Sea $\mathfrak{S}_1$ una extensión definicional propia de $\mathfrak{S}_0$, y sea $\mathfrak{E}$ el conjunto de sus axiomas definidores. El infijo '$\equiv$' indica la equivalencia monótona producida por $\mathfrak{E}$. Si*

$$X \equiv Y. \tag{6}$$

entonces, si X o Y tiene un definiens último, el otro también lo tiene, y precisamente el mismo.

---

[52] Puesto que la función μ y todas las funciones recursivas-primitivas de los números naturales pueden definirse propiamente, se sigue que lo mismo es verdad de todas las funciones recursivas numéricas (cfr. Corolario 4.4 infra). Para un $\mathfrak{S}_0$ cualquiera, podemos concebir una máquina que produzca un conjunto de axiomas sin solapamiento, pero no está claro que el conjunto de axiomas así producido sea determinado, a menos que la extensión sea completa. Para definiciones univalentes esa máquina no nos dirá si en un conjunto de axiomas con el mismo definiendum hay uno cuyo definiens tenga un valor, ni nos dirá, por tanto, cuáles hay que descartar.

[53] El teorema § 4B4 da una respuesta más completa. La demostración de ese teorema es independiente de ésta, pero más avanzada.

Demostración. Puesto que $\equiv$ es simétrica, podemos suponer que X tiene el definiens último A, y mostrar que Y también lo tiene.

Supongamos, para empezar, que Y procede de X por subrogación de un componente U de X por V, siendo U y V los dos lados de un axioma del tipo (1). Sea $\mathfrak{D}$ una reducción de X a A. De la argumentación del § 1 se sigue que en el curso de esta reducción U tiene que ser reducido a un definiens último, B. Si U es el definiendum de un axioma (1), entonces V es definiens del axioma único determinado por U, y la reducción de U a B presupone una reducción de V a B. En el otro caso, es decir, si U es el lado derecho de un tal axioma, V se reduce a B mediante una reducción que toma precisamente ese axioma como axioma principal. Y como X e Y no difieren más que en U y V, $\mathfrak{D}$ puede trasformarse paso a paso en una reducción de Y a A.

En el caso general, de los teoremas de § D se sigue que habrá una secuencia $X_0, X_1, \ldots, X_n$ tal que X_0 es X, X_n es Y y X_{k+1} procede de X_k mediante una subrogación de las que hemos considerado en el párrafo anterior. Basta entonces mostrar, por inducción sobre k, que $X_k \; \boldsymbol{D} \; A$ para todo k. El paso básico se sigue por hipótesis, y el paso inductivo por lo dicho en el párrafo anterior. Esto completa la demostración.

COROLARIO 1.1. *Bajo las hipótesis del teorema, sea X un ob de $\mathfrak{S}_1$ y A un ob básico tal que $X \equiv A$. Entonces, $X \; \boldsymbol{D} \; A$.*

Demostración. Este resultado se obtiene tomando como Y a A, y utilizando el hecho de que A es su propio definiens último.

COROLARIO. 1.2. *Si A y B son obs básicos y $A \equiv B$, entonces A y B son el mismo ob.*

OBSERVACIÓN 1. El ejemplo 1 muestra que el teorema 1 no es verdadero, sino restringido a extensiones propias. Pues en el ejemplo 1 se tiene $\varphi\,(0') \equiv 0$, pero no $\varphi\,(0') \; \boldsymbol{D} \; 0$. Sin duda, el teorema 1 puede demostrarse bajo hipótesis más generales, siempre que podamos probar que U y V se reducen ambos al mismo B. Pero es dudoso que pueda llamarse definición a una extensión para la cual no se cumpla el teorema 1.

Si $\mathfrak{S}_1$ es completo, pero no necesariamente propio, puede mostrarse que (6) se cumple si —y sólo si— X e Y tienen el mismo valor.

4. DEFINICIONES RELATIVAS

En la práctica solemos hacer definiciones basándonos en otras previas. Vamos a analizar aquí este proceso, derivando para él teoremas análogos a los lemas dados por Kleene[54] en apoyo de su teorema II.

[54] [IMM], págs. 267-270.

Examinemos primero intuitivamente el proceso. Supongamos que estamos definiendo ciertas operaciones φ_i a base de operaciones ψ_j. Esto significa que estaremos estableciendo axiomas del tipo (1) en los cuales las operaciones principales son las φ, mientras que en el lado derecho pueden aparecer tanto las φ cuanto las ψ. Para poder llevar a cabo una valoración en estas circunstancias tenemos que saber algo sobre las ψ. Estas no son operaciones básicas, pero se presumen definidas como obs en algún sistema $\mathfrak{S}_1$ (tal vez desconocido).

Al definir las φ por referencia a las ψ no estamos llevando a cabo una extensión definicional $\mathfrak{S}_2$ de $\mathfrak{S}_1$ tomado como sistema básico. Esto, en efecto, significaría que las A de (1) serían obs de $\mathfrak{S}_1$. De todos modos, desde el punto de vista de $\mathfrak{S}_0$, los obs de $\mathfrak{S}_1$ que tienen el mismo valor en $\mathfrak{S}_0$ no son obs diferentes, sino diferentes presentaciones de los mismos obs; y no podemos adoptar libre y arbitrariamente definiciones para los obs de $\mathfrak{S}_1$.

Para ser coherentes con nuestro punto de vista intuitivo tendremos que suponer que las ψ están dadas intuitivamente. Esto significa la presunción de conocer cómo se valora en $\mathfrak{S}_0$ cualquier ob simple de $\mathfrak{S}_1$. Dicho de otro modo, tomamos como dadas todas las relaciones relevantes de la forma

$$\psi_j (C_1, ..., C_p) \, \boldsymbol{D} \, C_{p+1}, \tag{7}$$

siendo $C_1, ..., C_p$ obs básicos dados.

Ahora bien, dadas las relaciones (7), ellas, junto con los axiomas definidores de las φ, constituyen un conjunto de axiomas definidores de una extensión definicional $\mathfrak{S}_2$ (de $\mathfrak{S}_0$, no de $\mathfrak{S}_1$). Pero, en general, esa extensión tendrá un carácter complejo, no-finitista, que resulta indeseable. Si adoptamos el punto de vista de Kleene, según el cual los axiomas tienen que obtenerse de un número finito de esquemas axiomáticos, éste no será, generalmente, el caso con los axiomas del tipo (7). Supongamos, empero, que descubrimos un sistema $\mathfrak{S}_1$ que define las ψ de un modo satisfactorio. Podemos entonces formar una extensión $\mathfrak{S}_3$ añadiendo a $\mathfrak{S}_1$ los axiomas definidores de las φ. Resultará entonces natural preguntarnos cuáles serán las relaciones entre $\mathfrak{S}_2$ y $\mathfrak{S}_3$. El teorema 3 contesta a esto.

Con lo dicho puede bastar por lo que hace a la base intuitiva. Pasaremos ahora a exponer algunos elementos de notación. Vamos a ocuparnos de varios sistemas $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, ...$, todos los cuales son extensiones definicionales de $\mathfrak{S}_0$. Estas extensiones están especificadas unívocamente

por sus nuevas operaciones [55] y por sus axiomas definidores. Convenimos para todo este contexto en que, para todo k, $\mathfrak{E}_k$ serán los axiomas definidores de $\mathfrak{S}_k$, y que $\mathfrak{E}_k'$, $\mathfrak{E}_k''$, etc., serán subconjuntos de $\mathfrak{E}_k$. Designaremos el conjunto de obs de una extensión con el mismo símbolo que usamos para el sistema correspondiente. Por último, usaremos los símbolos corrientes de la teoría de conjuntos, y con sus significados habituales, a saber: 'ε' (pertenencia), '$\subseteq$' (inclusión), '$\cup$' (unión), '$\cap$' (intersección), '—' (diferencia). Usaremos también '=' entre conjuntos para designar la identidad de conjuntos.

Antes de enfrentarnos con el teorema 3 demostraremos un teorema preliminar, el 2, y estableceremos una definición formal, la 1. Luego del teorema 3 estudiaremos la iteración del proceso en el teorema 4 y obtendremos algunas conclusiones por lo que hace a las definiciones recursivas.

Los teoremas de este artículo no son ulteriormente utilizados en este volumen; pero pertenecen lógicamente a esta sección, y serán necesarios en el segundo volumen que nos proponemos publicar.

TEOREMA 2. [56] *Sean dados* $\mathfrak{S}_1$ *y* $\mathfrak{S}_2$, *y sean derivables en* $\mathfrak{S}_1$ *todos los enunciados de* $\mathfrak{E}_2$, *cuyas operaciones principales están en* $\mathfrak{S}_1$. *Sea* (3) *derivable en* $\mathfrak{S}_2$, *y esté* X *en* $\mathfrak{S}_1$. *Entonces* (3) *es derivable en* $\mathfrak{S}_1$.

Demostración. Sea $\mathfrak{D}$ una reducción de X a Y en $\mathfrak{S}_2$. Dispongamos los nodos de $\mathfrak{D}$ en una secuencia normal (§ B1) $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{T}_1$, ..., $\mathfrak{T}_n$. Entonces $\mathfrak{T}_0$ es el axioma principal; si $\mathfrak{T}_k$ es una premisa mayor, $\mathfrak{T}_{k+1}$ será el axioma principal de la parte de $\mathfrak{D}$ que termina en la premisa menor de esa misma contracción; si $\mathfrak{T}_k$ es una premisa menor, entonces $\mathfrak{T}_{k+1}$ es la conclusión de dicha contracción. Mostraremos por inducción sobre k que todo $\mathfrak{T}_k$ es derivable en $\mathfrak{S}_1$. El paso básico está claro, pues $\mathfrak{T}_0$ es o bien un caso de (ρ) o bien un axioma de $\mathfrak{E}_2$ cuya operación principal está en $\mathfrak{S}_1$. Supongamos ahora que $\mathfrak{T}_i$ está en $\mathfrak{S}_1$, para $i \leq k$. Si $\mathfrak{T}_k$ es una premisa mayor, entonces $\mathfrak{T}_{k+1}$ es un axioma de $\mathfrak{E}_2$ cuya operación principal está en $\mathfrak{T}_k$, y, por tanto, en $\mathfrak{S}_1$; por tanto, $\mathfrak{T}_{k+1}$ es derivable en $\mathfrak{S}_1$. Si $\mathfrak{T}_k$ es una premisa menor, la premisa mayor será algún $\mathfrak{T}_i$ con $i < k$, puesto que las dos premisas están en $\mathfrak{S}_1$, también lo estará $\mathfrak{T}_{k+1}$. Esto completa la demostración.

OBSERVACIÓN 1. Si $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2$, estamos ante un caso especial más bien trivial.

DEFINICIÓN 1. Sea $\mathfrak{S}_1$ una extensión definicional de $\mathfrak{S}_0$, y sea $\mathfrak{P}$ un conjunto de nuevas operaciones, llamadas *operaciones dadas*, de $\mathfrak{S}_1$.

---

[55] Estas pueden considerarse también como operaciones principales de los axiomas definidores.

[56] Cfr. Kleene [IMM], pág. 268, lema IIb.

Entonces $\mathfrak{S}_1$ es una *extensión de* $\mathfrak{S}_0$ *respecto de* $\mathfrak{P}$ si —y sólo si— $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_1' \cup \mathfrak{E}_1''$, siendo $\mathfrak{E}_1'$ un conjunto de axiomas de la forma (7), con $\psi_j \in \mathfrak{P}$, sin que las operaciones principales de $\mathfrak{E}_1''$ estén en $\mathfrak{P}$. Llamamos a $\mathfrak{E}_1'$ los *axiomas dados*, y a $\mathfrak{E}_1''$ los *axiomas definidores de* $\mathfrak{S}_1$ *respecto de* $\mathfrak{P}$. Relativizamos de un modo que creemos obvio a un tal $\mathfrak{P}$ dado varios otros conceptos, como los de propiedad y recursividad.

TEOREMA 3.[57] *Sea* $\mathfrak{S}_1$ *una extensión definicional de* $\mathfrak{S}_0$, *y sea* $\mathfrak{P}$ *un conjunto de operaciones de* $\mathfrak{S}_1$. *Sea* $\mathfrak{S}_2$ *una extensión definicional de* $\mathfrak{S}_0$ *respecto de* $\mathfrak{P}$, *y sea* $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 \subseteq \mathfrak{P}$. Sea $\mathfrak{E}_2'$ *los axiomas dados, y* $\mathfrak{E}_2''$ *los axiomas definidores respecto de* $\mathfrak{P}$, *unos y otros de* $\mathfrak{S}_2$. *Contenga* $\mathfrak{S}_3$ *precisamente las operaciones de* $\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2$, *y sea* $\mathfrak{E}_3 = \mathfrak{E}_1 \cup \mathfrak{E}_2''$. *Sea* $X \in \mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_1$. *Entonces*:

(I) *Si los axiomas de* $\mathfrak{E}_2'$ *son derivables en* $\mathfrak{S}_1$, *entonces* (3) *vale en* $\mathfrak{S}_2$ *sólo si vale en* $\mathfrak{S}_3$.

(II) *Si* $\mathfrak{E}_2'$ *contiene todos los enunciados de la forma* (7) *que son derivables en* $\mathfrak{S}_1$ *y se presentan como nodos en la reducción dada de* X *a* Y *en* $\mathfrak{S}_3$, *entonces* (3) *vale en* $\mathfrak{S}_3$ *sólo si vale en* $\mathfrak{S}_2$.

Demostración de (I). Puesto que todos los enunciados de $\mathfrak{E}_2$ son derivables en $\mathfrak{S}_3$ por el teorema 2, podemos inferir (I) de dicho teorema identificando el $\mathfrak{S}_1$ del mismo con el presente $\mathfrak{S}_3$.

Demostración de (II). Sea $\mathfrak{D}$ la reducción dada de X a Y en $\mathfrak{S}_3$. Sea $\mathfrak{T}_0, \ldots, \mathfrak{T}_n$ la secuencia determinada como en el teorema 2. Mostraremos por inducción sobre k, que todo $\mathfrak{T}_k$ es o bien: (a) derivable en $\mathfrak{S}_2$, o bien (b) situado por encima de algún enunciado de la forma (7). Obsérvese que todo nodo de la forma (7) que se presente en $\mathfrak{D}$ es derivable en $\mathfrak{S}_1$ por el teorema 2; por tanto, por la hipótesis (II), un tal nodo está en $\mathfrak{E}_2'$, y es, por tanto, derivable en $\mathfrak{S}_2$.

Si $\mathfrak{T}_0$ es un caso de (ρ), es derivable en $\mathfrak{S}_2$. Si no, tiene que ser uno de los axiomas $\mathfrak{E}_2''$, y es, por tanto, también, en este caso, derivable en $\mathfrak{S}_2$. Esto completa el paso básico.

Si $\mathfrak{T}_k$ es una premisa mayor y satisface la condición (b), la premisa menor, y todo lo que esté por encima de ella, incluyendo a $\mathfrak{T}_{k+1}$, tiene que satisfacer también a (b). Si $\mathfrak{T}_k$ es derivable en $\mathfrak{S}_2$, la operación contracta tiene que estar en $\mathfrak{S}_2$. Si no está en $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{T}_{k+1}$ es un axioma de $\mathfrak{E}_2''$, y es, por tanto, derivable en $\mathfrak{S}_2$. Si está en $\mathfrak{S}_1$, la premisa menor es de la forma (7); por tanto, o bien $\mathfrak{T}_{k+1}$ satisface la condición (b) o bien es él mismo de la forma (7), y, por tanto, derivable en $\mathfrak{S}_2$.

Si $\mathfrak{T}_k$ es una premisa menor, sea $\mathfrak{T}_i$ ($i < k$) la premisa mayor de la misma contracción. Si una de las dos, $\mathfrak{T}_i$ o $\mathfrak{T}_k$, satisfacen a (b), satis-

---

[57] Cfr. Kleene, *loc. cit.*, lema II c.

farán las dos esa condición; y $\mathfrak{T}_{k+1}$ o bien satisface (b) o es él mismo de la forma (7), y satisface así la condición (a). Si ambos $\mathfrak{T}_i$ y $\mathfrak{T}_k$ satisfacen la condición (a), también lo hará $\mathfrak{T}_{k+1}$.

Esto completa la demostración de que todo $\mathfrak{T}_k$ satisface a (a) o a (b). En la rama principal queda excluida la posibilidad (b), puesto que X no está en $\mathfrak{S}_1$. Por tanto, (3) es derivable en $\mathfrak{S}_2$, q. e. d.

Este teorema es, sobre todo, interesante en el caso de que se cumplan simultáneamente las hipótesis (I) y (II) sobre $\mathfrak{E}_2'$. Este caso lleva al siguiente corolario:

COROLARIO 3.1. *Bajo la hipótesis del teorema, si* $\mathfrak{E}_2'$ *consta de todos los enunciados de la forma* (7), *con* ψ_j *que está en* $\mathfrak{P}$, *que son derivables en* $\mathfrak{S}_1$, *entonces* (3) *vale en* $\mathfrak{S}_3$ *si —y sólo si— vale en* $\mathfrak{S}_2$.

TEOREMA 4. *Sean* $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, ..., $\mathfrak{S}_n$ *extensiones definicionales de* $\mathfrak{S}_0$, *tales que todo* $\mathfrak{S}_k$, *para* $k > 1$, *es una extensión respecto de un conjunto* $\mathfrak{P}_k$ *de operaciones. Sea* $\mathfrak{S}_k^*$ *el conjunto que contiene precisamente las operaciones de* $\mathfrak{S}_1$, ..., $\mathfrak{S}_k$, *y supóngase que* $\mathfrak{S}_{k+1} \cap \mathfrak{S}_k^* \subseteq \mathfrak{P}_{k+1} \subseteq \mathfrak{S}_k^*$. *Sean* $\mathfrak{E}_k^*$ *los axiomas definidores de* $\mathfrak{S}_k^*$, *con* $\mathfrak{E}_1^* = \mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_{k+1}^* = \mathfrak{E}_k^* \cup \mathfrak{E}_{k+1}''$. *Para cada* ψ *de* $\mathfrak{P}_k$, *sea i el subíndice tal que* ψ *está en* $\mathfrak{S}_i - \mathfrak{S}_{i-1}^*$ *sea entonces* $\mathfrak{E}_k'$ *el conjunto que contiene todos y sólo los axiomas sobre* ψ *que son derivables en el correspondiente* $\mathfrak{S}_i$. *Esté* X *en* $\mathfrak{S}_m - \mathfrak{S}_{m-1}^*$ $(m \leq n)$. *Entonces* (3) *vale en* $\mathfrak{S}_n^*$ *si —y sólo si— vale en* G_m. [58]

Demostración. Por el teorema 2 basta con considerar el caso $n = m$. Lo trataremos por inducción sobre m. Para $m = 2$, el teorema es verdadero por el corolario 3. 1. Para el paso inductivo suponemos que el teorema es verdadero sustituyendo m y n por cualquier k con $k < m$.

Por hipótesis, todo axioma de $\mathfrak{E}_m'$ es derivable en algún $\mathfrak{S}_k$, con $k < m$, tal que $\psi \epsilon \mathfrak{S}_k - \mathfrak{S}_{k-1}^*$. Por la hipótesis inductiva, este axioma es derivable en $\mathfrak{S}_k^*$, y, por tanto, en $\mathfrak{S}_{m-1}^*$. A la inversa, sea una ecuación (7) con ψ en $\mathfrak{P}_m$ derivable en $\mathfrak{S}_{m-1}^*$. Hay entonces un único $k < m$ tal que $\psi \epsilon \mathfrak{S}_k - \mathfrak{S}_{k-1}^*$. Por el teorema 2 el axioma en cuestión es derivable en $\mathfrak{S}_k^*$ y, por tanto, por la hipótesis inductiva, en $\mathfrak{S}_k$. Esto muestra que el axioma está en $\mathfrak{E}_m'$.

Estas consideraciones muestran que las hipótesis del corolario 3. 1 quedan satisfechas si identificamos los $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ de allí con los $\mathfrak{S}_{m-1}^*$, $\mathfrak{S}_m$, $\mathfrak{S}_m^*$ de aquí, respectivamente. La conclusión del teorema 4 se sigue entonces por aquel corolario.

COROLARIO 4.1. *Sean dadas las hipótesis del teorema* 4. *Sea* $\varphi \epsilon \mathfrak{S}_m - \mathfrak{S}_{m-1}^*$. *Entonces* φ *está completamente* (*univalentemente*) *definida en*

---

[58] Cfr. Kleene, *loc. cit.*, lemas II d y IIe. Para $\mathfrak{E}_k'$, $\mathfrak{E}_k''$ cfr. Def. 1.

$\mathfrak{S}_n^*$ *si —y sólo si— está completamente (univalentemente) definida en* $\mathfrak{S}_m$.

Demostración. El teorema muestra que cuando φ tiene un valor en $\mathfrak{S}_n^*$, tiene el mismo valor en $\mathfrak{S}_m$, y viceversa.

COROLARIO 4.2. *Sean dadas las hipótesis del corolario* 4.1. *Sean los axiomas de cada* $\mathfrak{E}_k''$ *obtenibles de un conjunto finito de esquemas axiomáticos. Entonces* φ *es recursiva (parcial) en* $\mathfrak{S}_n^*$ *si —y sólo si— es recursiva (parcial) respecto de* $\mathfrak{P}_m$ *en* $\mathfrak{S}_m$.

OBSERVACION 2. No hemos dicho nada acerca de las funciones intermedias. Estas pueden no ser siquiera univalentes, como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2. Sea $\mathfrak{S}_1$ el sistema que define la función numérica ψ mediante los axiomas

$$\psi(0) = 1$$
$$\psi(x) = 0 \qquad\qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Sea $\mathfrak{S}_2$ el sistema que define a φ respecto de ψ del modo siguiente:

$$\varphi(x) = \psi(x').$$

Entonces φ es recursiva en $\mathfrak{S}_2^*$.

En el anterior tratamiento no había razón alguna para que el propio $\mathfrak{S}_1$ no fuera él mismo relativo a ciertas operaciones dadas $\mathfrak{P}_1$, excepto por el hecho de que no podemos exigir que las operaciones de $\mathfrak{P}_1$ estén en $\mathfrak{S}_0$. Este cambio afecta sólo al corolario 4.2., y nos da en su lugar el siguiente:

COROLARIO 4.3. *Sean dadas las hipótesis del corolario* 4.1. *Sea* $\mathfrak{S}_1$ *relativo a un conjunto* $\mathfrak{P}_1$ *de operaciones, y sean* $\mathfrak{E}_1'$, $\mathfrak{E}_1''$ *como en la definición* 1. *Sea cada* $\mathfrak{E}_k''$ *producido a partir de un conjunto finito de esquemas axiomáticos. Entonces* φ *es recursiva (parcial) en* $\mathfrak{S}_n^*$ *respecto de* $\mathfrak{P}_1$ *si —y sólo si— es recursiva (parcial) en* $\mathfrak{S}_m$ *respecto de* $\mathfrak{P}_m$.

COROLARIO 4.4. *Sean dadas las hipótesis del teorema* 4. *Sean propios los conjuntos* $\mathfrak{E}_k''$. *Entonces* $\mathfrak{S}_n^*$ *es propio.*

5. DEFINICIONES RECURSIVAS-PRIMITIVAS

Consideraremos aquí formas de definiciones que son análogas a las definiciones recursivas-primitivas de la aritmética común. En este artículo $\mathfrak{A}$ son los átomos y $\mathfrak{O}$ las operaciones primitivas de $\mathfrak{S}_0$, y suponemos, como en § D1, que $\mathfrak{O}$ consta de las operaciones ω_1, ω_2, ..., siendo ω_k de grado n_k.

DEFINICIÓN 2. Sea $\mathfrak{S}_1$ una extensión de $\mathfrak{S}_0$, y $\mathfrak{P}$ un conjunto de nuevas operacions de $\mathfrak{S}_1$. Entonces una extensión $\mathfrak{S}_2$ de $\mathfrak{S}_1$ se llama *una extensión por un esquema recursivo-primitivo* respecto de $\mathfrak{P}$ cuando se cumplen las siguientes condiciones: hay en $\mathfrak{P}$ una operación monádica ψ, definida completamente para los átomos de $\mathfrak{S}_0$, y para cada ω_k hay una operación χ_k de grado 2_{n_k} que está completamente definida para todos los obs básicos y tal que los axiomas definidores de $\mathfrak{S}_2$ respecto de $\mathfrak{P}$ son los dados por los dos esquemas axiomáticos siguientes [59]:

(8) $\qquad \varphi(x) \; \boldsymbol{D} \; \psi(x) \qquad\qquad$ para $x \in \mathfrak{A}$,

(9) $\qquad \varphi(\omega_k(x_1, \ldots, x_{n_k})) \; \boldsymbol{D} \; \chi_k(x_1, \ldots, x_{n_k}, \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{n_k}))$.

La definición de la sustitución en § C2 es un ejemplo de una tal definición recursiva-primitiva.

TEOREMA 5. *Toda extensión respecto de $\mathfrak{P}$ por medio de un esquema primitivo-recursivo es recursiva respecto de $\mathfrak{P}$.*

Demostración. Está claro que los axiomas referentes a $\mathfrak{P}$ están dados por un número finito de esquemas axiomáticos, a saber, los esquemas (8) y (9). Vamos a mostrar por inducción estructural que para todo ob básico A hay un ob básico B, y sólo uno, tal que

(10) $\qquad \varphi(A) \; \boldsymbol{D} \; B.$

Si A es un átomo, entonces, por (8), tenemos (10) con $\psi(A)$, expresión definida por hipótesis de un modo unívoco, para B. De (8) no puede obtenerse ningún otro valor, y de (9) no puede obtenerse ninguno, por el postulado de que obs construidos de modos diferentes son obs diferentes.

Sea A un ob compuesto. Entonces, por la misma exigencia de univocidad de la construcción, habrá una ω_k única y una secuencia única $A_1, \ldots, A_{n_k}$ tal que A es $\omega_k(A_1, \ldots, A_{n_k})$. Hay entonces un único axioma aplicable del esquema (9), y ninguno del esquema (8). Por hipótesis inductiva hay un único valor, B_i, para toda $\varphi(A_i)$. Consiguientemente, hay un único valor para A, a saber:

$$\chi_k(A_1, \ldots, A_{n_k}, B_1 \ldots, B_{n_k}).$$

Esto completa la demostración del teorema 5. Evidentemente, po-

[59] Las cursivas minúsculas son variables intuitivas con los obs básicos como campo.

demos tratar de un modo parecido extensiones conseguidas mediante esquemas análogos a (8) y (9), usando parámetros.

Otro tipo de esquema permitido en la aritmética recursiva-primitiva es el de la definición explícita. Normalmente una tal definición se consigue mediante un esquema axiomático simple de la forma

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) \; D \; \mathfrak{X}, \tag{11}$$

siendo $\mathfrak{X}$ una combinación de $\mathfrak{A}$ y $x_1, \ldots, x_m$ mediante $\mathfrak{O}$ y las operaciones dadas de $\mathfrak{P}$. Por inducción estructural sobre $\mathfrak{X}$ se sigue entonces que una tal definición es recursiva respecto de $\mathfrak{P}$ si estas últimas están completamente definidas. Con esto y el corolario 4.3 obtenemos el siguiente [60]:

TEOREMA 6. *Sean* $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n$ *como en el teorema* 4, *y sea* $\mathfrak{S}_1$ *una extensión respecto de ciertas operaciones completamente definidas* $\mathfrak{P}_1$. *Sea cada* $\mathfrak{S}_k$ *el sistema obtenido, respecto de* $\mathfrak{P}_k$, *por un esquema primitivo-recursivo* [61] *o mediante una definición explícita de la forma* (11). *Sea* $\varphi \in \mathfrak{S}_m - \mathfrak{S}_{m-1}{}^*$. *Entonces* φ *es recursiva respecto de* $\mathfrak{P}_1$.

6. CARACTER MONÓTONO DE LAS OPERACIONES PRIMITIVO-RECURSIVAS.

Si el sistema básico contiene una relación monótona cuasi-ordenadora $\boldsymbol{R}$, y si φ es una operación definida, no se sigue sin más que φ vaya a ser monótona respecto de $\boldsymbol{R}$. Así, en la aritmética ordinaria hay funciones recursivas-primitivas que no son monótonas respecto de $\leq$. Vamos a demostrar aquí un teorema que da las condiciones suficientes para que una función φ introducida mediante un esquema recursivo-primitivo sea monótona respecto de $\boldsymbol{R}$.

TEOREMA 7. *Sea* $\mathfrak{S}_0$ *un sistema que tiene la relación monótona cuasi-ordenadora* $\boldsymbol{R}$, *producida por* $\boldsymbol{R}_0$. *Sea* φ *una función definida respecto de las operaciones* ψ, χ_k, *satisfaciendo las condiciones del teorema* 5 *según los esquemas* (8) *y* (9). *Establezcamos que* $X \; \boldsymbol{R} \; Y$ *vale si —y sólo si —*X *e* Y *tienen valores* A *y* B, *respectivamente, tales que* $A \; \boldsymbol{R} \; B$. *Sea*

$$x \; \boldsymbol{R}_0 \; y \rightarrow \varphi(x) \; \boldsymbol{R} \; \varphi(y), \tag{12}$$

---

[60] Es necesario para la demostración usar inducción sobre k para mostrar que las $\mathfrak{P}_k$ están completamente definidas.

[61] Incluyendo, si se desea, recursiones con parámetros.

y sean las operaciones χk *monótonas respecto de todos sus argumentos. Entonces*

$$x \, \boldsymbol{R} \, y \rightarrow \varphi(x) \, \boldsymbol{R} \, \varphi(y). \tag{13}$$

Demostración. Sea $\boldsymbol{S}$ la relación definida por

$$x \, \boldsymbol{S} \, y \rightleftarrows x \, \boldsymbol{R} \, y \; \& \; \varphi(x) \, \boldsymbol{R} \, \varphi(y) \tag{14}$$

$\boldsymbol{S}$ tiene entonces las propiedades (ρ) y (τ) (y también la propiedad (σ) si $\boldsymbol{R}$ la tiene). Por (12) tiene, además, la propiedad (ϵ).

Para mostrar que $\boldsymbol{S}$ tiene la propiedad Subr, sea $\omega_k^*(x)$ la operación ω_k, pero considerada como operación sólo sobre uno de sus argumentos, y sea la función $\chi_k^*(x, \varphi(x))$ la función χ_k, pero considerada como función del par correspondiente x, $\varphi(x)$. Entonces, puesto que por (9) y por el teorema 5 $\varphi(\omega_k^*(x))$ y $\chi_k^*(x, \varphi(x))$ son el mismo ob básico, se sigue de (ρ) que

$$\begin{aligned} &\varphi(\omega_k^*(x)) \, \boldsymbol{R} \, \chi_k^*(x, \varphi(x)), \\ &\chi_k^*(y, \varphi(y)) \, \boldsymbol{R} \, \varphi(\omega_k^*(y)). \end{aligned} \tag{15}$$

Supongamos ahora $x \, \boldsymbol{S} \, y$, es decir,

$$x \, \boldsymbol{R} \, y \; \& \; \varphi(x) \, \boldsymbol{R} \, \varphi(y). \tag{16}$$

Entonces, por el carácter monótono de χ_k,

$$\chi_k^*(x, \varphi(x)) \, \boldsymbol{R} \, \chi_k^*(y, \varphi(y)). \tag{17}$$

De aquí, por (15) y (τ),

$$\varphi(\omega_k^*(x)) \, \boldsymbol{R} \, \varphi(\omega_k^*(y)).$$

Por otra parte, puesto que $\boldsymbol{R}$ es monótona,

$$\omega_k^*(x) \, \boldsymbol{R} \, \omega_k^*(y).$$

De estas dos últimas relaciones y de (14):

$$\omega_k^*(x) \, \boldsymbol{S} \, \omega_k^*(y).$$

Esto muestra que $\boldsymbol{S}$ tiene la propiedad Subr.

Por inducción deductiva tenemos

$$x\,\boldsymbol{R}\,y \rightarrow x\,\boldsymbol{S}\,y,$$

lo cual, teniendo en cuenta (14), prueba (13).

7. Relativización de obs

Es interesante para ciertos fines considerar la anterior teoría no para todos lo obs de $\mathfrak{S}_0$, sino para las combinaciones de un conjunto dado de cuasi-átomos por medio de un conjunto de operaciones $\mathfrak{O}$. Esto puede, evidentemente, hacerse si esas combinaciones pueden tomarse como obs de otro sistema formal, $\mathfrak{S}_0'$. En § C mencionamos casos en los cuales esta situación es de algún interés.

La condición esencial de este proceder es que cada combinación tenga una construcción única. Hemos visto en § B2 que éste no es siempre el caso. Pero la demostración inductiva de § 5 sugiere la formulación de estas dos *condiciones de independencia*, ambas necesarias y suficientes para este carácter único de la construcción: (a) ningún ob de $\mathfrak{A}$ es de la forma $\omega_k\ (A_1, \ldots, A_m)$; y (b) si un ob B es de la forma $\omega_k\ (A_1, \ldots, A_m)$, tanto ω_k cuanto los argumentos están determinados de un modo unívoco por B.

Las condiciones de independencia recuerdan uno de los postulados de Peano para la aritmética. Terminaremos este capítulo disponiendo en paralelismo, pero sin ulterior comentario, una formulación de los postulados de Peano y cinco enunciados análogos acerca de cualquier sistema formal.

Los postulados de Peano pueden formularse del modo siguiente:

1) 0 es un número.
2) Si x es un número, x' es un número.
3) 0 es distinto de todo x'.
4) Si $x' = y'$, entonces $x = y$.
5) Todo número se obtiene a partir de 0 por iteración de la operación 'el siguiente'.

Los enunciados correspondientes para todo sistema formal son:

1) Todo átomo es un ob.
2) Las operaciones combinan obs para formar otros obs.
3) Ningún ob compuesto es un átomo.

4) Para todo ob compuesto la operación y los argumentos están determinados unívocamente.

5) Los obs son una clase inductiva, producida a partir de los átomos por las operaciones.

Los principios 3) y 4) corresponden a las condiciones (a) y (b) de antes.

S. TEMAS SUPLEMENTARIOS

Las observaciones hechas en § 1S se refieren a este capítulo tanto cuanto al capítulo 1. Las observaciones siguientes las suplementan en cuanto se refiere a la epiteoría.

1. Comentario histórico

La noción de epiteoría se remonta a la metamatemática de Hilbert. En las referencias de § 1S1 se encontrará una exposición general de la misma.

La concepción hilbertiana de la matemática tenía un sesgo lingüístico. Hilbert considera formalizada la metamatemática cuando se reduce a la manipulación de los símbolos del lenguaje A (en el sentido de § 1D4) según reglas prescritas. La metamatemática de Hilbert era una teoría intuitiva, finitista y constructiva (§ A2) de esa concreta actividad. Pero este aspecto lingüístico de la obra de Hilbert nos parece accidental. Hemos visto (§ 1C2) que toda presentación de un sistema formal es al mismo tiempo una representación, y que el modo como se representa un sistema formal no constituye ninguna diferencia esencial. Si nos interesa representar el sistema con términos de su propio lenguaje A tenemos esencialmente la concepción hilbertiana. El propio Hilbert resulta haber reconocido el carácter accidental de la representación lingüística. Parece haberla preferido por razones puramente psicológicas.

Por esta razón, en sus trabajos anteriores Curry identificó lo que aquí llamamos 'epiteoría' con la metamatemática de Hilbert, y en todas las publicaciones anteriores a [TFD] usó el término 'metateoría' en vez del de 'epiteoría'. Pero posteriormente otras tendencias de la investigación, especialmente las que proceden del círculo de Viena y de la escuela polaca, han insistido más en los aspectos lingüísticos. El resultado ha sido que Kleene en su [res. C] criticó el uso de 'meta-' por Curry como en discordancia con el uso corriente. Aunque creemos que Kleene se equivocaba al insinuar que la significación esencial de 'meta-' tal como lo usa Hilbert es la distinción entre lenguaje objeto y lenguaje sintáctico, de todos modos tenía seguramente razón por lo que hace al uso corriente del prefijo en la época. Por eso Curry introdujo en [TFD] el término 'epiteoría' que ha venido usando desde entonces. El prefijo 'meta-' se reserva ahora para cuestiones que hagan referencia explícita a metasistemas (§ 1S2). Así definida, la metateoría puede incluir la derivación explícita de enunciados elementales (para afirmar, por ejemplo, que tales concretas sentencias del lenguaje objeto son verdaderas) mediante la aplicación directa de las reglas; pero excepto por lo que hace a esa circunstancia, más bien trivial, la metateoría queda incluida en la epiteoría. Este último término no implica, ni excluye, referencia alguna a consideraciones lingüísticas.

Como se ha observado en § B2, la lógica combinatoria exige métodos epiteoréticos ya desde el primer momento. El número de pasos en una deducción formal explícita, aunque se trate de una inferencia sencilla, es tan grande [62] que sin esos métodos la

[62] Así, por ejemplo, en 1927 se halló que para pasar de un caso de $X = Y$ a uno de $Y = X$ hacen falta 54 pasos. Se usó, naturalmente, una forma más antigua de teoría. Pero la situación sería hoy análoga.

teoría sería completamente ininteligible. Por eso se ha prestado tanta atención a las cuestiones epiteoréticas en toda la historia de la lógica combinatoria (cfr. § 0D). El presente capítulo es resultado de esta circunstancia.

La primera versión de los capítulos **1** y **2** (escritos juntos, como un solo capítulo) se preparó en Lovaina en agosto de 1951. Esa fue la fuente de [DSR], preparado durante el invierno siguiente; el texto iba algo más allá que nuestro manuscrito de agosto de 1951 e incluía detalles no adecuados para ser publicados aquí. La presente versión revisada, preparada en septiembre de 1955, es una ampliación de [DSR], muy influida por Kleene [IMM] también [63].

2. Otras direcciones de la epiteoría

Este capítulo no discute más que algunas fases de la epiteoría que nos serán útiles más tarde. Se trata de temas principalmente referentes a la morfología de la teoría subyacente, y de los que, por tanto, podría decirse que pertenecen a su *epimorfología*. Vamos a mencionar ahora algunas otras corrientes de la epiteoría. Algunas de ellas nos ocuparán en ulteriores capítulos de esta obra; otras no se refieren a la lógica combinatoria sino lejanamente. La exposición será por vía de meros ejemplos, no exhaustiva. Ignoraremos la mayor parte de los desarrollos de la epiteoría aplicada a sistemas basados en el cálculo de predicados [64] o a sistemas de niveles lógicos altos.

a. *La metodología deductiva*

Entendemos por tal las investigaciones que formalizan la noción de deducibilidad o nociones de deducibilidad. El estudio [TFD], mencionando en § A3, estaba motivado por un deseo de formular una noción constructiva de la implicación epiteorética. La tesis de Gentzen [ULS] mostró cómo podía alcanzarse ese objetivo. Para la historia del desarrollo hasta aquel momento puede verse [TFD]; está en preparación una segunda edición que contiene un prólogo con el resumen del desarrollo posterior a 1950. En Kleene [IMM], capítulo XV, se encontrará una exposición independientemente de la tesis de Gentzen; véase también de Kleene [PIG], que supera a Curry [PRC]. Ha aparecido recientemente una traducción de la tesis de Gentzen al francés; cfr. Feys y Ladrière [RDL].

De naturaleza análoga es una parte de los trabajos de Tarski, Lorenzen, Schütte, etc. Cfr., por ejemplo, Tarski [FBM], Lorenzen [KBM]. La mayor parte del trabajo de estos autores pertenece a la lógica superior y no es, por tanto, relevante aquí. El libro de Lorenzen [EOL] no nos llegó con tiempo para poder tomarlo en cuenta.

b. *Consistencia*

El interés primario de Hilbert era demostrar la consistencia de una formalización de la matemática clásica. Su programa fracasó por razones que discutiremos en § c. Pero hay una literatura considerable acerca de resultados parciales, teoremas que muestran la consistencia de una teoría respecto de otra, etc. Algunos de esos resultados pueden obtenerse mediante modificaciones de la técnica de Gentzen.

Los teoremas de consistencia tienen cierta importancia en lógica combinatoria.

---

[63] También ha habido, naturalmente, influencia de trabajos de Kleene anteriores a su [IMM].

[64] Se encontrará un buen sumario de este campo tan amplio y activo en Mostowski [PSI].

La consistencia de la lógica combinatoria pura quedó establecida en [GKL]; pero la demostración que damos en el capítulo 4, debida a Church y Rosser [PCn], es más elegante. Varias demostraciones de consistencia para la lógica combinatoria ilativa se anunciaron en [ACT]; para la mayor parte de ellas tenemos que remitirnos al propuesto segundo volumen. No obstante, en el capítulo 10 obtendremos un teorema de consistencia para la teoría de la funcionalidad que es más fuerte que los anunciados en [ACT]. Todos los teoremas de consistencia para la lógica combinatoria ilativa descubiertos hasta ahora son combinaciones de la técnica de Gentzen con la del capítulo 4.

Pospondremos hasta § 8S3 toda consideración acerca de la relevancia filosófica de la consistencia.

c. *Gödelización*

Otra tendencia de la epiteoría es la representada por el célebre trabajo de Gödel [FUS]. Lo consideramos como un desarrollo natural de un teorema publicado unos quince años antes por Löwenheim. El teorema de Löwenheim dio lugar a una serie de investigaciones, entre otros de Skolem, las cuales mostraron que los sistemas axiomáticos que formalizan determinados tipos de teorías tienen interpretaciones de estructura completamente diversa de aquellas para las que fueron construidos inicialmente. El teorema de Gödel mostraba una forma de incompletud más fuerte, y constructivamente. Gödel mostró que en cualquier sistema formal que satisfaga ciertas amplias condiciones podemos construir, efectivamente, un enunciado elemental que no puede demostrarse, sin que tampoco pueda demostrarse su negación; mostró, además, que la consistencia del sistema puede formularse como un enunciado elemental de esta naturaleza. Consiguió estos resultados mediante la aritmetización de la "sintaxis" de la teoría; esto se basaba a su vez en estudios acerca de la definibilidad recursiva. Se trata, en realidad, de una representación en $\mathcal{N}_0$.

Este teorema alteró todo el carácter de la lógica. Mostraba que ninguna lógica lo suficientemente fuerte como para satisfacer fines matemáticos es susceptible de una demostración de consistencia por métodos permitidos por esa misma lógica; y mostró en particular que el objetivo de Hilbert no puede alcanzarse por ninguno de los sencillos métodos en que pensaba Hilbert. Para algunos, este resultado significa que siempre tenemos que depender de consideraciones empíricas para asegurarnos de la consistencia. Para otros, significa que ninguna formalización puede agotar los métodos de razonamiento que son intuitivamente seguros, y que siempre habrá modos de argumentación no formalizables, pero convincentes, exactamente igual que hay números irracionales. Este resultado influye considerablemente en la actitud filosófica que uno tome respecto de la consistencia (cfr. § 8C3).

El teorema de Gödel abrió, además, camino hacia importantes teoremas sobre indecidibilidad e irresolubilidad. Church [UPE] mostró la indecidibilidad de la lógica combinatoria pura, y casi inmediatamente después, en su [NEP] y en [CNE], la del cálculo de predicados elemental. Estos resultados estimularon grandemente el estudio de la aritmética recursiva, de los procedimientos de aritmetización, etc.

Los teoremas de este carácter no nos ocuparán en el presente volumen, a causa de la elementalidad de nuestras consideraciones. Pero en el propuesto segundo volumen, cuando tratemos las relaciones entre la lógica combinatoria y la aritmética, serán, sin duda, fundamentales. Allí tocaremos también el teorema de indecidibilidad de Church y las teorías de las funciones recursivas.

d. *Estructura algebraica*

Otra corriente consiste en el estudio de la estructura de los sistemas formales mediante métodos similares a los del álgebra abstracta.

Podemos definir un *homomorfismo* de un sistema $\mathfrak{S}$ sobre un sistema $\mathfrak{S}'$ como una proyección de los obs de $\mathfrak{S}$ sobre los de $\mathfrak{S}'$, tal que las operaciones y predicados (o, por lo menos, algunos de ellos y ellas) se conserven, y que cada ob de $\mathfrak{S}'$ sea la imagen de un ob de $\mathfrak{S}$ por lo menos. Un homomorfismo es, pues, un tipo especial de interpretación directa. Cuando existe, se llama a veces a $\mathfrak{S}'$ *modelo* de $\mathfrak{S}$.

Si $\mathfrak{S}'$ tiene una relación de igualdad, el homomorfismo define en $\mathfrak{S}$ una relación de equivalencia frecuentemente llamada *congruencia*, tal que dos obs son congruentes en $\mathfrak{S}$ si —y sólo si— sus imágenes son iguales en $\mathfrak{S}'$. (A menudo se dice, a la inversa, que una congruencia en $\mathfrak{S}$ define un homomorfismo de $\mathfrak{S}$ en el sistema $\mathfrak{S}'$ obtenido mediante la "identificación" de obs congruentes de $\mathfrak{S}$; pero puesto que obs construidos de modos diversos son siempre obs diversos, esta identificación es siempre cosa de interpretación.)

Si $\mathfrak{S}$ tiene la relación de equivalencia en cuestión, podemos definir un *ideal* en $\mathfrak{S}$ como un conjunto de obs mutuamente equivalentes que está cerrado bajo las operaciones de $\mathfrak{S}$ (o, por lo menos, bajo algunas de ellas). Si la equivalencia está definida por un homomorfismo, entonces la imagen de un ideal es un elemento que forma un ideal (es decir, un conjunto cerrado) por sí mismo; un tal elemento se llama *elemento de identidad.* Un ideal es, pues, un conjunto cuya imagen es un elemento de identidad.

Así se originan nociones familiares si $\mathfrak{S}$ es un anillo, grupo, etc. En el caso de un álgebra booleana, ello da nociones diferentes según como esté formulado el sistema. Si está formulado como un anillo, tenemos un caso especial de la situación algebraica; si está formulado como sistema con negación, la noción de ideal formulada mediante el homomorfismo es una noción vacía, puesto que en $\mathfrak{S}'$, salvo que sea trivial, no habrá elementos de identidad; si el sistema está formulado como un retículo distributivo con complemento relativo, tenemos entonces una amplia variedad, puesto que cada elemento es un elemento de identidad.

Estas nociones no han sido estudiadas para sistemas formales en general. Pero han sido de gran importancia para los sistemas basados en el cálculo de predicados.

e. *Metateoría*

No hay que olvidar, por último, los estudios de naturaleza metateorética, en el sentido estricto de § 1S2. La mayor parte de la literatura existente acerca de los anteriores temas está escrita desde un punto de vista lingüístico. Pero hay, además, estudios más estrictamente lingüísticos y de orientación más filosófica. Cfr. § 1S2.

Conversión lambda

Hemos visto en § 0C que la teoría de la conversión lambda ocupa una posición intermedia entre la lógica ordinaria y la teoría de combinadores, y que es conveniente empezar con ella el estudio de la lógica combinatoria. Por ello dedicaremos a dicha teoría el presente capítulo. Trataremos simultáneamente las varias formas que existen de conversión lambda, y por esta razón hablaremos indeferentemente de cálculo o de cálculos de conversión lambda.

Empezaremos (§ A) con una discusión intuitiva de las variables en la matemática (discusión que ampliará un tanto la ya realizada en § 0A y § 2C). Luego introduciremos la idea de abstracción funcional (§ B) y sus reglas; después, la operación de aplicación. Siguiendo la dirección que lleva de lo intuitivo a lo formal llegaremos al cálculo formulado como sistema formal en §§ C-D. La formulación plena del cálculo como sistema formal, incluirá, en § E, una teoría rigurosa de los prefijos de sustitución, para que la sustitución esté siempre definida; como cualquier clase de variables ligadas puede definirse a base de la abstracción funcional, esto simplificará la formulación de las reglas de sustitución en muchas teorías.

En el capítulo 5 se encontrarán ejemplos de la técnica de conversión λ. Dejamos para el capítulo 4 la formulación y la demostración del teorema de consistencia de Church y Rosser.

A. VARIABLES Y FUNCIONES EN MATEMATICA

En esta sección discutiremos intuitivamente el papel de las variables formales en matemática. Esta discusión puede compararse con las partes introductorias de varios trabajos de Church, con el tratamiento del mismo tema por Rosser [LMth] y con los escritos de Menger.

1. Ejemplos elementales

Por las dicusiones del capítulo 2 y de la introducción es evidente que las variables formales se emplean en los sistemas lógicos para indicar procesos de sustitución. La lógica combinatoria se interesa, pues, por el análisis de las variables formales y por su posible eliminación.

Puesto que las variables formales corresponden a los usos intuitivos de las variables en la matemática ordinaria, seguramente aclararemos un tanto las formulaciones de § 2C considerando algunos usos de variables de este tipo. Tomemos como ejemplos los enunciados siguientes:

(1a) $$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1,$$

(1b) x^2 es una función de x,

(1c) $$\frac{d}{dx} x^2 = 2x,$$

(1d) $$\int_0^3 x^2 dx = 9.$$

A propósito de esos enunciados se dice corrientemente que x es una variable. Pero, salvo, acaso, en el primer ejemplo, no podemos decir que el símbolo 'x' sea una variable intuitiva. Por otro lado, esas proposiciones no dicen nada ni sobre el símbolo 'x' ni sobre el objeto x, cualquiera que éste sea. Las variables son, pues, expedientes para enunciar teoremas acerca de ciertas otras cosas. Un poco de reflexión mostrará que esas otras cosas son funciones. Efectivamente, cada uno de los enunciados (1) expresa, una vez interpretado, una propiedad de una determinada función, la función cuadrado.

2. Necesidad de una notación funcional.

Es curioso que no exista en matemáticas corrientes una notación sistemática para las funciones. La notación habitual, '$f(x)$', no distingue entre la función misma y el valor de la función para un valor indeterminado del argumento. Este defecto es de especial importancia en teorías que emplean operaciones funcionales, es decir, funciones que admiten como argumentos otras funciones. Para ciertas operaciones, como la diferenciación y la integración, poseemos notaciones que tienen un

sentido unívoco; pero no tenemos tales notaciones para todas las operaciones en general.

Por ejemplo, en teorías que usan operadores abstractos P, Q, la aplicación del operador P a la función $f(x)$ se expresa frecuentemente por '$P[f(x)]$'. ¿Qué significa entonces '$P[f(x + 1)]$'? ¿Habrá que formular antes $g(x) = f(x + 1)$ y luego $P[g(x)]$? ¿O bien hay que formar antes $h(x) = P[f(x)]$ y luego $h(x + 1)$? Aunque para algunos operadores de importancia los dos procedimientos dan el mismo resultado, en el caso siguiente no tenemos esa univocidad. Sea

$$P[f(x)] = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} & \text{para } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{para } x = 0. \end{cases} \tag{2}$$

En este caso, si $f(x) = x^2$:

$$P[g(x)] = P[x^2 + 2x + 1] = x + 2,$$
$$h(x) = P[f(x)] = x,$$
$$h(x + 1) = x + 1 \neq P[g(x)]\ ^{1}.$$

3. La notación λ

Con objeto de procurarnos una notación sistemática para la función misma hay que recordar que una función es una ley de correspondencia, es decir, una clase de pares ordenados, y que para indicar la función tenemos que indicar los dos elementos de cada par. Si abreviamos por 'M' una expresión que contiene 'x' y que indica el valor de una función cuando el argumento tiene el valor x, escribiremos [2]

$$\lambda x(M) \tag{3}$$

para designar la función en sí misma. Así, pues, $\lambda x(x^2)$ es la función cuadrado, es decir, la función que tiene como valor x^2 si x es el valor del argumento. Pueden utilizarse abreviaturas obvias: puede escribirse

---

[1] En la literatura publicada —cfr. [ADO]— se presenta un error debido a esa ambigüedad.

[2] También se usan otras notaciones, por ejemplo, '$[x]M$', o '$\hat{x}M$' [PM], '$x \to M$' (H. T. Davis), '$[M]_x$' [ADO].

'$\lambda x x^2$' en vez de '$\lambda x(x^2)$' si no hay peligro de ambigüedad. También podemos usar un punto en vez de los paréntesis, y el alcance del punto se extenderá entonces hasta el final de la expresión funcional; por tanto, '$\lambda x.x+2$' es equivalente a '$\lambda x(x+2)$'.[3]

Ahora podemos hacer explícito el hecho de que los enunciados (1) se refieren a la función cuadrado, $\lambda x.x^2$. Supongamos que denotamos la diferenciación por 'D' y la integración por 'J'. Podemos entonces definir

$$\frac{d}{dx} M \equiv D(\lambda x.M),$$

$$\int_a^b Mdx \equiv J(a, b, \lambda x.M).$$

Con esto, las enunciados (1) se convierten en los siguientes:

(4a) $$\lambda x(x+1)^2 = \lambda x(x^2 + 2x + 1),$$

(4b) $\lambda x.\ x^2$ es una función,

(4c) $$D(\lambda x.\ x^2) = \lambda x.\ 2x,$$

(4d) $$J(0, 3, \lambda x.\ x^2) = 9.$$

Y por lo que hace al ejemplo de (2), si tomamos por E un operador tal que

$$E(\lambda x.f(x)) = \lambda x.f(x+1),$$

entonces la primera de las dos interpretaciones de '$P[f(x+1)]$' es $P[E(\lambda x.f(x))]$, y la segunda es $E[P(\lambda x.f(x))]$. Si usamos 'f' para designar $\lambda x.f(x)$, tenemos, respectivamente, $P(Ef)$ y $E(Pf)$.

B. ABSTRACCION FUNCIONAL

1. La idea de abstracción funcional

Los ejemplos de § A permiten cierta generalización. La idea de función como ley de correspondencia puede ampliarse hasta abarcar objetos del todo arbitrarios, y, en particular, los obs de cualquier sistema. Una

[3] Sobre las reglas para el uso de puntos cfr. § 2B5a.

cierta generalización de este tipo va ya implícita en el tratamiento de D, J, P y E como funciones[4]; son, en efecto, funciones cuyos argumentos son otras funciones; y excepto para J, sus valores son también funciones. Una tal situación puede producirse en cualquier sistema en el cual las funciones sean obs (aunque formen una categoría aislada y propia).

Como se ha dicho en § A3, usaremos 'λxM' para denotar una función en sí misma. La formación de λxM a partir de x y de M se llamará *abstracción funcional*. Es, evidentemente, una operación en sentido intuitivo. Si en la práctica se trata de una operación (primitiva o derivada) del sistema, de tal modo que λxM es un ob siempre que x sea una variable y M un ob, entonces el sistema es combinatoriamente completo en el sentido de la introducción; podemos, en efecto, considerar § A(3) como una formulación más exacta de lo que mentamos al hablar de «cualquier función que podamos definir intuitivamente por medio de una variable».

2. Funciones de varios argumentos

Análogamente podemos definir para funciones de varios argumentos una abstracción funcional n-ádica.

$$\lambda^n x_1 x_2 \ldots x_n.\ M \tag{1}$$

con el sentido intuitivo de «la función cuyo valor es M cuando los argumentos son $x_1, x_2, \ldots, x_n$». De todos modos, una breve reflexión nos muestra que esta operación puede definirse por iteración de la de § A(3) [5]. Tomemos, por ejemplo, la adición, cuyo valor, para los argumentos x e y es $x + y$. Si consideramos a x como valor fijo, la función $\lambda y(x + y)$ representará, según nuestras convenciones notacionales, la operación de sumar el argumento a x. Si usamos el concepto generalizado de función, el valor puede considerarse como el valor de una función de x, o sea, como la correspondencia que asocia a cada x la operación de sumar el argumento a x. Esta correspondencia —que según nuestras convenciones es $\lambda x(\lambda y(x + y))$, o bien $\lambda x{:}\, \lambda y.\ x + y$, es entonces el equivalente intuitivo de la adición; podemos, por tanto, adoptar la definición

$$\lambda^2 xy.\ x + y :\equiv :\lambda x{:}\, \lambda y.\ x + y.$$

---

[4] Así se hace en Church [CLC], cap. I. Cfr. los trabajos de Menger.

[5] Este es el principio del concepto de función de Schönfinkel.

En el caso general de (1) adoptamos la definición recursiva [6]

$$\lambda^1 x.\ M :\equiv : \lambda x.\ M,$$

(2)

$$\lambda^{n+1} x_1 \ldots x_n y.\ \mathrm{M} :\equiv \lambda^n x_1 \ldots x_n\ (\lambda y.\ M).$$

Por regla general se omite el exponente de la λ.

Así podemos expresar funciones de cualquier número de argumentos por medio de la abstracción funcional simple; y en un sistema combinatoriamente completo serán obs las funciones de cualquier número de variables.

3. Sistemas λ-aplicacionales

Hemos observado que podemos usar la reducción de § 1E3 para definir todos los operadores ordinarios. Si esto se lleva a cabo sistemáticamente terminamos con un sistema cuyas únicas operaciones serán la aplicación y la abstracción funcional [7]. Podemos llamar a un tal sistema λ-aplicacional [8]. La anterior discusión prueba que un tal sistema puede ser adecuado para cualquier finalidad lógica. Tiene especial importancia para la lógica combinatoria.

Teniendo en cuenta esa importancia, y también el hecho de que la notación de aplicación difiere de la que es corriente en la matemática ordinaria, discutiremos un poco más la significación otorgada a dicha notación.

En matemáticas la aplicación de una función monádica se escribe de varios modos: escribimos 'x^2', 'log x'. 'x'', '$f(x)$', '$|x|$', 'e^x'. Para funciones binarias escribimos '$f(x, y)$' y, en algunos casos, infijos, como, por ejemplo, el infijo '+' en '$x + y$'. La aplicación se toma como una operación binaria unívoca tal que, si el primer argumento es una función f y el segundo es un valor a, el resultado de la operación es el valor que f hace corresponder a a. Indicamos la aplicación por mera yuxtaposición con asociación por la izquierda, para evitar muchos paréntesis. Así, por

---

[6] Es recursiva como definición de una función de números naturales a obs. Se trata de una generalización muy natural de las nociones de § 2E2.

[7] Como es natural, podemos utilizar el método de § 1E3 para eliminar también la abstracción funcional. Pero teniendo en cuenta la interpretación que deseamos, la transformación dada en el texto conserva un elemento de significación que se perdería con el otro procedimiento.

[8] Se trata de un caso especial de sistema cuasi-aplicacional, tal como este tipo quedó definido en § 1E3.

ejemplo, fab es $(fa)b$, $fabc$ es $((fa)b)c$, etc. De este modo, los valores de funciones de varias variables se construyen, por así decirlo, progresivamente. Así, si A es la función adición, Aa es la función que consiste en sumar el argumento a a, y $(Aa)b$, o Aab, es la suma de a y b.

Mostraremos por medio de una tabla la significación intuitiva de algunas funciones aplicadas a argumentos; escribimos la notación técnica en la columna de la izquierda y la notación matemática usual (añadiéndole, si es necesario, el uso de la abstracción funcional) en la columna de la derecha.

1) Si f es una función monádica:

f	$\lambda x.\, f(x)$
fa	$f(a)$

2) Si f es una función ternaria:

f	$\lambda xyz.\, f(x, y, z)$
fa	$\lambda xy.\, f(a, x, y)$
$fabc$	$f(a, b, c)$
$f(ga)b$	$\lambda x.\, f(g(a), b, x)$
$f(hab)$	$\lambda xy.\, f(h(a, b), x, y)$

3) Si definimos:

$A \equiv \lambda xy.\, x + y$	(suma matemática)
$M \equiv \lambda xy.\, x.\, y$	(producto matemático)
$N \equiv \lambda x.\, (-x)$	(negativo matemático)

tenemos las correspondencias:

$A1$	$\lambda x.\, 1 + x$
Aab	$a + b$
$A(Mab)(Mac)$	$ab + ac$
$N(Mac)$	$-ac$
$A(Mab)(N(Mac)$	$ab + (-ac)$.

4. Relación con las variables ligadas en general

En § 2C hemos dicho que un sistema contiene variables ligadas si —y sólo si— hay por lo menos una operación propia respecto de la cual las variables desempeñan un papel especial. Llamemos a una tal operación *operación de ligadura*; a las demás operaciones las llamaremos por el

momento operaciones ordinarias. Toda operación de ligadura tendrá cierto número de argumentos que necesariamente tienen que ser variables, y otro cierto número de argumentos no sometidos a esa restricción; llamémoslos, respectivamente, argumentos de ligadura y argumentos ordinarios. La abstracción funcional tiene, pues, un argumento de ligadura y un argumento ordinario.

Mostraremos ahora que *toda operación de ligadura puede definirse en principio a base de la abstracción funcional y una operación ordinaria.* (Esto debe entenderse en el sentido de que toda operación primitiva de ligadura, que no sea la abstracción funcional, puede ser sustituida por otra definida como queda dicho.) Sea, en efecto, f una operación primitiva de ligadura con m argumentos de ligadura y n argumentos ordinarios. Si los argumentos de ligadura son $x_1, \ldots, x_m$ y los argumentos ordinarios son $M_1, \ldots, M_n$, sea el valor correspondiente

$$f(x_1, \ldots, x_m; M_1, \ldots, M_n) \tag{3}$$

Sea $\quad M_k^* \equiv .\lambda x_1 \ldots x_m . M_k \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$

y sea F una nueva operación ordinaria de n argumentos. Entonces, si sustituimos (3) en todo lugar en que aparezca por

$$F(M_1^*, M_2^* \ldots, M_n^*), \tag{4}$$

habremos eliminado f como idea primitiva [8a]. De aquí se sigue que la *teoría de la abstracción funcional equivale a una teoría de las variables ligadas en general.* Además, queda claro que la finalidad esencial de las variables ligadas es permitirnos usar funciones como argumentos.

Las definiciones de $(d/dx)M$ y de la integral, dadas antes, son casos especiales de esta reducción. Otros casos especiales pueden encontrarse en los sistemas logísticos. En varios de esos sistemas usamos notaciones, como las dadas en la columna izquierda de la tabla siguiente, para designar nociones cuyas interpretaciones se formulan brevemente en la columna de la derecha (X e Y son valores de funciones para el argumento x):[9]

[8a] (Añadida en galeradas.) Si una variable x_i se omite del prefijo (§ C3a) de M_k^*, podemos atender al caso en que x_i debe ser libre en sus casos en M_k, por ejemplo,

$$\int_{M_1}^{M_2} M_3 dx = J(M_1, M_2, \lambda x.M_3).$$

Pueden concebirse situaciones más generales, pero que son de poco uso. (Cfr. Church, A. [IML$_2$] § 06.)

[9] Obsérvese que las expresiones de la izquierda son nombres; las interpretaciones de las tres primeras pueden concebirse como interpretaciones de $\vdash (x)X$, etc.

$(x)X$ o $(\forall x)X$	X para todo x
$(\exists x)X$	X para algún x
$X \supset_x Y$	Y para todo x tal que X
$(\theta x)X$	el x tal que X
$\{x \ni X\}$	los (la clase de los) x tales que X
$\{X \ni_x Y\}$	los X tales que Y. [10]

Se sigue del párrafo anterior que si introducimos operadores Π, Σ, ξ, Θ, A, podemos definir las cinco primeras notaciones del modo siguiente:

$$\begin{aligned} (x)X &\equiv \Pi\ (\lambda x.\ X), \\ (\exists x)X &\equiv \Sigma\ (\lambda x.\ X), \\ X \supset_x Y &\equiv \xi\ (\lambda x.\ X)\ (\lambda x.\ Y), \\ (\theta x)X &\equiv \Theta\ (\lambda x.\ X), \\ (x \ni X) &\equiv \mathsf{A}\ (\lambda x.\ X)\ [11], \end{aligned}$$

con la peculiaridad de que en el tercer caso hemos escrito los dos argumentos inmediatamente a la derecha del operador y sin paréntesis. Podemos, naturalmente, usar el método de reducción de § 1E3 y de § C infra para definir las operaciones a base de obs y de la operación de aplicación; en este caso la notación será consistente con la de § 1E3.[12] El ob Π puede entonces interpretarse como el atributo de generalidad universal, Σ como el de satisfactibilidad, ξ como una relación de generalidad restringida, Θ como el artículo determinado, y A como un operador abstractivo para la formación de clases.

---

[10] Es decir, los x que son valores de X para algún x tal que Y; por ejemplo, $\{x^2 \ni_x 0 \leq x \leq 3\}$ es el conjunto de cuadrados de los enteros de 0 a 3, inclusive, o sea, el conjunto que consta de 0, 1, 4, 9. Esto es de alguna importancia para la matemática, y se empiezan a usar ahora notaciones al efecto, aunque ninguna de ellas es de uso general. Rosser [LMth], pág. 221, escribe '$\{X|Y\}$', dejando que la variable (o variables) ligada sea identificada por mera inspección. La notación que aquí proponemos es una adaptación de la usada para la noción anterior (la noción en la que X es x) por la escuela de Peano. Fue introducida ésta por Peano [FMt], vol. II, núm. 2, para sustituir otra notación *(ibíd.*, vol. II, núm. 1); cfr. Burali-Forti [LMt$_2$], § I, 11; Rosenbloom [EML], pág. 98. Moore [IFG] usa una notación análoga a la que proponemos. (Todas esas otras notaciones son sin la llave.)

[11] Los símbolos 'Π', 'Σ' y 'ξ' han sido usados en sentido muy aproximado a éstos por Curry (cfr., por ejemplo [RFR], [CFM]. Los otros son meras sugerencias, pero parece oportuno tomarlos por el momento para ese fin. No parece de utilidad arbitrar un signo para la sexta operación.

[12] Los símbolos 'Π', 'Σ', 'ξ', 'Θ', 'A' designan, pues, obs, con la aplicación indicada por mera yuxtaposición.

C. MORFOLOGIA DE UN SISTEMA FORMAL λ-APLICACIONAL

1. Preliminares

Para los fines de la lógica combinatoria necesitamos un sistema que satisfaga las condiciones (a)-(d) de § 0B. Un sistema lambda-aplicacional satisfará, evidentemente, las condiciones (b) y (d); la condición (c) exige una relación de igualdad de la que nos ocuparemos más adelante. La condición (a) exige que haya sólo un tipo de ob y un tipo de variable. Esto acarrea el que todo ob pueda ser aplicado a cualquier otro ob, y el que no haya distinción formal entre funciones y otros tipos de obs. Desde el punto de vista de la interpretación habrá, por tanto, combinaciones a las que no será posible asignar interpretación alguna y que, sin embargo, serán «significantes» como obs del sistema. Así, si x, y, z son variables, xy, $x(yz)$, $xz(yz)$ son obs.

Además —suponiendo que la igualdad se formula como predicado— para la lógica combinatoria pura no necesitamos, en principio, obs primitivos que no sean variables. Pues si se presentaran tales constantes primitivas serían indeterminadas, y, por tanto, variables formales de otra clase. Y como en la práctica sólo puede usarse para sustitución o como argumentos ligados un número finito de variables en cualquier contexto, siempre habrá, en realidad, variables no utilizadas que serán, efectivamente, indeterminadas. Estas pueden interpretarse como constantes al hacer una extensión de la teoría. Así, pues, la teoría sin constantes es compatible con el posterior añadido de constantes [13].

2. Formulación de la morfología

Partiendo de esas consideraciones llegamos del modo siguiente a una morfología:

a. Los átomos son una secuencia infinita de variables

$$e_1, e_2, e_3, \ldots \tag{5}$$

b. Hay una operación binaria llamada *aplicación*, indicada por yuxtaposición, y tal que si X e Y son obs, entonces XY también lo es.

---

[13] Estudiando un sistema de lógica combinatoria ilativa, debido a Church, Kleene [PCF] admite explícitamente la posibilidad de la abstracción funcional respecto de cualquier «símbolo propio» (es decir, de cualquier átomo). Sobre un caso en el que necesitamos constantes cfr. § D6.

c. Hay una operación binaria designada por una 'λ' prefijada como en § A(3), tal que λxM es un ob siempre que x sea una variable y M sea un ob.

d. Hay un predicado binario, indicado por un '$=$' infijo, tal que $X = Y$ es un enunciado elemental siempre que X e Y sean obs. Si no deseamos postular la simetría de este predicado, usamos el infijo '$\geq$' (cfr. § D3).

3. Convenciones auxliares

En conexión con esa morfología usaremos las siguientes convenciones simbólicas:

a. Las letras 'x', 'y', 'z' y las cursivas minúsculas en general serán variables intuitivas para obs primitivos sin especificar. Las mayúsculas, cursivas o góticas, se usarán para obs en general sin especificar.

Usamos la notación de abstracción funcional iterativa tal como quedó especificada en § B2. Pueden usarse los puntos según § 2B5a.

Dado un ob $\lambda x_1 \ldots x_n.\ M$, llamamos a M la *base*; la operación $\lambda x_1 \ldots x_n$ se llama el *prefijo*, y las variables $x_1 \ldots, x_n$ la *secuencia prefijada*. Esos términos pueden aplicarse también a las expresiones correspondientes del lenguaje A.

Admitimos la asociación por la izquierda para la operación de aplicación, tal como dijimos en § B3.

Un *componente* se define aquí como un componente en el sentido de § 2B3, respecto de la aplicación y de la prefijación de λx, siendo x cualquier variable; sólo una variable puede ser primer argumento de λ.

b. Diremos que una variable x *se presenta libre* en un ob X si —y sólo si— x es un componente de X respecto de la aplicación y de la abstracción funcional relativa a variables distintas de x. En razón de lo dicho en § 2D2 esto equivale a la siguiente definición recursiva:

(b1) x se presenta libre en x (pero en ningún $y \neq x$);

(b2) x se presenta libre en XY si (y sólo si) x se presenta libre en X o en Y;

(b3) x se presenta libre en $\lambda y.\ X$ si (y sólo si) x es distinta de y y se presenta libre en X.

Las palabras entre paréntesis son superfluas si admitimos el modo general de concebir las definiciones inductivas. Y puesto que la construcción de X es una estructura finita, «presentarse libre» es una relación decidible.

c. Diremos que *x está ligada en X* si —y sólo si— *x* es el argumento ligado en (*X* o en) un componente de *X*. Esto equivale a su vez a la siguiente definición recursiva:

(c1) ninguna variable está ligada en ningún ob primitivo;
(c2) *x* está ligada en *XY* si (y sólo si) *x* está ligada en *X* o en *Y*;
(c3) *x* está ligada en $\lambda y.\ X$ si (y sólo si) $x \equiv y$ o *x* está ligada en *X*.

4. Modificaciones de la morfología

La morfología que hemos formulado es la correspondiente a lo que más abajo llamamos *conversión-*λK.

En las teorías de Church $\lambda x M$ no se acepta como ob [14] a menos que *x* se presente libre en *M*. Llamaremos a esto *conversión-*λI. Esta excluye las funciones de argumentos ficticios definidas para todo ob. Pero esas funciones pueden ser definidas para campos de obs limitados, y puede admitirse que esto basta para los fines de la matemática ordinaria. [15]

Otra restricción, que consiste en no admitir más de un caso de *x* en *M*, [16] es de algún interés en la teoría de la funcionalidad. [17] Pero todo parece indicar que es de poca utilidad práctica. Por regla general, se necesita admitir la pluralidad de casos, por lo menos sobre campos de valores restringidos.

D. REGLAS TEORETICAS DE LOS CALCULOS DE CONVERSION LAMBDA

1. Preliminares

Vamos a estudiar ahora cómo puede formularse la igualdad en el sistema.

Evidentemente, la igualdad tiene que satisfacer las propiedades (ρ), (σ), (τ), (μ), (ν) de § 2D. Para conseguir el teorema de subrogación debemos contar también (puesto que el sistema es cuasi-aplicacional) con la regla

$$(\xi) \qquad A = B \Rightarrow \lambda x A = \lambda x B.$$

---

[14] Es decir, en su terminología, como «well-formed formula», Cfr. § S2.
[15] Cfr. § S3.
[16] Cfr. Fitch [SFL].
[17] Cfr. § 10C.

2. Reglas de conversión-β

Pero estas propiedades no agotan las propiedades de la igualdad, si es que ésta debe significar la equivalencia de sentido. Necesitaremos, además, otros principios, a saber:

a. Desde el punto de vista de la significación es evidente que las variables ligadas son irrelevantes: la correspondencia es la misma cualquiera que sea la variable que utilicemos para indicarla. Por eso nos interesaría contar con el esquema axiomático

$$\lambda x.\, X \equiv \lambda y.\, [y/x]X$$

indicando '$[y/x]$' la sustitución de y por x [18].

Pero no podemos aceptar sin restricción alguna ese esquema. Pues si y se presenta libre en X, un caso libre de y en X[19] resultará ligado una vez hecha la sustitución. Por ejemplo, si X es xy la ecuación anterior nos daría

$$\lambda x.yx = \lambda y.yy,$$

expresión cuyos dos lados no tienen, ciertamente, el mismo sentido. Este fenómeno se llama *confusión de variables ligadas*. Como ulterior ejemplo del mismo obsérvese que

$$\int_0^3 6xy\ dx = 27y;$$

pero, si sustituimos la variable ligada de la izquierda por y, la ecuación anterior

$$\int_0^3 6y^2\ dy = 27y,$$

se hace falsa.

Para evitar esa confusión de variables, formularemos el esquema axiomático del modo siguiente:

(α) *Si y no se presenta libre en X,*

$$\lambda x.\, X = \lambda y.\, [y/x]X.$$

---

[18] Está definida en § 2C2. Definición revisada en § E (cfr. § b).

[19] Un caso de y es libre en X si toda operación que lleve de y a X es la aplicación o la prefijación de λz con $z \neq y$; el caso es ligado si hay prefijación por medio de λy.

b. Además, si $\lambda x.\ M$ es la función cuyo valor sin especificar es M, entonces su aplicación a cualquier N debe ser lo mismo que el resultado de sustituir x por N en M, es decir,

$$(\beta) \qquad (\lambda x.\ M)N = [N/x]\ M.$$

Aquí también hay que precaverse contra una posible confusión de variables. Supóngase, en efecto, que $\mathrm{M} \equiv \lambda y.\ xy$ y que $N \equiv y$. En este caso, la sustitución de x por N en M sin atender a las variables ligadas nos daría $\lambda y.\ yy$. Pero si transformamos M en $\lambda z.\ xz$ mediante (α) y luego practicamos la sustitución de x por N, el resultado es $\lambda z.\ yz$.

Una tal confusión puede ocurrir si hay una variable libre en N que esté ligada en M. Podemos excluir esta posibilidad añadiendo una restricción a (β) como hicimos en el caso de (α) [20]. Pero la confusión se debe, en realidad, a la concepción ingenua de la sustitución. Si alteramos la definición de sustitución de tal modo que las variables ligadas queden mutadas automáticamente para evitar confusión, podremos admitir (β) sin restricción. Así lo hacemos aquí; la definición revisada de sustitución se encuentra en § E.

c. Además de a la confusión de variables se ha objetado a menudo a construcciones tales como $\lambda x(\lambda y(\lambda x.\ x))$. Se dice que obs tales suponen una *colisión de variables ligadas*. Pero, en realidad, esos obs no pueden interpretarse más que de un modo; por tanto, la objeción contra ellos es más práctica que teorética. Consecuentemente, nuestras reglas se formulan de tal modo que no excluyen teoréticamente la colisión de variables ligadas.

Más tarde mostraremos, por medio de la teoría sintética de combinadores, que las reglas que hemos adoptado son, efectivamente, aceptables, hecho que, pese a las afirmaciones en contra, no es autoevidente.

3. Generalización

Hemos formulado las reglas (α), (β) y (ξ) a base de una relación de igualdad; pero, en realidad, queremos formular esas reglas como propiedades de una relación sin especificar, $\boldsymbol{R}$, paralela a las propiedades (ρ), (σ), (τ), (μ), (ν), postuladas en § 2D4. En esta forma la reglas son:

(α) Si y no se presenta libre en X, $\lambda y[y/x]X\ \boldsymbol{R}\ \lambda xX$.
(β) $(\lambda xM)N\ \boldsymbol{R}\ [N/x]M$.
(ξ) $X\ \boldsymbol{R}\ Y \Rightarrow \lambda xX\ \boldsymbol{R}\ \lambda xY$.

---

[20] Esto es lo que hace Church. El esquema (β) corresponde a sus Reglas II y III.

Como en § 2D, diremos que una relación determinada tiene una de las anteriores propiedades si la propiedad vale cuando **R** se especializa en esa relación. Se observará que la regla (ξ) es una parte de la exigencia de que **R** sea monótona, mientras que las reglas (α) y (β) son esquemas axiomáticos.

La equivalencia monótona engendrada por (α) y (β) se llamará *convertibilidad*-β, [21] y la producida por (α) sólo se llamará *convertibilidad*-α. Tanto para uno cuanto para otro tipo de convertibilidad puede ser necesaria una ulterior distinción entre las dos clases de morfología estudiadas en § C3; tendremos así convertibilidad-βK o convertibilidad-βI según la morfología usada en cada caso. Simbolizaremos cada uno de estos tipos de convertibilidad —y los demás tipos que consideraremos más adelante— mediante el corriente signo de igualdad; el infijo especial 'conv', usado por Church, puede usarse cuando haya temor de confusión con otros usos del signo de igualdad. También pueden distinguirse los diferentes tipos de convertibilidad mediante subíndices, pero, por lo común, esta precaución no es necesaria. Una *conversión* es la transformación de un ob en otro con el cual sea convertible.

Además de la equivalencia usaremos la relación monótona cuasi-ordenadora. La llamaremos *reducibilidad* y la simbolizaremos mediante el infijo '$\geq$'. Una reducción es la transformación de un ob en otro al cual sea reducible. La transformación inversa se llama *expansión*. Hay, como es natural, varias especies de reducción, igual que en el caso de la conversión. Y por lo que hace a (α), puesto que es simétrica, reducibilidad-α y convertibilidad-α son lo mismo.

4. Reglas de conversión η.

Además de las propiedades (α) y (β) hay una tercera propiedad de una relación, representada por la regla siguiente:

(η) *Si x no es libre en M, entonces* $\lambda x(Mx)$ **R** M.

Esta regla es intuitivamente aceptable como regla de convertibilidad, porque los dos lados de la relación representan la función cuyo valor para el argumento X es MX. Por otro lado, hay finalidades para las cuales la regla no es aceptable, porque el miembro de la izquierda es una función mientras que el de la derecha puede no serlo. [22] Church y sus

---

[21] Estrictamente hablando, deberíamos decir convertibilidad α—β—; pero no parece de interés considerar una conversión basada sólo en (β).

[22] Esto es, desde luego, cuestión de interpretación; porque desde el punto de vista formal, como hemos dicho, todo ob es una función.

colaboradores se han interesado especialmente por tales interpretaciones.

La regla (ξ) de § 1 y la regla (η), tomadas juntas, equivalen a la regla siguiente, que es una forma del principio de extensionalidad:

(ζ) *Si x no está libre en M o en N, entonces*

$$Mx = Nx \Rightarrow M = N.$$ [23]

La regla (ζ) se sigue de (ξ) y (η) del modo siguiente:

$$\begin{aligned} Mx = Nx &\Rightarrow \lambda x(Mx) = \lambda x(Nx) && \text{por } (\xi), \\ &\Rightarrow M = N && \text{por } (\eta). \end{aligned}$$

A la inversa, (η) y (ξ) se siguen de (ζ) junto con (β):

$$\begin{aligned} (\lambda x.\, Mx)\, x &= Mx && \text{por } (\beta), \\ \lambda x.\, Mx &= M && \text{por } (\zeta). \end{aligned}$$

Con eso queda demostrada (η). Para demostrar (ξ) tenemos:

$$\begin{aligned} M = N \Rightarrow (\lambda xM)x &= (\lambda xN)x && \text{por } (\beta), \\ \Rightarrow \lambda xM &= \lambda xN. && \text{por } (\eta). \end{aligned}$$

Llamamos cálculo βη al cálculo de conversión lambda que tiene la regla (η). (Puede, naturalmente, haber cálculo- βηK y cálculo- βηI.)

5. Extensos

Vamos a introducir aquí una terminología que simplifica algunas de las formulaciones siguientes.

Llamamos *extenso*, del tipo que corresponda, a un ob que pueda formar el lado izquierdo de algun caso de alguna de las reglas (β), (η) o (δ) (esta última se introduce luego); el lado derecho del mismo

---

[23] En (ζ) no es suficiente que $MX = NX$ para todo ob X; la x tiene que ser una variable que no aparezca en M o en N. Church [CLC], pág. 64, ha dado un ejemplo de dos obs M y N de su teoría de la conversión-δ (cfr. § 6) tales que

$$MXY = NXY$$

vale para todos los obs X e Y que están en forma normal (se define infra) y no contienen variables libres, pero $M = N$ es falso. Este ejemplo se discute más adelante, en § S3.

caso se llamará entonces el *contracto* del extenso. La sustitución de un extenso por su contracto se llamará una *contracción* del tipo de la regla de que se trate. Así, un extenso del tipo (β), o, simplemente, un extenso-β, es un ob de la forma $(\lambda x.\ M)N$, y su contracto es $[N/x]M$; y la sustitución de un caso de $(\lambda x.\ M)N$ por $[N/x]M$ es una contracción-β. Análogamente, un extenso-η es un ob de la forma $\lambda x.M'x$, siendo M' un ob que no tiene x libre; su contracto es M'; etc.

En un extenso-β $(\lambda x.M)N$ llamamos a M la *base* y a N el *argumento*.

Diremos que un ob está en *forma normal* de un determinado cálculo-λ si no contiene ningún extenso apropiado a dicho cálculo. Así, un ob es normal-β si no contiene ningún extenso-β; [24] y es normal-βη si no contiene ningún extenso-β ni ningún extenso-η. En general, podremos omitir el tipo y decir simplemente que el ob está en forma normal.

6. Conversión-δ

Vamos a formular ahora una tercera especie de reducción y un tercer tipo de cálculo lambda, a saber, el de un cálculo que admite una regla de reducción (o conversión) del tipo siguiente (con algunas ulteriores restricciones sin especificar sobre M y M^*):

(δ) *Sea M un ob que no es un extenso-β ni es de la forma $\lambda x.\ N$, y no contenga ninguna variable libre ni ningún componente propio que sea un extenso de ningún tipo. Sea M^* un ob tal que ningún constituyente suyo es una variable libre y él mismo no es un extenso del mismo tipo que M. Entonces M es convertible con M^*.*

Un ob M al que pueda aplicarse esa regla se llama un extenso-δ. Su contracto y el paso de reducción-δ se definen por analogía con § 5. Está claro que un extenso-δ es de la forma

$$aM_1M_2 \ldots M_n,$$

siendo a una constante primitiva y $M_1, \ldots, M_n$ de forma normal y sin variables libres. Se entiende que un ob puede ser un extenso-δ a lo sumo de un modo. Obsérvese que las constantes primitivas, que se excluyeron en § C1, se hacen necesarias al admitir la conversión-δ.

Un cálculo-λ que admita una forma de la regla (δ) junto con (α) y (β) se llama un *cálculo*-βδ; si admite, además, la regla (η), se llamará

---

[24] Obsérvese que no hay α-extensos; si tuviéramos que definirlos por analogía con lo anterior tendríamos que exceptuarlos de la definición de forma normal.

un cálculo- $\beta\eta\delta$ o, simplemente, un *cálculo-* λ *pleno*. En el capítulo 4 demostraremos el teorema de Church-Rosser para un cálculo-λ cualquiera pleno. Una forma normal-$\beta\delta$ es aquella que no contiene extensos admisibles en un cálculo- $\beta\delta$.

Evidentemente, la regla (δ) no es, como las reglas (β) y (η), una regla específica, sino un tipo o forma de regla. Por tanto, la forma adecuada de hablar es decir *una* regla (δ) y *la* regla (β), etc. Formas específicas de regla (δ) se indicarán mediante subíndices.

Church ha estudiado una forma especial de cálculo- $\beta\delta$ llamándola cálculo- $\lambda\delta$. Llamaremos a este caso especial *cálculo-* $\beta\delta_1$.

En el cálculo- $\beta\delta_1$ la regla (δ) se especializa del modo siguiente:

(δ_1) *Si* M *y* N *están en forma normal-*$\beta\delta_1$ *y no contienen variables libres, entonces*

$$\delta MN = \lambda xy.x(xy) \text{ si } M \text{ es convertible-}\alpha \text{ con } N,$$
$$\delta MN = \lambda xy.xy \text{ si } M \text{ no es convertible-}\alpha \text{ con } N.$$

Aquí se ha elegido $\lambda xy.xy$ y $\lambda xy.x(xy)$ porque son los combinadores numéricos correspondientes, respectivamente, a 1 y 2. El cálculo- $\beta\delta_1$ se presenta como un equivalente aproximado del álgebra veritativa de dos valores considerando cada proposición o bien igual a 1 (falsa) o bien igual a 2 (verdadera). La equivalencia es sólo aproximada, en la medida en que la relación de convertibilidad es más estricta que la equivalencia ordinaria entre proposiciones.

E. PREFIJOS DE SUSTITUCION

El tema de esta sección es la definición de la operación de sustitución, cuyo cierre es $[M/x]X$, de tal modo que sea completa (es decir, que quede definida para todo X, M, x; cfr. § 2E2). El tema es técnico y se presenta aquí como resultado nuevo de interés más bien especial. La definición se formula en § 1; en § 2 se establecen los teoremas que hay que demostrar y se dan ciertos comentarios generales. El resto de la sección está dedicada a la demostración, excepto por lo que hace a algunos corolarios establecidos en §§ 4 y 7.

1. La definición básica

Definición 1. $[M/x]X$ es el ob X^*, definido del modo siguiente:

Caso 1. X es una variable.

(a) Si $X \equiv x$, entonces $X^* \equiv M$.

(b) Si $X \equiv y \not\equiv x$, entonces $X^* \equiv X$.

Caso 2. $X \equiv YZ$. Entonces $X^* \equiv Y^*Z^*$.

Caso 3. $X \equiv \lambda y Y$.

(a) Si $y \equiv x$, entonces $X^* \equiv X$.

(b) Si $y \not\equiv x$, entonces $X^* \equiv \lambda z[M/x]\,[z/y]Y$,

siendo z la variable definida del modo siguiente:

(I) Si x no se presenta libre en Y, o si y no está libre en M, entonces $z \equiv y$;

(II) Si x está libre en Y e y está libre en M, entonces z es la primera variable de la lista $e_1, e_2, \ldots$ tal que $z \not\equiv x$ y z no se presenta libre en M o Y.

Esta definición es propia en el sentido de § 2E1. Por tanto, es correcto usar para ella el signo '$\equiv$' (teorema § 2E1). Su completud puede mostrarse mediante inducción sobre el grado, usando el lema 1 (cfr. § 3).

2. Formulación de los teoremas

Teorema 1. *El ob* $[M/x]X$ *tiene las propiedades*:

(a) $$[x/x]X \equiv X.$$

(b) *Si* x *no se presenta libre en* X,

$$[M/x]X \equiv X.$$

(c) *Si ninguna variable que se presente libre en* M *o* N *está ligada en* X, *y si* $N' \equiv [M/x]N$, *entonces*

(1) $$[M/x]\,[N/y]X \equiv [N'/y]\,[M/x]X$$

vale bajo cualquiera de las dos condiciones:

(c_1) y *no se presenta libre en* M,

(c_2) x *no se presenta libre en* X.

Teorema 2. *Si la igualdad es convertibilidad-*α, *entonces*:

(a) *la relación*

(2) $$X = Y \rightarrow [M/x]X = [M/x]Y$$

vale para todo ob X, Y, M, y para toda variable x.

(b) *Si X es un ob y $\mathfrak{v}$ es un conjunto finito dado de variables, existe un ob Y tal que*

$$X = Y,$$

y que ninguna variable de $\mathfrak{v}$ está ligada en Y, mientras que las variables ligadas de X que no pertenecen al conjunto $\mathfrak{v}$ están ligadas en los casos correspondientes de Y.

(c) *Si N', (c_1) y (c_2) son como en teorema* 1c, *entonces*

$$[M/x]\,[N/y]X = [N'/y]\,[M/x]X \tag{3}$$

vale bajo cualquiera de las condiciones (c_1), (c_2) sin más restricción.

TEOREMA 3. *Si la relación de reducibilidad de cualquiera de las teorías de λ-conversión se indica mediante '$\geq$', entonces*

$$X \geq Y \rightarrow [M/x]X \geq [M/x]Y. \tag{4}$$

Las demostraciones de estos teoremas por métodos directos resultan ser considerablemente más difíciles que las obtenidas (§ 6D) mediante la teoría sintética de combinadores. No obstante, este segundo procedimiento da un resultado bastante más débil que el obtenido aquí, pues la identidad del teorema 1 y la convertibilidad-α del teorema 2 se sustituyen por una forma más débil de convertibilidad. Probablemente el resultado débil es suficiente para la mayoría de objetivos. La demostración que sigue tiene, pues, un significado más bien técnico: muestra que el resultado puede obtenerse sin recurrir a la teoría sintética; revela algunas de las complicaciones evitadas por la teoría sintética e ilustra así la justificación de esta última; por último, da el resultado fuerte que acabamos de enunciar.

Demostraremos el teorema 1, y algunos lemas relacionados con él, mediante inducción sobre el grado de X (cfr. infra), y usando la misma clasificación en casos seguida en la definición 1. Al estudiar los casos 2 y 3 supondremos que la propiedad considerada es verdadera para todo X de grado inferior; llamaremos a esto la hipótesis inductiva. Abreviaremos el lado izquierdo de la ecuación a demostrar —considerada como función de X— por X^*, y el lado derecho, cuando sea distinto de X, por $X\#$. En los lemas X^* es $[M/x]X$, pudiendo estar M especializado.

3. Lemas preliminares

Empezaremos por definir niveles del modo siguiente:

(I) Una variable es de nivel 0.

(II) Si X es de nivel m e Y es de nivel n, entonces XY es de nivel $m + n + 1$.

(III) Si X es de nivel m, $\lambda x X$ es de nivel $m + 1$.

Lema 1.[25] *El nivel de* $[u/x]X$ *es el mismo de* X.

Demostración. En el caso 1, X y X^* son ambas variables, y, por tanto, ambas son de nivel 0.

En el caso 2, $X^* = Y^*Z^*$, y como Y^* y Z^* son del mismo nivel que Y y Z, respectivamente, X^* es del mismo nivel que X.

En el caso 3a, X y X^* son del mismo nivel porque son idénticas.

En el caso 3b

$$X^* \equiv \lambda z[u/x]\,[z/y]Y;$$

por la hipótesis inductiva aplicada dos veces, $[u/x]\,[z/y]Y$ es del mismo nivel que Y, y, por tanto, X^* es del mismo nivel que X.

Lema 2. *Condición necesaria y suficiente de que* u *esté libre en* $[M/x]X$ *es que, o bien* (1°) $u \neq x$ *presentándose* u *libre en* X, *o bien* (2°) *que* x *se presente libre en* X *y* u *se presente libre en* M.

Demostración. En el caso 1a, $X^* \equiv M$ y las variables libres en X son, precisamente, las libres en M. Esto concuerda con el lema, porque x está libre en X y ninguna $u \neq x$ está libre en X. En los casos 1b y 3a, $X^* \equiv X$, y, por tanto, X y X^* tienen las mismas variables libres. Esto también concuerda con el lema, porque x no está libre en X.

En el caso 2, $X^* \equiv Y^*Z^*$. Las variables $u \neq x$ que están libres en X son las $v \neq x$ libres en Y junto con las $w \neq x$ libres en Z. Si x es libre en X, es libre también en Y o en Z, y viceversa. Estas consideraciones muestran que el lema es verdadero.

En el caso 3b tenemos

$$X \equiv \lambda y Y, \qquad X^* \equiv \lambda z[M/x]\ [z/y]Y,$$

siendo z la variable especificada en la definición 1. Y es entonces de ni-

---

[25] Esta demostración del lema 1 muestra que $[u/x]X$ está siempre definido, aunque no se subraya este punto.

vel inferior al de X. Por la hipótesis inductiva, las v libres en $[z/y]Y$ son las mismas — con la posible excepción de $v \equiv z$, que las libres en X, o sea, las distintas de y y libres en Y. Por § C3b las u libres en X^* son precisamente aquellas u tales que $u \neq z$ y u está libre en $[M/x]$ $[z/y]Y$. Por el lema 1, $[z/y]Y$ es de un nivel inferior al de X. Por tanto, de nuevo por la hipótesis inductiva, las u libres en $[M/x]$ $[z/y]Y$ son, precisamente, aquellas en las que se cumple que u es un v y $u \neq x$, o bien que x es un v y u es libre en M. Si u está libre en X^*, entonces $u \neq z$ (§ C3b) y u está libre en $[M/x]$ $[z/y]Y$; por tanto, o bien $u \neq x$ y u es un $v \neq z$ y, por tanto, libre en X, o bien x es un v distinto de z (definición 1) y, por tanto, libre en X, y u está libre en M. Esto muestra que la condición del lema es necesaria. Si $u \neq x$ y u está libre en X, entonces, puesto que se excluye por la definición 1 $u \equiv z$, u es un v distinto de x y, por tanto, libre en X^*; la condición (1°) es, por tanto, suficiente. Por último, si u está libre en M y x está libre en X, entonces x es un v, $u \neq z$ (definición 1), y, por tanto, u está libre en X^*; esto demuestra la suficiencia de la condición (2°), y completa así la demostración del lema.

4. Demostración del teorema 1

Damos una demostración por inducción sobre el nivel de X; tenemos que demostrar cada propiedad para el caso 1, y luego para los casos 2 y 3.

Demostración de (a). En el caso 1a, $X^* \equiv x \equiv X$. En los casos 1b y 3a, $X^* \equiv X$ por definición.

En el caso 2, $X^* \equiv Y^*Z^* \equiv YZ \equiv X$.

En el caso 3b, puesto que y no está libre en x, $z \equiv y$, y

$$X^* \equiv \lambda y[x/x]\,[y/y]Y.$$

Por la hipótesis inductiva aplicada dos veces

$$[x/x]\,[y/y]Y \equiv Y.$$

Por tanto, $X^* \equiv X$, q. e. d.

Corolario 1.1. *Si $y \neq x$ y x no está libre en Y o y no está libre en M,*

$$[M/x]\,\lambda y Y \equiv \lambda y\,[M/x]Y.$$

Demostración de (b). La afirmación es trivial en los casos 1b y 3a. En el caso 1a no está satisfecha la premisa.

En el caso 2 tenemos, como antes, $X^* \equiv Y^*Z^* \equiv YZ \equiv X$.

En el caso 3b tenemos $x \neq y$ y, por tanto, x no está libre en Y. Por el corolario 1.1 y la hipótesis inductiva

$$X^* \equiv \lambda y Y^* \equiv \lambda y Y \equiv X.$$

Demostración de (c_1). Disponemos, ante todo, de dos casos triviales (en los que la afirmación es verdadera sin la restricción sobre las variables ligadas de X). Si y no se presenta libre en X, entonces tampoco se presenta libre en $[M/x]X$ y (1) sigue por (b). Si x no se presenta en X o N, conseguimos otro caso trivial que es simétrico del primero. Procedemos por inducción suponiendo excluidos esos casos triviales.

En el caso 1 la única hipótesis no trivial es $X \equiv y$. Entonces

$$X^* \equiv [M/x]N \equiv N', \qquad X^\# \equiv N'.$$

En el caso 2 tenemos, por la hipótesis inductiva, $Y^* \equiv Y^\#$, $Z^* \equiv Z^\#$, de donde

$$X^* \equiv Y^*Z^* \equiv Y^\#Z^\# \equiv X^\#.$$

En el caso 3 suponemos $X \equiv \lambda z Y$. Si $z \equiv y$ tenemos el primer caso trivial, y si $z \equiv x$, el segundo.[26] Si $z \neq x$, $z \neq y$, podemos aplicar el corolario 1.1 y obtener

$$X^* \equiv \lambda z Y^*, \qquad X^\# \equiv \lambda z Y^\#.$$

Por la hipótesis inductiva $Y^* \equiv Y^\#$; de aquí

$$X^* \equiv X^\#, \text{ q. e. d.}$$

Demostración de (c_2). Por (b) la fórmula que hay que demostrar es

$$[M/x]\,[N/y]X \equiv [N'/y]X. \tag{5}$$

La afirmación es trivial si y no se presenta en X o si x no se presenta en N. Excluimos, por tanto, esos dos casos.

En el caso 1, $X \equiv y$, $X^* \equiv [M/x]N \equiv N' \equiv X^\#$.

En el caso 2, $X^* \equiv Y^*Z^* \equiv Y^\#Z^\# \equiv X^\#$.

En el caso 3, $X \equiv \lambda z Y$. Entonces $z \neq x$, puesto que x, que se pre-

[26] Puesto que x está ligada en X, y, por tanto, no está libre en N.

senta libre en N, no estará ligado en X. También $z \neq y$, puesto que y se presenta libre en X. Por tanto, por el corolario 1.1,

$$X^* \equiv \lambda z Y^* = \lambda z Y^\# = X^\#.$$

OBSERVACIÓN. Lo siguiente muestra que la propiedad (c) no es verdadera en general, sin restricciones sobre las variables ligadas. Sea

$X \equiv \lambda x.fxy$,
$M \equiv a$ (una variable que no tiene otro uso),
$N \equiv x$.

Entonces

$$\begin{aligned} N' &\equiv a \\ X^* &\equiv \lambda z.\, fza, \\ X^\# &\equiv \lambda x.\, fxa. \end{aligned}$$

Esto constituye un contraejemplo para las dos condiciones de (c).

5. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2

En este teorema la propiedad crucial es (a). No podemos derivarla del teorema 2E7 porque las hipótesis de este teorema no están satisfechas en el caso 3b. La demostración de (a) se da infra, en 6; aquí derivaremos (b) y mostraremos que (c) es una consecuenca de (a).

a. Si tenemos las propiedades (a) y (b), la propiedad (c) es una consecuencia inmediata de la propiedad correspondiente del teorema 1. Sea, en efecto, Y como en (b), con $\mathfrak{v}$ especializado a la clase de variables libres en M, N o X. Entonces

$$Y^* \equiv Y^\#$$

por el teorema 1. Las ecuaciones

$$X^* = Y^*, \quad X^\# = Y^\#,$$

se siguen, por la propiedad (a) de este teorema, de la ecuación de la propiedad (b).

b. Antes de ocuparnos de la propiedad (b) necesitamos el lema siguiente:

LEMA 3. *Si M no contiene variables libres que estén ligadas en X, entonces es condición necesaria y suficiente de que u esté ligada en $[M/x]X$ el que u esté ligada en X, o bien que x esté libre en X y u ligada en M.*

Demostración. El lema es trivial en los casos en que x no está libre en X y $X^* \equiv X$. Esto elimina los casos 1b y 3a. La inducción es también clara en el caso 2.

En el caso 1a, $X^* \equiv M$. Puesto que x está libre en X y no hay en X ninguna variable ligada, queda verificado el lema.

En el caso 3b, y no está libre en M, $z \equiv y$, y, por tanto (corolario 1.1),

$$X^* \equiv \lambda y\,[M/x]Y.$$

Si u está ligada en X^*, entonces o bien $u \equiv y$ o bien u está ligada en $[M/x]Y$; en este último caso u está ligada en Y, o bien x es libre en Y y u está ligada a M. Si $u \equiv y$ o u está ligada en Y, entonces u está ligada en X. Si x está libre en Y, entonces (puesto que $x \not\equiv y$ por la condición del caso 3b) x está libre en X. Por tanto, toda u ligada en X^* o bien está ligada en X o está ligada en M con x libre en X. A la inversa, si u está ligada en X, entonces o bien $u \equiv y$ o bien u está ligada en Y, y en cualquier caso u está ligada en X^*. Si x está libre en Y y u está ligada en M, entonces x está libre en X y, por tanto, u está ligada en X^*.

c. *Demostración de* (b). Considérese una componente de X de la forma λxZ, con x que está en $\mathfrak{b}$. Sea y una variable que no pertenece a $\mathfrak{b}$ ni se presenta en Z ni libre ni ligada. Por el lema 3, $[y/x]Z$ tiene las mismas variables ligadas que Z. Por tanto, si sustituimos λxZ por $\lambda y[y/x]Z$ habremos sustituido la variable ligada x (en esa instancia) por y, y no tendremos que hacer más cambios en las variables ligadas. [27] Si X se transforma en X_1 por ese proceso, entonces $X = X_1$ por (α) y el teorema de subrogación [28]. Podemos seguir así hasta que todas las variables ligadas pertenecientes a $\mathfrak{b}$ hayan sido eliminadas.

6. DEMOSTRACIÓN DE (a)

a. Procederemos por medio de una inducción deductiva modificada. Definimos:

---

[27] En particular, no nos habrá sido necesario introducir ninguna nueva variable ligada distinta de y. Obsérvese que Z es de un nivel inferior al de X.

[28] Esto no exige (a). Estamos haciento una subrogación del componente Z en X, no una sustitución en sentido técnico.

$$X^* \equiv [M/x]X, \qquad Y^* \equiv [M/x]Y,$$

y llamamos a $X^* = Y^*$ la forma $*$ — de $X = Y$. Análogamente usamos el asterisco aplicado al nombre de una regla para indicar la regla modificada que se obtiene al sustituir cada premisa o conclusión por su forma*. Así $(\mu)^*$ es la regla

$$X^* = Y^* \rightarrow (ZX)^* = (ZY)^*.$$

El procedimiento típico de una demostración por inducción deductiva consistiría en mostrar que es válida toda instancia de $(\rho)^*$ y $(\alpha)^*$, y que $(\sigma)^*$, $(\tau)^*$, $(\mu)^*$, $(\nu)^*$ son reglas derivadas válidas. Esto es fácil en el caso de $(\rho)^*$, $(\sigma)^*$, $(\tau)^*$, $(\mu)^*$, $(\nu)^*$. En los primeros tres casos la regla es una especialización de la regla correspondiente sin asterisco; así $(\sigma)^*$, o sea,

$$X^* = Y^* \rightarrow Y^* = X^*,$$

es una especialización de (σ). En los casos de (μ) y (ν) basta con usar, además, la definición 1, caso 2. Así, la $(\mu)^*$ que antes hemos formulado equivale a

$$X^* = Y^* \rightarrow Z^*X^* = Z^*Y^*,$$

que es un caso especial de (μ).

En los demás casos se modifica el procedimiento. Observemos que si $X = Y$, entonces X e Y son del mismo nivel; esto puede verse por una inducción deductiva y el lema 1. Tienen, además, las mismas variables libres y la misma estructura, y no defieren más que en sus variables ligadas. Definiremos el nivel de la ecuación como su nivel común, y definiremos también el nivel de una instancia de (a) como el nivel de la premisa. Observemos, además, que las reglas (σ) y (τ) no alteran el nivel, y que las reglas (μ), (ν) y (ξ) lo incrementan. Por todo eso vamos a añadir a la inducción deductiva una inducción sobre el nivel. Al demostrar instancias de (a) cuya premisa haya sido derivada por (α) o por (ξ) supondremos que (a) es verdad para todos los casos de nivel inferior. Llamamos a esta suposición hipótesis inductiva. El efecto de la argumentación consiste en reducir la demostración de cualquier caso especial de (a) a un número finito de casos que, o bien corresponden a pasos anteriores en la demostración de $X = Y$, o bien son de nivel inferior.

Procedemos al análisis de los casos restantes, $(\xi)^*$ y $(\alpha)^*$. En el primer caso reducimos el problema al caso $(\alpha)^*$ para el mismo nivel.

En los dos casos suponemos que el nivel de $X = Y$ es m y suponemos (a) para niveles inferiores a m.

b. Análisis de (ξ)*. Supongamos que

$$X \equiv \lambda y U, \qquad Y \equiv \lambda y V, \tag{6}$$

y que $X = Y$ se deriva de $U = V$ mediante (ξ). Si y no está libre en M,[29] entonces, por el corolario 1.1,

$$X^* \equiv \lambda y U^*, \qquad Y^* \equiv \lambda y V^*.$$

Por la hipótesis inductiva, $U^* = V^*$; por tanto, $X^* = Y^*$ se sigue por (ξ).

En el caso general, sea z una variable que no está libre en U, V o M. Sea

$$U_1 \equiv [z/y]U, \qquad V_1 \equiv [z/y]V. \tag{7}$$

Entonces, por la hipótesis de inducción, $U_1 = V_1$. Como U_1 y V_1 siguen siendo de nivel inferior a m, podemos aplicar la hipótesis inductiva de nuevo, y obtener $U_1^* = V_1^*$.

Por el caso especial antes tratado tenemos entonces

$$[M/x]\,\lambda z U_1 = [M/x]\,\lambda z V_1. \tag{8}$$

Por otra parte, tenemos, por (α) y (7),

$$X = \lambda z U_1, \qquad Y = \lambda z V_1,$$

y, por tanto, por (α)* para el nivel m,

$$X^* = [M/x]\,\lambda z U_1, \qquad Y^* = [M/x]\,\lambda z V_1.$$

De esto y (8) se obtiene

$$X^* = Y^*.$$

Esta argumentación reduce (ξ)* a (α)* del mismo nivel.

c. *Demostración de* (α)*. Supongamos que

$$X \equiv \lambda y Z, \qquad Y \equiv \lambda z [z/y] Z,$$

siendo z una variable que no está libre en Z. Deseamos demostrar que

$$X^* = Y^*. \tag{9}$$

---

[29] Suponemos $y \not\equiv x$. Si $y \equiv x$, el caso es trivial.

Si $y \equiv z$, la conclusión es trivial. Análogamente, si x no está libre en X, $X^* \equiv X$; puesto que X e Y tienen las mismas variables libres, $Y^* \equiv Y$, y (9) es trivial. Esto incluye los casos $x \equiv y$, $x \equiv z$. Suponemos, por tanto, que $x \not\equiv y$, $x \not\equiv z$, $y \not\equiv z$ y que x está libre en Z.

Por definición 1, caso 3b, tenemos

$$X^* \equiv \lambda u.\ [M/x]\ [u/y]Z, \tag{10}$$

en la cual, 1) si y no está libre en M, $u \equiv y$; y 2), si y está libre en M, $u \not\equiv x$, u no está libre en M y u no está libre en Z. Por la misma definición

$$Y^* \equiv \lambda v.\ [M/x]\ [v/z]\ [z/y]Z, \tag{11}$$

en la cual, 1) si z no está libre en M, $v \equiv z$; y 2), si z está libre en M, $v \not\equiv x$, v no está libre en M y v no está libre en $[z/y]Z$, y, por tanto, no está tampoco libre en Z a menos que $v \equiv y$. Pero si $v \equiv y$, entonces y no está libre en M, y $u \equiv y$, y, por tanto, $v \equiv u$. De (10) tenemos, por (α),

$$X^* = \lambda v.\ [v/u]\ [M/x]\ [u/y]Z,$$

con $v \equiv u$ (teorema 1a) o bien v no está libre en $[M/x]\ [u/y]Z$. La v de (11) satisface estas condiciones. Por tanto, por (ξ), condición suficiente de (9) es

$$[v/u]\ [M/x]\ [u/y]Z = [M/x]\ [v/z]\ [z/y]Z. \tag{12}$$

Sea V un ob, construido según (b), tal que

$$Z = V, \tag{13}$$

sin que ninguna de las variables u, v, z ni ninguna de las variables libres en M esté ligada en V. Entonces, por el teorema 1c, tenemos

$$\begin{aligned} [v/u]\ [M/x]\ [u/y]V &\equiv [M/x]\ [v/u]\ [u/y]V \\ &\equiv [M/x]\ [v/y]V \qquad (\text{T. } 1c_2); \end{aligned}$$

mientras que por el teorema $1c_2$ sólo

$$[M/x]\ [v/z]\ [z/y]V \equiv [M/x]\ [v/y]V.$$

Por tanto,

$$[v/u]\ [M/x]\ [u/y]V \equiv [M/x]\ [v/z]\ [z/y]V. \tag{14}$$

Por otro lado, aplicando la hipótesis inductiva a (13) tenemos

$$[z/y]Z = [z/y]V.$$

Como los dos lados siguen siendo de nivel inferior a m, podemos aplicar de nuevo la hipótesis inductiva y conseguir

$$\begin{aligned} [v/z]\,[z/y]Z &= [v/z]\,[z/y]V, \\ [M/x]\,[v/z]\,[z/y]Z &= [M/x]\,[v/z]\,[z/y]V. \end{aligned} \tag{15}$$

Y de nuevo

$$[u/y]Z = [u/y]V. \tag{16}$$

Si M es una variable, podemos aún seguir así hasta

$$[v/u]\,[M/x]\,[u/y]Z = [v/u]\,[M/x]\,[u/y]V. \tag{17}$$

Por (17), (14) y (15) tenemos entonces (12). Esto completa la demostración del teorema 2a para el caso especial en que M es un átomo. Pero con este caso especial podemos pasar de (16) a (17), al caso general. El teorema 2 queda, por tanto, demostrado.

7. Corolarios

Corolario 2.1. $[M/x]\,[N/x]X = [N'/x]X,$

con $$N' \equiv [M/x]N.$$

Demostración. Por el teorema 2c, si z no está libre en X o M,

$$\begin{aligned} [M/x]\,[N/x]X &= [M/x]\,[N/z]\,[z/x]X \\ &= [N'/z]\,[M/x]\,[z/x]X && \text{(T. 2c)}, \\ &= [N'/x]X && \text{(T. 2c)}. \end{aligned}$$

Es sabido que la sustitución múltiple puede definirse a base de simple sustitución. Efectivamente, dadas $X, x_1, \ldots, x_n, M_1, \ldots, M_n$, si hacemos que X^* sea

$$[M_n/z_n] \ldots [M_1/z_1]\,[z_n/x_n] \ldots [z_1/x_1]X,$$

siendo $z_1 ..., z_n$ variables elegidas de tal modo que z_k sea distinta de $x_1, ..., x_n, z_1, ..., z_{k-1}$ y de todas las variables libres en $X, M_1, ..., M_n$, entonces X^* puede representar el resultado de sustituir simultáneamente las x_k de X por las M_k. En particular, X^* en M_i cuando X es x_i; y es X si X no contiene ninguna de las x_i; etc. No consideraremos ulteriormente estas propiedades.

8. Demostración del teorema 3

Vamos a mostrar simplemente que si una de las reglas (β), (η), (δ) vale, la correspondiente regla* (cfr. § 6) es derivable. Adoptemos la convención

$$X^* \equiv [M/x]X,$$

con M y x fijas, mientras que X es arbitraria. Para evitar confusiones con (2), cambiamos la variable ligada x de la regla por y, ponemos 'X', 'Y' en la formulación de la regla en lugar de 'M', 'N', respectivamente. Denotamos el lado izquierdo de la regla por 'L' y el lado derecho por 'R'. Tenemos que considerar por separado los casos $x \equiv y$ y $x \not\equiv y$; en el primer caso permitimos que x esté en L y R.

Para (β)* con $x \equiv y$, tenemos

$$L \equiv (\lambda x X)Y, \qquad R \equiv [Y/x]X.$$

Entonces

$$\begin{aligned} R^* &\equiv [M/x]\,[Y/x]X \\ &= [Y^*/x]X && \text{(Cor. 2. 1).} \\ L^* &\equiv (\lambda x X)Y^* && \text{(Def. 1. 2, 1.3a),} \\ &\geq [Y^*/x]X && \text{(por (β)),} \\ &= R^* && \text{(cfr. supra).} \end{aligned}$$

Por tanto, $L^* \geq R^*$.

Si $x \not\equiv y$, tenemos

$$\begin{aligned} L &\equiv (\lambda y X)Y, \qquad R \equiv [Y/y]X. \\ L^* &\equiv (\lambda z[M/x]\,[z/y]X)Y^* && \text{(Def. 1),} \\ &\geq [Y^*/z]\,[M/x]\,[z/y]X && \text{(por (β)),} \\ &= [M/x]\,[Y/z]\,[z/y]X && \text{(T. 2c),} \\ &= [M/x]\,[Y/y]X && \text{(por (5)),} \\ &\equiv R^*. \end{aligned}$$

---

* 'L', 'R' son las iniciales, respectivamente, de «left». y «right» Las mantenemos porque las mayúsculas 'I', 'D' tienen utilización simbólica en el libro.—*N. del T.*

Para $(\eta)^*$ con $x \equiv y$, tenemos

$$L^* \equiv L \geq R \equiv R^*.$$

Por otro lado, si $x \neq y$,

$$\begin{array}{lll} L \equiv \lambda y.Xy, & & R \equiv X. \\ L^* \equiv \lambda z.\,[M/x]\,[z/y]Xy & & \text{(Def. 1)}, \\ \equiv \lambda z.\,[M/x]Xz & & \text{(Def. 1)}, \\ \equiv \lambda z.\,X^*z & & \text{(Def. 1)}, \\ \geq X^* \equiv R^*. & & ((\eta)). \end{array}$$

El caso de $(\delta)^*$ es trivial, puesto que ninguno de los dos lados contiene variables libres.

S. TEMAS SUPLEMENTARIOS

En esta sección, a menos que se indique lo contrario, todos los trabajos citados son de Church. Y consideramos todos los símbolos del sistema estudiado como nombres de sí mismos [30].

1. Comentario histórico

La idea de abstracción funcional es muy antigua en lógica, y tanto Frege como Peano introdujeron notaciones para ella y relacionadas con ella. Para el estudio de esta tradición véase Church [Abs] y Feys [PBF]; no nos referiremos más a ella.

Las ideas de variable y función en matemáticas han sido objeto de estudio por Menger. Sus trabajos se encuentran relacionados en la bibliografía. Las motivaciones de sus trabajos son más bien diferentes de las aquí consideradas y no hemos intentado tomarlas en cuenta. Su línea resulta muy independiente.

Los cálculos de lambda-conversión son una creación de Church, considerablemente ayudado por sus discípulos Rosser y Kleene. El tratamiento sistemático corriente es el de [CLC], que contiene referencias a todos sus trabajos anteriores.

En el presente capítulo no hemos tratado más que los fundamentos del sistema; la demostración de consistencia se pospone hasta el capítulo **4**; la equivalencia con la teoría de combinadores, hasta el capítulo **6**, y la aritmética combinatoria, que ocupa más de la mitad de [CLC] e incluye algunos de los resultados más importantes, no se tratará hasta el propuesto segundo volumen.

El cálculo apareció por vez primera en [SPF], en combinación con algunas nociones ilativas. Siguió una serie de trabajos de Church, Rosser y Kleene, que culmina en Kleene y Rosser [IFL], trabajo que demuestra la inconsistencia del sistema de [SPF]. El resultado dio lugar a la eliminación de los conceptos ilativos, excepto por lo que hace

---

[30] Es decir, usamos el «modo autónimo de hablar» de Carnap [LSL]. Esto no tiene peligros en la medida en que los símbolos nominales no tienen en realidad ninguna otra significación (cfr. la observación al final de § 1D5).

a ciertos restos que son inherentes a la noción δ y a restricciones puestas a los obs en forma normal. Church y Rosser [PCn] (cfr. capítulo 4) demostraron la consistencia del sistema resultante. En 1934-35 es propuesto en [RPx], [PFC] un «sistema de lógica» basado en él; fue redactado sistemáticamente en los apuntes del curso de Church en Princeton de 1936. [MLg]. Aquel año aparecieron los importantes trabajos [UPE] y [NEP], que muestran la indecidibilidad del cálculo λ y del cálculo de predicado clásico, respectivamente. Los trabajos pertenecen a la aritmética combinatoria, igual que gran parte de [PFC]; no podemos, pues, discutirlos aquí. La monografía [CLC], que apareció por vez primera en 1941, aportó un importante cambio de notación y otros perfeccionamientos; pero omitía el tratamiento del sistema propuesto en [PFC].

2. Notación

Tal como Church la presenta, la teoría es sintáctica [31]. Se parte con unos símbolos primitivos, que son variables [32], paréntesis y λ. Toda expresión compuesta con los símbolos primitivos constituye una «fórmula». De entre las fórmulas se separa una subclase definida, la de las «fórmulas bien formadas» (well-formed formulas). Estas fórmulas bien formadas representan los obs del sistema formal tal como está presentado en este capítulo de nuestro libro. Consideramos esta divergencia como una diferencia puramente notacional.

Como ya se ha dicho, Church usó dos notaciones diferentes. En principio se usa la yuxtaposición para indicar la aplicación, y una λ prefijada para denotar la operación λ en los dos sistemas; pero las convenciones por lo que hace al uso de los paréntesis son diferentes en los dos sistemas. En [CLC] esas convenciones son las mismas que en § B3. En los trabajos anteriores había tres clases de paréntesis —llaves, paréntesis propiamente dichos (redondos) y corchetes—. Se exigía que en una fórmula bien formada el primer argumento de una aplicación estuviera entre llaves, el segundo entre paréntesis, y el segundo argumento de un cierre λ entre corchetes. Se permitían abreviaciones, de tal modo que la aplicación de una función a varios argumentos tomados sucesivamente tuviera una notación parecida a la que se encuentra en matemáticas. Varias posibilidades se encuentran en la tabla 1.

Tabla 1

[CLC]		[SPF]	
Plena	Abreviada	Plena	Abreviada
(FA)	FA	$\{F\}\ (A)$	$F(A)$
$((FA)B)$	FAB	$\{\{F\}\ (A)\}\ (B)$	$F(A,B)$
$(((FA)B)C)$	$FABC...$	$\{\{\{F\}\ (A)\}\ (B)\}\ (C)$	$F(A,B,C)$
λxM		$\lambda x[M]$	$\lambda x.M$

En las formas abreviadas de [SPF] se entiende que F es un símbolo simple; si no lo es, lo sustituimos por $\{F\}$ y obtenemos aún alguna otra abreviación. Evidentemente,

---

[31] Es sintáctica en el sentido amplio, no en el estricto (§ 1S2), porque es relacional más que logística.

[32] En las teorías anteriores había, además, constantes primitivas. Estas, junto con las variables, recibían el nombre de «símbolos propios» en Kleene [PCF].

Church usaba el concepto de Schönfinkel (efectivamente, le cita), pero sin usar la notación del mismo hasta 1941.

Puesto que λ es un prefijo binario, puede obtenerse una notación sin paréntesis mediante el uso de un prefijo binario para el operador de aplicación. Rosenbloom usa esta notación [EML], página 123, con '|' como prefijo [33].

3. Motivación de los sistemas restringidos

Las teorías de Church evidencian una curiosa alergia al sistema λK y al principio de extensionabilidad (ζ). Haremos aquí unas breves observaciones sobre lo que nos parece ser el motivo de esa restricción.

Por lo que hace al sistema λK, Church ha indicado varias veces tres argumentos: 1) que puede conseguir sin él todo lo que desea; 2) que el sistema permite construir obs que tienen una forma normal aunque algunos de sus componentes no la tienen; 3) que puede dar lugar a inconsistencia. El primero de esos argumentos es, probablemente, admisible, y, por tanto, tiene algún interés el ver qué es lo que puede hacerse en el sistema λI; pero se aprecia pronto que la teoría tiene entonces ciertas dificultades y complejidades, como, por ejemplo, el hecho de que sus términos numéricos sólo incluyen el cero a costa de admitir ciertas excepciones en favor suyo [34]. El segundo argumento se relaciona con la circunstancia de que Church tiene presente una interpretación en la cual no son significantes más que obs que tengan una forma normal. Para nosotros, significancia es un concepto ilativo; cuando lleguemos a la lógica combinatoria ilativa veremos que, aunque la presencia del combinador K (§ 5A) provoca ciertas dificultades formales, hay puntos de vista desde los cuales resulta inaceptable la tesis de que sólo obs con una forma normal son significantes [35]. En cuanto al tercer argumento creemos que es un error, aunque sin poderlo asegurar; por lo menos, no se conoce ninguna inconsistencia de un sistema del tipo λK que no sea obtenible en el correspondiente tipo λI, y tampoco sabemos de ninguna demostración de consistencia que resulte esencialmente más complicada para el sistema λK por su mayor libertad.

Por lo que hace al principio de extensionalidad, la argumentación de Church —según la cual para su teoría de λδ-conversión es imposible una interpretación extensional— nos parece una falacia. La argumentación depende del ejemplo (cfr. [CLC], página 64) $X = \lambda xy.xy$, $Y = \lambda xy.\delta_1 xyXxy$, que, según dice Church, «corresponden a la misma función en extensión». De todos modos, X e Y no cumplen la hipótesis de (ζ). Por otro lado, hay, sin duda, varias interpretaciones para las cuales podemos desear distinguir entre dos combinadores que corresponden a la misma combinación con órdenes diferentes, y para éstos (η) no es aceptable. Situaciones de este tipo se nos presentarán en la teoría de la funcionalidad.

Estos sistemas restringidos tienen, pues, un interés desde ciertos puntos de vista. En esta obra prestamos, ante todo, atención a los sistemas más fuertes; pero no ignoramos completamente los otros.

4. El sistema δ_1

Como vimos en § 1, Church no incluyó en [CLC] sus estudios sobre el sistema [PFC]. La única fuente de información detallada acerca de este sistema es [MLg], que usa la antigua notación. Pero el sistema tiene cierto interés, y vamos a hacer, por ello, algunas observaciones al respecto.

---

[33] Cfr. § 1E3.
[34] Cfr. § 5E5.
[35] Cfr. §§ 4E3, 8B, 8S1.

La filosofía básica del sistema se expone en [RPx]. Hay una jerarquía de cuantificadores análogos al ξ de § B4. El sistema tiene, pues, un aspecto ilativo. No obstante, cuando el sistema se interpreta, esos cuantificadores corresponden a una enumeración de los objetos que corresponden a obs construidos mediante ciertos procesos en el interior del sistema más que a una generalización respecto de alguna categoría de objetos que existan independientemente del sistema. La apariencia ilativa es, por tanto, ilusoria. Pero el sistema da una posibilidad interesante de interpretar un sistema ilativo.

El sistema tiene, además, la peculiaridad de que la verdad se identifica con el número 2. Esto es muy artificial. Es un caso de la reducción de un sistema logístico a forma relacional, tal como se expuso en § 1E1.

El teorema de Church-Rosser

Llamamos «teorema de Church-Rosser» al primero de dos teoremas formulados y demostrados por Church y Rosser [PCn]. Es un teorema del cálculo de conversión-λ que puede formularse del modo siguiente: *Si* $X = Y$, *entonces hay un ob* Z *tal que* $X \geq Z$ e $Y \geq Z$. Este teorema es verdadero para todas las formas de conversión-λ y tiene generalizaciones para formas de cuasi-ordenadoras que no tienen ninguna relación directa con el cálculo λ. Empezamos este capítulo con un estudio de la demostración del teorema, incluyendo algunas de sus generalizaciones. Esta tarea nos ocupa en §§ A-D. En § E demostramos un llamado «teorema de normalización» que ocupa el lugar del segundo teorema de Church y Rosser [PCn]. En § F tratamos algunos teoremas referentes a «orden y grado», los cuales dependen del teorema de Church-Rosser; allí consideramos formas debilitadas de (η) y (ζ) que son válidas en el cálculo β.

Usamos en este capítulo algunas convenciones notacionales exclusivas de él. Así, en § A usamos '(B)', '(C)', '(D)', '(E')', y en el § C '(H)', como nombres de ciertas propiedades; no deben confundirse con notaciones similares de capítulos posteriores. En § B usamos corchetes y otras convenciones para ayudar a distinguir un nombre de un caso particular de un ob del nombre del ob mismo. En § C usamos negritas minúsculas para ciertas relaciones. Excepto en algunos contextos especiales como § 6F, no nos referimos luego más a estas notaciones especiales.

A. FORMULACION GENERAL

El teorema de Church-Rosser afirma una cierta propiedad —la propiedad de Church-Rosser (χ), de la relación de reducibilidad. En la presente sección consideramos esa propiedad respecto de una relación cuasi-ordenadora sometida a restricciones muy amplias. Sobre esta base consideramos algunos corolarios que se siguen del teorema de Church-

Rosser sin usar las propiedades especiales de la reducibilidad, así como ciertas propiedades (B), (C), (D), (E), sugeridas por los trabajos de Newman [1]. Aquí mostramos que (χ) se sigue de (B) o (C), y que (C) se sigue de (E). El resto de la demostración del teorema de Church-Rosser se dará en las secciones posteriores, según el plan que se esboza en § 5.

1. La propiedad (χ) y sus corolarios

Sea '=' el signo que designa la relación de equivalencia engendrada [2] por una relación $\geq$. Definimos la propiedad (χ) del modo siguiente:

(χ) *Si*

$$X = Y, \tag{1}$$

entonces hay un Z *tal que*

$$X \geq Z \;\&\; Y \geq Z. \tag{2}$$

El teorema de Church-Rosser tiene entonces la siguiente formulación:

Teorema 1. *Si* $\geq$ *es la relación de reducibilidad definida en el capítulo* 3 *para cualquiera de las formas del cálculo* λ, *entonces* (χ) *vale.*

La demostración de este teorema no se completará hasta el final de § D.

Consideraremos aquí ciertas propiedades cuya relación con (χ) puede establecerse sin usar más que las propiedades siguientes de $\geq$: (i) $\geq$ es una relación cuasi-ordenadora, es decir, tiene las propiedades (ρ), (τ); (ii) $\geq$ tiene asociada con ella una relación de equivalencia $\cong$ tal que

$$X \cong Y \rightarrow X \geq Y \;\&\; Y \geq X; \tag{3}$$

y (iii) hay una categoría especial de X, llamados los X' en *forma normal*, tales que, para todo X de esa categoría,

$$X \geq Y \rightarrow X \cong Y. \tag{4}$$

---

[1] [TCD]. Newman considera las propiedades (B), (C), (D), y llama (A) a la propiedad de Church-Rosser. Considera también la propiedad (E), pero no con ese nombre; y su propiedad (D) es más débil que la considerada aquí. (Cfr. § 3.)

[2] Esto está definido en § 2D5, excepto en que aquí no postulamos Subr.

Para el caso en el cual $\geq$ es λ-reducibilidad, estas propiedades valen si tomamos $\cong$ como convertibilidad-α, y las formas normales como se definió en § 3D5. Pero en este caso observaremos que el recíproco de (3) no vale; pues si

$$X \equiv (\lambda x.xx)\,((\lambda uv.\,uvv)\,(\lambda w.\,w)),$$
$$Y \equiv (\lambda xy.xyy)\,(\lambda z.z)\,((\lambda uv.uvv)\,(\lambda w.w)),$$

entonces $X \geq Y$ y $Y \geq X$, pero no $X \cong Y$. Análogamente, si

$$X \equiv (\lambda x.xx)\,(\lambda y.yy),$$

entonces (4) vale para todo Y, pero X no está en forma normal.

TEOREMA 2. *Bajo las condiciones* (I), (II), (III), (χ) *vale lo siguiente*:

(a) *Si* $X = Y$ *e* Y *está en forma normal, entonces* $X \geq Y$.
(b) *Si* $X = Y$ *y* X *e* Y *están ambos en forma normal, entonces* $X \cong Y$.

Demostración. Si se tiene (1), entonces, por (χ), hay un Z tal que vale (2). De la segunda relación (2) y del análogo de (4) para Y y Z obtenemos $Y \cong Z$. De esto concluimos $X \geq Z$ por (3) y (τ). Esto demuestra (a). De (a), por (4), obtenemos (b).

El teorema 2 muestra que el teorema 1 establece la consistencia del cálculo de conversión-λ. Pues si no distinguimos entre obs convertibles-α, un ob no puede tener más que una forma normal. Además, si X es una combinación formada a partir de variables y sólo por aplicación, X no puede reducirse, y está, por tanto, en forma normal; tampoco puede hacerse ningún cambio por conversión-α. De los teoremas 1 y 2b se sigue que dos combinaciones distintas de variables no pueden convertirse una en otra. Así, pues, la teoría de la conversión-λ no sólo es consistente en sentido técnico, sino que lo es también con la interpretación deseada.

2. LA PROPIEDAD (B)

La propiedad siguiente está obviamente implicada por (χ):

(B) *Si para algún* U

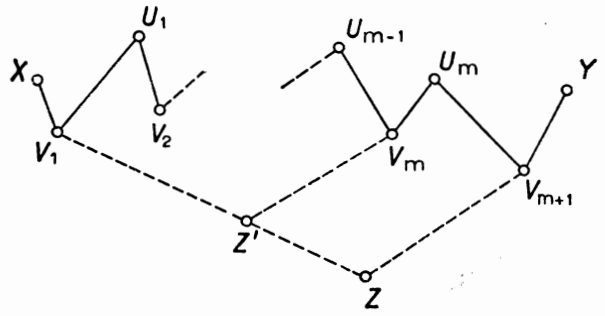
(5) $$U \geq X \;\&\; U \geq Y,$$

entonces hay un Z *tal que vale* (2).

El teorema siguiente muestra que (B) es equivalente a (χ) siempre que $\geq$ sea una relación cuasi-ordenadora:

TEOREMA 3. (ρ) & (τ) & (B) $\rightarrow$ (χ).

Demostración [3]. Supongamos que vale (1). Como $=$ es la equivalencia engendrada por $\geq$, hay una secuencia [4] de obs $X_0, X_1, \ldots, X_n$ tal que $X_0 \equiv X$,



$X_n \equiv Y$, y para todo i o bien $X_i \geq X_{i+1}$ o bien $X_{i+1} \geq X_i$. Por virtud de (τ) podemos suponer que esos dos casos ocurren alternativamente; y usando (ρ) si es necesario, podemos suponer $n > 0$, $X_0 \geq X_1$ y $X_n \geq X_{n-1}$. De este modo obtenemos unos $U_1, \ldots, U_m, V_1, \ldots, V_{m+1}$ tales que

$$X \geq V_1,\ U_i \geq V_i,\ U_i \geq V_{i+1},\ Y \geq V_{m+1}.$$

Ahora podemos demostrar la existencia de un Z tal que

$$X \geq V_1 \geq Z, \qquad Y \geq V_{m+1} \geq Z,$$

por inducción sobre m. Para $m = 0$, V_1 es el Z buscado. Si $m > 1$, podemos inferir de la hipótesis inductiva que hay un Z' tal que

$$V_1 \geq Z', \qquad V_m \geq Z'.$$

Entonces, por (τ), $U_m \geq Z'$ y $U_m \geq V_{m+1}$; luego, por (B), hay un Z que $Z' \geq Z$ y $V_{m+1} \geq Z$. De esto se sigue (2) por (τ).

---

[3] Cfr. la fig. 1. Las líneas descendentes indican reducciones. Cfr. la explicación de § 3.

[4] Cfr. § 2D5.

3. Cuasi-ordenadoras producidas gradualmente

Supongamos ahora que hay una relación $>_1$ tal que $\geq$ es la cuasi-ordenadora producida por $>_1$ y $\cong$, y que X está en forma normal precisamente cuando no hay ningún Y tal que $X >_1 Y$. Entonces $=$ es, naturalmente, la equivalencia producida por $>_1$ y $\cong$. En estas precisas circunstancias decimos que $\geq$ $(=)$ es una *cuasi-ordenadora (una equivalencia) producida gradualmente*; decimos, además, que $>_1$ es la relación productora y $\cong$ la identidad asociada. Está entonces claro que valen las propiedades (I), (II), (III) del § 1. En general, es correcto ignorar la relación $\cong$ y, salvo explícita declaración contraria, se entiende que cuando decimos

$$X >_1 Y \tag{6}$$

podemos subrogar a X o a Y por X' o Y', tales que $X \cong X'$, $Y \cong Y'$. Dicho de otro modo, tratamos a $\cong$ como una identidad efectiva [5]. Cuando vale (6) decimos que el paso de X a Y es una *contracción*, y el de Y a X una *expansión*.

De esas convenciones se sigue que cuando vale (1) podemos pasar de X a Y por una secuencia de pasos cada uno de los cuales es una expansión o una contracción. La propiedad (χ) equivale a la afirmación de que esa transición, de ser, en general, posible, puede realizarse siempre de tal modo que todas las contracciones precedan a todas las expansiones. Cuando no hay expansiones en el proceso tenemos una *reducción* $\mathfrak{D}$ de la forma

$$X \cong X_0 >_1 X_1 >_1 \cdots >_1 X_n \cong Y \; (n \geq 0); \tag{7}$$

en tal caso decimos que X_k es el k'-ésimo estadio y que el paso de X_{k-1} a X_k es el k'-ésimo paso de $\mathfrak{D}$. También decimos que X_0 es el punto de partida, y que X_n es el final de $\mathfrak{D}$. (Cfr. § E1.)

Church y Rosser han propuesto un expediente para visualizar este proceso de conversión. Representemos los pasos particulares del proceso que va de X a Y por segmentos que vayan en la dirección general de izquierda a derecha: las contracciones con pendiente negativa, las

---

[5] Esto significa que estamos abstrayendo respecto de $\cong$. El procedimiento es legítimo siempre que las conclusiones que obtengamos sean invariantes respecto de $\cong$. Esto se demostró para la sustitución en § 2E. Siempre supondremos esto en nuestros razonamientos, pero sin sentarlo explícitamente.

expansiones con pendiente positiva, y las transiciones mediante $\cong$, si es que se desea contar con ellas, representadas por segmentos horizontales. Entonces la transición de X a Y quedará representada por una línea quebrada con una alternancia de cimas y valles. La propiedad (χ) afirma que es posible hacer la transición de tal modo que haya sólo un valle y ninguna cima. La propiedad (B) afirma que esto es posible en el caso de que la transición inicial contenga sólo una cima; y la desmotración del teorema 3 es esencialmente una demostración de (χ) por inducción sobre el número de cimas.

Considérese ahora la propiedad siguiente:

(C) *Dados X e Y, existe un Z tal que* (2) *vale siempre que exista un U tal que*

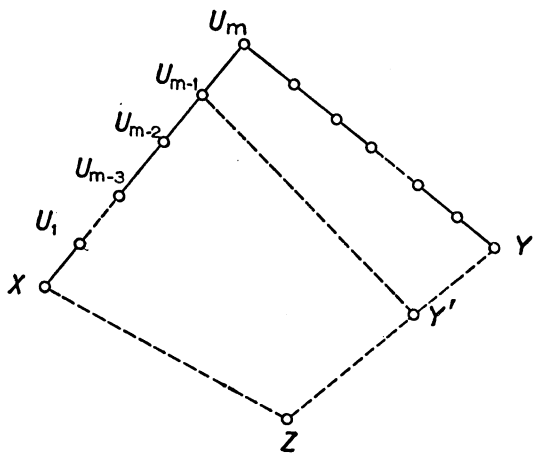
$$U >_1 X \;\&\; U \geq Y. \tag{8}$$

Está claro que (C) es un caso especial de (*B*). Recíprocamente, tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 4. *Sea $\geq$ una cuasi-ordenadora gradualmente producida, con una relación productora $>_1$ y la identidad asociada $\cong$. Entonces, si* (C) *vale, vale también* (B).

Demostración (cfr. fig. 2). Supongamos que vale (5), y supongamos

$$U \equiv U_m >_1 \cdots >_1 U_0 \equiv X$$



Si $m = 0$, Y es el Z buscado. Si $m \neq 0$, entonces, por (C), hay un Y' tal que $U_{m-1} \geq Y'$ e $Y \geq Y'$. Usando la hipótesis de una inducción sobre m,

concluimos que hay un Z tal que $X \geq Z$, $Y' \geq Z$, de donde se sigue (2) por (τ).

4. Residuos

Hasta el momento no hemos tenido en cuenta el hecho de que en la teoría de la conversión-λ toda contracción es una subrogación de un determinado componente, llamado un «extenso» (§ 3D5), por otro, llamado su «contracto». Además, cuando tenemos una contracción de un extenso R, la contracción (6) por ejemplo, entonces, a cada extenso S de X corresponderá un conjunto de extensos de Y que son, por así decirlo, huellas de S. Llamaremos a los extensos de ese conjunto residuos de S respecto de R.

Pero ahora abstraeremos un poco de esa situación. No es necesario suponer que una contracción es la subrogación de un componente, sino, simplemente, que es un movimiento de una naturaleza determinada y hecho desde cierto punto de partida. Un *extenso* no es entonces más que un movimiento posible; y la contracción de un extenso es sencillamente la ejecución de ese movimiento. Por lo que hace a los *residuos* supondremos simplemente que, tras una contracción (6) respecto de un extenso R, hay un método que permite asociar ciertos extensos de Y al extenso S de X; llamamos a esos extensos de Y los residuos de S en Y y los designamos colectivamente por $S|R$. Se supone que estos residuos están definidos de un modo uniforme sin considerar la presencia de otros extensos. Puede ocurrir que $S|R$ sea vacío; y exigimos que esto ocurra siempre que S sea el mismo R. Definimos los residuos de un extenso S de X_0 respecto de la reducción (7) por la exigencia inductiva de que S sea su propio y único residuo en X_0, y que los residuos de S en X_k sean los residuos de los residuos de S en X_{k-1} respecto del extenso contraído en el paso k-ésimo. Obsérvese que no queda excluida la posibilidad de que en una reducción se formen nuevos extensos que no sean residuos de ningún extenso del punto de partida.

Dado un conjunto finito, $\mathfrak{R}$, de extensos del punto de partida X, definimos una *reducción relativa a* $\mathfrak{R}$ —más simplemente, una *reducción* $\mathfrak{R}$— como una reducción $\mathfrak{D}$ en la cual todos los extensos contraídos en cualquier paso son residuos de $\mathfrak{R}$. Definimos una *reducción completa relativa a* $\mathfrak{R}$ como una reducción-$\mathfrak{R}$ que termina en un Y que no contiene residuos de $\mathfrak{R}$, de tal modo que resulta ya imposible continuar la reducción en tanto que reducción-$\mathfrak{R}$.

Ahora consideraremos la siguiente propiedad:

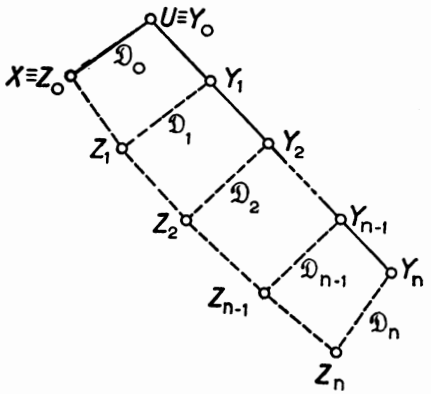
(E) *Si $\mathfrak{R}$ es un conjunto finito de extensos de X, entonces hay una reducción-$\mathfrak{R}$ completa a partir de X, y toda reducción-$\mathfrak{R}$ completa a partir de X termina en el mismo Y.*

El teorema siguiente se cita a veces como teorema (o lema) de los movimientos paralelos:

TEOREMA 5. *Sea $\geq$ una cuasi-ordenadora producida gradualmente y para la cual están definidos los residuos y vale la propiedad* (E). *Entonces vale también la propiedad* (C).

Demostración (cfr. fig. 3). Admitamos que vale (8). Sea R el extenso de U tal que U pasa a X por contracción de R. Sea la segunda reducción de (8)

$$U \equiv Y_0 >_1 Y_1 \ldots >_1 Y_n \equiv Y,$$



y sean $\mathfrak{R}_k$ los residuos de R en Y_k. Sea Z_k el ob obtenido a partir de Y_k mediante una reducción completa $\mathfrak{D}_k$ relativa a $\mathfrak{R}_k$. Entonces Z_0 es X (puesto que R no tiene residuo respecto de sí mismo). Si podemos mostrar que

$$Z_k \geq Z_{k+1}, \tag{9}$$

se seguirá por (τ) que Z_n es el Z buscado.

Sea S el extenso cuya contracción convierte a Y_k en Y_{k+1}. Entonces, puesto que S no tiene residuo respecto de sí mismo, la contracción de S seguida por $\mathfrak{D}_{k+1}$ es una reducción completa relativa al conjunto que consta de S y $\mathfrak{R}_k$[6]. Esta reducción lleva de Y_k a Z_{k+1}. Por (E) la reducción completa formada realizando primero $\mathfrak{D}_k$ y ejecutando

[6] Obsérvese que es esencial que $\mathfrak{R}_k$ sea el mismo, se admita o no se admita S.

luego una reducción completa respecto de todos los residuos de S tiene que llevar también de Y_k a Z_{k+1}. La primera parte, $\mathfrak{D}_k$, de esta reducción lleva de Y_k a Z_k; por tanto, la segunda parte lleva de Z_k a Z_{k+1}. Esto establece (9) y completa la demostración.

5. Esbozo de la demostración del teorema 1

De los teoremas 3, 4 y 5 se sigue que para establecer el teorema 1 basta con establecer la propiedad (E). Lo haremos así, en dos estadios, para la reducibilidad $\beta\delta$. En § B estableceremos, para todos los tipos de reducibilidad-λ, la siguiente especialización de (E):

(D) *Si R y S son dos extensos de X, y si la contracción de R seguida por una reducción completa relativa a $S|R$ convierte a X en Y, entonces una contracción de S seguida por una reducción completa relativa a $R|S$ lleva también a Y*[7].

Para la reducibilidad $\beta\delta$ mostraremos, además, que todos los extensos de X tendrán los mismos residuos después de las dos reducciones. En § C, sobre la base de condiciones más especiales que las aceptadas aquí, pero menos restrictivas que las hechas en § B, derivamos (E) partiendo de esa forma reforzada de (D).

Si hay extensos-η mostraremos mediante un ejemplo en § B que no valen para residuos tal como quedan definidos allí ni (E) ni la forma reforzada de (D). No sabemos si alguna otra definición de residuos puede servir para afirmar el teorema de Church-Rosser bajo el resultado general de § C. Más fácil parece derivar la propiedad (B), cuando hay extensos-η mediante una argumentación especial partiendo de esa misma propiedad en el caso en que no hay tales extensos-η. Esto se realiza en § D. Con ello quedará completa la demostración del teorema 1.

B. LA PROPIEDAD (D)

En esta sección definimos los residuos de un modo que se conforma con § A4, y mostramos que la propiedad (D) de § A5 vale para todo tipo de conversión $\beta\delta$. La forma fuerte de (D), mencionada en § A5, se esta-

---

[7] La propiedad (D) recibe aquí ese nombre por la propiedad correspondiente de Newman [TCD]. Pero no es exactamente la misma propiedad. La (D) de Newman es aquella especialización de (C) en la cual la segunda premisa de (8) está sustituida por $U >_1 Y$. Esto queda implicado por nuestra (D), pero el recíproco no es evidente. Puesto que la (D) de Newman no desempeña ningún papel en nuestro desarrollo nos abstenemos de introducir una abreviatura para ella.

blece para la conversión βδ; pero mostramos mediante un ejemplo que ni ella ni (E) valen si hay que admitir simultáneamente contracciones β y contracciones η. Con fines de exposición empezamos con el caso de la conversión β y tratamos después las complicaciones. Al final consideramos algunas generalizaciones que permiten que la teoría se aplique en casos en los cuales no hay una referencia explícita a la conversión λ.

1. La teoría de la conversión β

En esta teoría todo extenso es un componente de la forma $(\lambda x M)N$; la contracción del extenso subroga a ese componente el ob $[N/x]M$. Se entiende que extensos que son distintos como componentes son también distintos como extensos, aunque no lo sean como obs; es decir, casos distintos de un mismo ob $(\lambda x M)N$ se consideran extensos distintos. Usamos las letras 'R', 'S', 'Q', 'P' para denotar extensos; 'A', 'B', 'C', 'D' para los correspondientes contractos, y 'M', 'N' 'L', 'K' para parte de los extensos. Todos esos símbolos denotan componentes concretos. Cuando deseamos referirnos al ob del que un tal componente es un caso ponemos entre corchetes el símbolo correspondiente; así, si R es un extenso, $[R]$ es el ob del cual es un caso.

Nuestro primer paso consiste en dar del modo siguiente una definición precisa de residuo:

Definición 1. Sean R, S extensos de X, y sea A el contracto de R. Supóngase que la contracción de R en X reduce X a Y; entonces Y se obtiene a partir de X por subrogación de un caso de $[R]$ por A. Y los residuos de S son los componentes de Y definidos como sigue:

Caso 1. S es el mismo que R. Entonces S no tiene residuo.

Caso 2. R y S no se solapan. Entonces el residuo de S es aquel caso de $[S]$ que es homólogo en Y al caso originario de $[S]$ en X.

Caso 3. R es una parte de S. Hay entonces un caso de $[R]$ en S, y la contracción de R subroga a este caso de $[R]$ uno de $[A]$. Convéngase en que esto convierte a $[S]$ en $[S']$. Entonces la contracción de R subroga a S (como componente de X) un caso de $[S']$. Este caso de $[S']$ es el único residuo de S.

Caso 4. S es una parte de R. Sea R $(\lambda x M)N$. Como hicimos en § 3D5, llamamos a M la base de R, y a N el argumento de R. Distinguimos dos subcasos:

Subcaso 4a. S es una parte de M. Entonces la contracción de R subroga a todo caso libre de x en M un caso de $[N]$, posible-

mente con cambios de variables ligadas, de acuerdo con (α). Convéngase en que esta misma sustitución convierte a S en S'. Entonces la contracción de R subroga a S, como componente de la base de R, un caso de $[S']$ en A que es homólogo del caso originario de $[S]$ en M. Este caso de $[S']$ como componente de Y es a su vez el único residuo de S.

Subcaso 4b. S es una parte de N. Entonces para cada caso libre de x en M hay un caso de $[N]$ en A, y, por tanto, en Y. En cada uno de estos casos de $[N]$ habrá un caso de $[S]$ homólogo del caso originario de $[S]$ en N. Estos casos de $[S]$ son los residuos de S en Y. En la conversión βI puede haber uno o más de tales residuos; en la conversión βK, puede no haber ninguno, en cuyo caso decimos que S ha sido *cancelado* por R.

Esos dos casos son exhaustivos, pues la posibilidad restante —que $[S]$ sea λxM no es relevante, porque λxM no es un extenso β.

Estará claro por la definición 1 que el residuo de un extenso β, S, es siempre un extenso β, el cual es o bien el mismo ob S, o bien se obtiene de él por sustitución de algunas de sus variables libres, o bien se obtiene por contracción de un extenso en su interior.

Esto completa la definición de los residuos. Ahora podemos proceder a verificar la propiedad (D).

TEOREMA 1. *La propiedad* (D) *vale para la reducción* β.

Demostración. Sean R y S los dos extensos en cuestión. Sea $\mathfrak{D}_1$ la reducción formada al contraer primero R y verificar luego una reducción completa, $\mathfrak{D}_3$ relativa a $S|R$; y sea $\mathfrak{D}_2$ la reducción formada al contraer primero S y practicar luego una reducción completa, $\mathfrak{D}_4$, relativa a $R|S$. Fijemos que la contracción de R reduce X a Y_1, y que la contracción de S reduce X a Y_2. Tenemos que mostrar que si $\mathfrak{D}_3$ reduce Y_1 a Z, entonces $\mathfrak{D}_4$ reduce Y_2 a Z, y recíprocamente.

Tenemos que considerar los mismos casos vistos en la definición 1; pero puesto que los casos 3 y 4 son simétricos, nos bastará con considerar los casos 1, 2 y 4.

Caso 1. R y S son el mismo extenso. En este caso (D) es trivial.

Caso 2. R y S no se solapan. Entonces el efecto de $\mathfrak{D}_1$ o $\mathfrak{D}_2$ es, respectivamente, la subrogación de los componentes, que no se solapan, R y S por A y B. Estas subrogaciones pueden hacerse en cualquier orden e independientemente. Por tanto, $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$ llevan al mismo Z.

Caso 4a. R es $(\lambda xM)N$ y S es una parte de M. Sea B el contracto de S y S' su residuo (único); entonces $S' \equiv [N/x]S$. Sea B' el contracto de S'. La contracción de R subroga a R por $[N/x]M$, y la contracción de S' convierte a esto en un ob A' obtenido a partir de M mediante subro-

gación de S por B', más subrogaciones sin solapamiento de x por N. Por otro lado, si es S el que se contrae primero, R se convierte en su residuo $R' \equiv (\lambda x M')N$, en el cual M' se obtiene mediante subrogación de B a S en M. La contracción de R' lleva a $A'' \equiv [N/x]M'$; en ésta el componente B se hace $[N/x]B$. De este modo A'' se ha obtenido a partir de M mediante subrogación de S por $[N/x]B$, más subrogaciones sin solapamiento de x por N. Para demostrar nuestro teorema basta con mostrar

$$[N/x]B \cong B'. \tag{1}$$

Sea S $(\lambda y K)L$, y supongamos que y es distinto de x y no está libre en N. Sea $K' \equiv [N/x]K$, $L' \equiv [N/x]L$. Entonces $S' \equiv (\lambda y K')L'$, B $\equiv [L/y]K$, $B' \equiv [L'/y]K'$. Entonces (1) se sigue por el teorema § 3E2c.

Caso 4b. R es $(\lambda x M)N$ y S es una parte de N. Entonces los residuos de $S|R$ son instancias de $[S]$ que son componentes de las varias instancias de $[N]$ homólogas de S como componente de N. Estos residuos no se solapan, y pueden contraerse en cualquier orden e independientemente. Si la contracción de S reduce N a N', entonces la contracción de todos esos residuos subroga todos los casos de $[N]$ por casos de $[N']$. Así obtenemos el mismo resultado que si hubiéramos contraído primero S y luego el único $R' \varepsilon R|S$. Esto muestra que $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$ llevan al mismo Z.

Con esto queda completa la demostración del teorema 1.

2. El cálculo λ pleno

Si se admiten simultáneamente extensos η y δ nos encontramos con casos nuevos, de modo que tenemos que volver a formular la definición 1 del modo siguiente:

Definición 2. Sean R y S extensos de X. Reduzca la contracción de R X a Y. Entonces los residuos de $S|R$ son los componentes de Y definidos como sigue:

Caso 1. R y S son el mismo extenso. Entonces S no tiene residuo.

Caso 2. R y S no se solapan. Entonces el residuo de S es como en la definición 1.

Caso 3. R es una parte de S. Entonces S es un extenso β o un extenso η. Consideramos los subcasos siguientes:

Subcaso 3a. S es $(\lambda x M)N$ y R es una parte de M. El residuo de S es como en la definición 1.

Subcaso 3b. S es $(\lambda xM)N$ y R es una parte de N. Procedemos como en la definición 1.

Subcaso 3c. S es $(\lambda xM)N$ y R es λxM. Entonces R es un extenso η, $M \equiv Lx$, sin que x se presente libre en L. En este caso S no tiene residuo.

Subcaso 3d. S es $\lambda x(Mx)$ y R es una parte de M. Convengamos en que la contracción de R subroga M por M'. Entonces el caso de $[\lambda x(M'x)]$ que es homólogo de S es el residuo de S.

Subcaso 3e. S es $\lambda x(Mx)$ y R es Mx. Entonces R no es un extenso δ, puesto que contiene una variable, y no tiene tampoco la forma propia de un extenso η. Por tanto, R es un extenso β, y $M \equiv \lambda yL$. Entonces S no tiene residuo.

Caso 4. S es una parte de R. Entonces R es un extenso β o un extenso η. Consideramos los siguientes subcasos:

Subcaso 4a. R es $(\lambda xM)N$ y S es una parte de M. Entonces $S|R$ se define como en la definición 1.

Subcaso 4b. R es $(\lambda xM)N$ y S es una parte de N. También procedemos como en la definición 1.

Subcaso 4c. R es $(\lambda xM)N$ y S es λxM. Entonces S tiene que ser un extenso η y M es Lx, sin que x esté libre en L. No hay residuo de S.

Subcaso 4d. R es $\lambda x(Mx)$ y S es una parte de M. El contracto de R es un caso de $[M]$ homólogo a R. En este caso de $[M]$ hay un caso de $[S]$ homólogo a S de M. Este caso de $[S]$ es el residuo único de S.

Subcaso 4e. R es $\lambda x(Mx)$ y S es Mx. Entonces (cfr. subcaso 3e) S es un extenso β y M es λyL. S no tiene entonces residuo.

Esto completa la definición. Queda claro que todos los residuos de S son extensos del mismo tipo que S; o bien son instancias del mismo $[S]$, o de un ob obtenido por sustitución de una variable libre de S, o de un ob formado por la contracción de un extenso en el interior de S. También está claro que ningún proceso de reducción introduce nuevas variables; y que sólo introduce constantes nuevas por la aplicación de (δ).

TEOREMA 2. *La propiedad* (D) *vale para el cálculo* λ *pleno.*

Demostración. Sean $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, etc., como en el teorema 1. Tenemos que considerar varios casos, del modo siguiente:

Caso 1. R es el mismo extenso que S. En este caso nuestra tesis es trivial.

Caso 2. R y S no se solapan. La demostración es entonces la misma que en el teorema 1.

Caso 4a. R es $(\lambda xM)N$ y S es una parte de M. Como en el teorema 1, es suficiente establecer (1). Y como esto se hizo a propósito del teore-

ma 1 para el caso en que S sea un extenso β, no queda más que considerar los casos en los que S es un extenso η o un extenso δ.

Si S es un extenso η, $\lambda y(Ly)$, podemos suponer que y no está libre en N. Sea L' como en el teorema 1. Entonces $S' \equiv \lambda y(L'y)$, $B \equiv L$, $B' \equiv L'$, y (1) es obvio.

Si S es un extenso δ, entonces ni S ni B contienen a x. Por tanto, $B' \equiv B \equiv [N/x]B$, y (1) está claro también en este caso.

Caso 4b. R es $(\lambda xM)N$ y S es una parte de N. La demostración del teorema 1 se aplica sin ningún cambio.

Caso 4c. R es $(\lambda xM)N$ y S es λxM. Entonces M es Lx, sin ninguna x libre en L. La contracción de R o de S subroga a R el ob LN y no deja residuo ni de R ni de S.

Caso 4d. R es $\lambda x(Mx)$, sin que M contenga a x, y S es una parte de M. Convengamos en que la contracción de S reduce M a M'. Entonces $\mathfrak{D}_1$ o $\mathfrak{D}_2$ subroga a R por M', y, por tanto, las dos hacen la misma subrogación en X.

Caso 4e. R es $\lambda x.Mx$ y S es Mx. Entonces M es λyL. La contracción de R subroga a éste por M, y no deja, por tanto, resto de S; la contracción de S subroga a R por $\lambda x[x/y]L$, y no deja residuo de R. Como las dos subrogaciones de R son convertibles-α, (D) queda verificado.

Esto completa la demostración del teorema 2.

3. La forma fuerte de (D)

Para demostrar (E) por el método usado en § C necesitamos saber no sólo que $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$ reducen X al mismo Z, sino, además, que dan los mismos residuos para cualquier otro tercer extenso Q de X. El ejemplo siguiente muestra que esto no se cumple siempre:

Ejemplo 1. Sea x una variable que no se presenta libre en M, y sea

$$X \equiv R \equiv (\lambda x.\,(\lambda yM)x)N,$$
$$S \equiv \lambda x.\,(\lambda yM)x, \qquad Q \equiv (\lambda yM)x.$$

La contracción de R o de S reduce R a $(\lambda yM)N$. Pero si lo contraído es R, este extenso es, por el caso 4a, un residuo de Q, que puede contraerse ulteriormente para dar $[N/y]M$; si lo contraído es S, no hay, en cambio, residuo de Q (caso 4c) ni residuo de R (caso 3c); por tanto, hemos alcanzado el final de una reducción completa relativa a R, S, Q. Por tanto, ni (E) ni la forma fuerte de (D) valen para este ejemplo.

En vista de esta situación excluimos contracciones η a partir de este momento. Esto significa que no pueden ya presentársenos los casos 3c, 3d, 3e, 4c, 4d, 4e de la definición 2; además, S tiene un residuo único respecto de R en todos los casos, excepto cuando es $\boldsymbol{R}$ o está en el argumento de R. Nuestro teorema es como sigue:

TEOREMA 3. *Sean R, S, Q, tres extensos β o extensos δ de X. Entonces los residuos de Q después de una reducción completa relativa a R y S son los mismos cualquiera que sea el orden en que se contraen R y S.*

Desmostración. Sean $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, Y_1, Y_2, Z como en § 1. Puesto que ya hemos mostrado que hay un Z único, basta mostrar que los residuos de Q después de $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$ son los mismos en número y ocupan posiciones homólogas en Z.

Si R es el mismo ob que S, el caso es claro. Si Q es el mismo componente que R o S, entonces no tiene residuo después de $\mathfrak{D}_1$ o $\mathfrak{D}_2$. Por tanto, podemos suponer que R, S y Q son extensos distintos.

Si Q contiene tanto a R cuanto a S, entonces $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$ no contienen más que contracciones en el seno de Q. Hay claramente un residuo único de Q en ambos casos, y su posición en Z es la misma de Q en X.

Si Q no tiene solapamiento ni con R ni con S, entonces el residuo de Q después de $\mathfrak{D}_1$ o de $\mathfrak{D}_2$ es un caso único de $[Q]$ en Z homólogo la Q originaria de X.

Si Q no tiene solapamientos con R y contiene a S, entonces R y S no se solapan. Convengamos en que la contracción de S subroga Q por Q'. Entonces después de $\mathfrak{D}_1$ o de $\mathfrak{D}_2$ habrá un residuo único Q que es un caso de $[Q']$ en Z homólogo al de Q en X.

Como R y S figuran siempre simétricamente en nuestro contexto, con estos casos hemos tenido en cuenta todos aquellos en los cuales Q no está contenido en R o en S. A partir de este punto consideramos que Q está contenido en R. R es entonces un extenso β, $(\lambda x M)N$.

Si Q está contenido en M, pero no en S, entonces tampoco R está contenido en S. Habrá un único residuo de Q después de la contracción de R o de S; llamémosles, respectivamente, Q_1 y Q_2. Después de la contracción de S habrá un residuo único $R_2 \equiv (\lambda x M_2)\mathrm{N}_2$ de R; Q_2 será un componente de M_2 homólogo a Q en M. Después de su propia contracción, R_2 se convierte en $M_3 \equiv [N_2/x]M_2$; y el residuo único de Q_3, Q_2 será un componente de M_3 homólogo de Q en M. Si lo primero que se contrae es R, será subrogado por $M_1 \equiv [N/x]M$, y Q_1 será un componente de M_1 homólogo de Q en M. Puede haber varios residuos de S, pero ninguno de ellos puede contener a Q_1. Por tanto, sus contracciones subrogarán a componentes que, o bien no tienen solapamiento con Q_1, o bien están contenidos en Q_1; por tanto, su contracción —que lleva

de M_1 a M_3 según §§ 1-2, llevará de Q_1 a un componente homólogo de M_3. El teorema se verifica en este caso.

Si Q está contenido en N, pero no en S, entonces R tampoco está contenido en S. Habrá un residuo único de $Q|S$, Q_2, y un residuo único de $R|S$, $R_2 \equiv (\lambda x M_2)N_2$. Si lo que se contrae primero es S, y luego R_2, conseguimos el M_3 del párrafo anterior; los residuos de Q serán aquellos casos de $[Q_2]$ que son componentes de los varios casos de $[N_2]$ homólogos de Q_2 como componente de N_2; estos casos de N_2 son los sustituidos a los varios casos de x en M_2. Si lo primeramente contraído es R, se convertirá en M_1 como antes; los residuos de Q son componentes de los casos de $[N]$ homólogos de Q en N; éstos se sustituyen a los casos de x en M. Hay ahora tres posibilidades por lo que hace a S. 1) Si S no se solapa con R, entonces $[M_2] \equiv [M]$, $[N_2] \equiv [Nk]$, y nuestro teorema es verdadero. 2) Si S es parte de N, entonces $[M_2] \equiv [M]$; los residuos de S son casos homólogos de $[S]$ en los varios casos de $[N]$, y la contracción de esos residuos convierte los varios casos de $[N]$ en casos de $[N_2]$, dejando un único residuo homólogo para cada residuo de $Q|R$. 3) Si S está en M, entonces $[N_2] \equiv [N]$, $[Q_2] \equiv [Q]$, y hay un residuo único S_1 de S en M_1; los casos de x que no están en el argumento [8] de S ocupan posiciones homólogas en M y en M_2, y, por tanto, hay casos correspondientes de $[Q]$ en M_1 y M_3; mientras que los casos de x que están en el argumento de S pasan, por contracción de S en M, a las mismas posiciones de los casos correspondientes de $[N]$ en la contracción de S_1. En todos esos casos se verifica el teorema.

No queda por considerar más que el caso en el cual Q es parte de R y es parte de S. En este caso, tanto R como S son extensos β; y como se solapan, el uno es parte del otro. Dada la simetría, basta con suponer que S es parte de R. Supongamos que R es $(\lambda x M)N$ y S $(\lambda y K)L$, que el residuo único de $R|S$ es $R_2 \equiv (\lambda x M_2)N_2$, y que $M_1 \equiv [N/x]M$, $M_3 \equiv [N_2/x]M_2$. Hay entonces dos casos, según que S (y, por tanto, Q) esté en M o en N.

Si S es parte de M, hay entonces un residuo único $S_1 \equiv (\lambda y K_1)L_1$ de $S|R$ en M_1; además, $[N_2] \equiv [N]$. Sea B_1 el contracto de S_1. Si el primero que se contrae es S, habrá cero o más residuos de Q en B [8a]. Cada uno de ellos tendrá un residuo único que ocupará una posición homóloga en B_1. Si el primero que se contrae es R, habrá un único residuo de Q_1, Q, homólogo en S_1 al Q de S. Si Q está en K, Q_1 estará en K_1, y los residuos únicos de $Q|S$ y $Q_1|S_1$ ocuparán posiciones homólogas en la contrac-

---

[8] Esto incluye todas las instancias de x si S es un extenso δ.

[8a]. (Añadido en galeradas.) B es el contracto de S. (Cfr. teorema 1, caso 4ª).

ción correspondiente. Si Q está en L vale una afirmación correspondiente, excepto en que habrá un residuo distinto para cada caso de y en K. Como puede verse, el teorema queda verificado.

Si S es una parte de N, entonces $[M_2] \equiv [M]$. Si lo primero que se contrae es R, los residuos de S y Q serán casos de $[S]$ y $[Q]$ en los casos de $[N]$ sustituidos a los x de M. Si se contrae cada uno de esos residuos de S, tendremos diferentes casos de $[N_2]$, con residuos de Q en posiciones homólogas a las ocupadas en N_2 por residuos de $Q|S$. Si lo primero que se contrae es S, y luego R, tendremos residuos de Q exactamente en los mismos lugares.

Esto completa la demostración.

4. Generalización

De la discusión del § A resulta que el teorema de Church y Rosser puede también valer bajo circunstancias más generales que las admitidas en §§ 1-3. Vamos a considerar ahora tales generalizaciones.

Un caso de un teorema del tipo de Church-Rosser que no se encuentra directamente bajo la formulación del teorema A1 puede ser el teorema 2E1. Efectivamente, si volvemos a la notación del § 2E, la relación **D** es una relación cuasi-ordenadora gradualmente producida. Además, podemos tomar las partes izquierdas de los axiomas definidores como extensos y podemos definir residuos de un modo obvio. Las restricciones puestas a los axiomas definidores en una extensión definicional propia son análogas a las puestas a los extensos en § 3D6. En realidad, si tuviéramos que aplicar el procedimiento de § 1E3 para hacer aplicacional el sistema de § 2E terminaríamos con algo muy parecido a una teoría de conversión-δ pura —es decir, a una teoría de conversión-λ sin λ y sin las reglas (α), (β) o (η). Teniendo en cuenta la discusión de las variables ligadas hecha en § 3B4, podemos incluso considerar la teoría de la conversión-δ como una extensión de la teoría de la definición a sistemas que contengan variables ligadas. Probablemente es posible subsumir de este modo el teorema del § 2E3 bajo el teorema de Church-Rosser; pero habrá, evidentemente, inconvenientes en el procedimiento.

Sea de ello lo que fuere, es interesante formular un conjunto de condiciones sobre extensos, residuos, etc., que se apliquen directamente al sistema del § 2E sin el rodeo de una transformación a una forma aplicaciones-λ. Vamos a formular aquí sin detalle esas condiciones del modo siguiente:

Indicaremos mediante 'φ', 'ψ', etc., operaciones definidas a base de las operaciones primitivas de un sistema formal $\mathfrak{S}$. Estas operaciones pueden suponer también la ligadura de algunas variables; pero si tal es el caso, la variable de ligadura se considerará como parte de la operación. Por ejemplo, en la teoría de la conversión λ tendríamos

$$\varphi_1(M) \equiv \lambda x(Mx),$$
$$\varphi_2(M, N) \equiv (\lambda x M)N,$$

etcétera.

Supongamos que se aíslan como *extensos* los casos de ciertos obs R de la forma $\varphi(X_1, \ldots, X_m)$. La operación φ se concibe como dada, independientemente de los $X_1, \ldots, X_m$; extensos con la misma φ, o cuyas φ difieren sólo por la elección de las variables ligadas, se consideran como del mismo *tipo*. A cada uno de esos extensos asociamos una operación de contracción, que será la subrogación de un extenso R en un ob X por un ob A llamado el contracto de R y definido unívocamente por R independientemente de X. Suponemos que entre los X_i puede haber uno llamado la base, tal que A es idéntico a la base o se obtiene a partir de ella mediante sustitución de las variables libres; y todos los demás X_i, llamados los argumentos, son tales que instancias de ellos figuran como componentes en A. Tratamos los extensos como componentes, igual que en § 1.

Sea X un ob dado y sean R, S extensos de X. Supongamos $R \equiv \varphi(M_1, \ldots, M_r)$, $S \equiv \psi(N_1, \ldots, N_s)$. Si S es parte de R, pero no parte de ningún M_i, decimos que S es congruente con R, y recíprocamente. Definimos entonces residuos de S respecto de R como sigue.

Caso 1. R y S son congruentes. Entonces S no tiene residuo.

Caso 2. R y S no se solapan. Procedemos como en la definición 1.

Caso 3. R es parte incongruente de algún N_i. Procedemos como en la definición 1.

Caso 4. S es parte incongruente de algún M_i. Si S es parte de la base procedemos como en el caso 4a de la definición 1; si S es parte de un argumento procedemos como en el caso 4b de la definición 1. (Obsérvese que el caso 4c de la definición 2 se convierte en un caso especial del caso 4a.)

No vamos a detenernos en derivar la propiedad (D) bajo esas hipótesis generalizadas, sino que la consideraremos como un postulado a verificar. Es, sin embargo, fácil verificar (D) en el caso de las extensiones definicionales propias en el sentido del § 2E; porque entonces los casos 3 y 4 son imposibles, y extensos distintos no pueden ser congruentes.

Esta última observación nos lleva a formular el teorema siguiente

como corolario del teorema A1; su demostración no quedará completa hasta el final de § C.

TEOREMA 4. *En la notación del* § 2E, *sea* $\mathfrak{S}_1$ *una extensión definicional propia de* $\mathfrak{S}_0$, *con los axiomas definidores* $\mathfrak{E}$. *Sea* $\equiv$ *la equivalencia monótona producida por* $\mathfrak{E}$. *Entonces, si*

$$X \equiv Y,$$

hay un Z tal que

$$X\,D\,Z\ \&\ Y\,D\,Z.$$

C. LA PROPIEDAD (E)

En esta sección derivaremos (E), suponiendo (D) en su forma fuerte, sobre la base de los supuestos del § A4 y de ciertas hipótesis (H). Formularemos esas hipótesis y mostraremos que valen para la reducibilidad $\beta\delta$ (y para algunas de las generalizaciones consideradas en § B4) en el § 1. En el § 2 esbozaremos la demostración de (E) y mostraremos que basta con establecer ciertos lemas. Los demás artículos se dedican al establecimiento de dichos lemas.

1. LA PROPIEDAD (H)

Empezamos por formular ciertas relaciones entre extensos, denotadas por negritas minúsculas del modo siguiente:

R **a** S	R es parte de un argumento de S.
R **b** S	R es parte de la base de S.
R **e** S	R es el mismo extenso que S.

A base de esas relaciones definimos otra más del modo siguiente:

$$R\,\mathbf{f}\,S \rightleftarrows R\,\mathbf{a}\,S \circ R\,\mathbf{e}\,S.$$

La relación **a** es entonces una relación constructivamente decidible, transitiva y asimétrica; y, si concebimos **e** como identidad, **f** es la relación ordenadora parcial asociada a **a** del mismo modo que $\leq$ está asociado a $<$ en la matemática ordinaria.

Tomamos ahora a **f** como relación primitiva y definimos con ella **a**

del modo siguiente:

(1) $$R\,\mathbf{a}\,S \rightleftarrows R\,\mathbf{f}\,S\ \&\ \neg(S\,\mathbf{f}\,R).$$

Postulamos que $R\,\mathbf{f}\,S$ sea siempre constructivamente decidible y que las propiedades siguientes valgan a base de **e** interpretada como identidad [9].

(H_0) $$R\,\mathbf{f}\,S\ \&\ S\,\mathbf{f}\,R \rightleftarrows R\,\mathbf{e}\,S.$$

(H_1) $$R\,\mathbf{f}\,S\ \&\ S\,\mathbf{f}\,Q \rightarrow R\,\mathbf{f}\,Q.$$

(H_2) $$\neg(R\,\mathbf{f}\,S) \rightarrow R|S \text{ es único.}$$

(H_3) $$R\,\mathbf{e}\,S \rightarrow R|S = 0.$$

(H_4) $$R\,\mathbf{f}\,S\ \&\ \neg(S\,\mathbf{e}\,Q)\ \&\ R' \in R|Q \rightarrow (ES').\ S' \in S|Q\ \&\ R'\,\mathbf{f}\,S'.$$

En lo que sigue se sobreentienden siempre como añadido a las hipótesis $R' \in R|Q$, $S' \in S|Q$.

(H_5) $$R'\,\mathbf{e}\,S' \rightarrow R\,\mathbf{e}\,S.$$

(H_6) $$\neg(R\,\mathbf{a}\,Q)\ \&\ R'\,\mathbf{a}\,S' \rightarrow R\,\mathbf{a}\,S.$$

(H_7) $$S\,\mathbf{a}\,Q\ \&\ R'\,\mathbf{a}\,S' \rightarrow R\,\mathbf{a}\,S.$$

Llamamos a estos postulados, tomados colectivamente, la *propiedad* (H). Se sobreentiende que el hecho de que $R\,\mathbf{f}\,S$ es siempre constructivamente decidible es parte de (H).

TEOREMA 1. *La propiedad* (H) *vale para la conversión* $\beta\delta$ *con* **f** *según se ha definido antes.*

Demostración. Los postulados (H_0) y (H_1) establecen que **f** es una relación ordenadora parcial respecto de la identidad **e**. Esto está claro. El postulado (H_2) vale porque la definición B2 da un residuo único para $S|R$ en todos los casos, excepto 1 y 4b (teniendo en cuenta que los casos 3c, 3e, 4c, 4e son imposibles). El postulado (H_3) se sigue del caso 1 de la definición B2. Para verificar (H_4) observamos que, si $\neg(S\,\mathbf{a}\,Q)$, hay un residuo único de $S|Q$ (por H_2), el cual tiene que contener a R'; mientras que si S **a** Q, entonces también R **a** Q, y la instancia del argumento de Q que contiene a R' contendrá el S' buscado. El postulado (H_5) dice que extensos distintos no tienen nunca el mismo residuo; esto se des-

[9] De desearlo, podríamos también tomar **e** como definida en base **f** por (H_0); entonces resulta una equivalencia abstracta que podría representar a la «congruencia» mencionada como posibilidad de generalización en el § B4. Pero como no se conocen aplicaciones de esta generalización no nos pondremos a realizarla.

prende claramente de la definición B2. Los postulados (H_6) y (H_7), puesto que S **a** Q y S **b** Q son incompatibles, se siguen de lo siguiente (sobreentendiendo $R' \in R|Q$, $S' \in S|Q$):

$$(2) \qquad R' \mathbf{a} S' \;\&\; \neg (R \mathbf{a} S) \rightarrow R \mathbf{a} Q \;\&\; S \mathbf{b} Q.$$

Esto expresa el hecho de que un nuevo residuo no puede insertarse en un argumento de S más que por contracción de un extenso que contiene un prototipo del nuevo extenso en su argumento y S en su base. Ello queda también claro por la definición B2.

Esto completa la demostración del teorema 1.

2. Esbozo de la demostración de (E)

Nos disponemos ahora a demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2. *Sea* $\geq$ *una relación cuasi-ordenadora gradualmente producida, y sean definidos los extensos y los residuos como en* § A4. *Sea* **f** *una relación decidible entre extensos, y sea* **a** *definida como en* (1). *Si valen* (H) *y la forma fuerte de* (D), *entonces vale* (E).

Vamos a esbozar ahora la demostración de este teorema deduciéndolo de ciertos lemas que se establecerán más adelante.

En el caso en que $\mathfrak{R}$ contiene sólo un extenso, (E) es obvia; si $\mathfrak{R}$ contiene sólo dos extensos, (E) es lo mismo que (D). Resulta natural esperar una inducción sobre el número de extensos de $\mathfrak{R}$. Pero una tal inducción tropieza con la dificultad de que el número de residuos después de una contracción puede ser mayor que el número de residuos existentes antes. Por eso hay que complementar la argumentación por inducción.

Empecemos por algunas definiciones. Llamamos a dos reducciones, $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$, *equivalentes* cuando llevan del mismo X al mismo final Y y asignan los mismos residuos a todos los extensos de $\mathfrak{R}$ en X. Con esta terminología, (D) quiere decir que toda reducción completa respecto de dos extensos R y S es equivalente a cualquier otra; la misma afirmación, hecha para un $\mathfrak{R}$ cualquiera, implica la segunda parte de (E). Diremos que R es *máximo* en $\mathfrak{R}$ si no hay ningún S en $\mathfrak{R}$ tal que R **a** S; y mínimo si no hay ningún S en $\mathfrak{R}$ tal que S **a** R. Queda entonces claro por (H_1) que en todo $\mathfrak{R}$ hay al menos un extenso máximo y un extenso mínimo.

Si se contrae un extenso mínimo de $\mathfrak{R}$, se sigue por (H_2) y (H_3) que el número de extensos ha disminuido al menos en una unidad. De esta

observación podemos inferir la primera parte de (E) sin más dificultad mediante una inducción sobre el número m de extensos de $\mathfrak{R}$. Y de esto se sigue que toda reducción relativa puede prolongarse de un modo al menos para formar una reducción completa (relativa). Lo único que queda por demostrar es, por tanto, que dos reducciones completas cualesquiera relativas a $\mathfrak{R}$ son equivalentes.

Un procedimiento para demostrarlo sería mostrar que toda reducción completa (relativa), $\mathfrak{D}$, es equivalente a otra en la cual lo primero contraído es un determinado extenso mínimo; de esto podríamos inferir (E) por inducción sobre m. Pero parece técnicamente más fácil mostrar que toda $\mathfrak{D}$ tal es equivalente a una *reducción relativa mínima* $\mathfrak{D}'$, esto es, a una reducción en la cual el extenso contraído en cada paso es mínimo entre los residuos que existían antes de ese paso. Esto es lo que haremos en los §§ 4-5. Será necesario mostrar también que cualquier extenso mínimo puede tomarse como el primero contraído en $\mathfrak{D}'$; la demostración de los §§ 4-5 lo mostrará incidentalmente.

La demostración de los §§ 4-5 completará, pues, la demostración del teorema 2. En el § 3 tratamos algunos lemas preliminares.

Probablemente es posible demostrar (E) por otro procedimiento, en el cual, en vez de poner, por así decirlo, en primera línea un extenso mínimo se pase a retaguardia un extenso máximo. Este método resultaría más afín que el nuestro al método original de Church y Rosser. No hemos estudiado todas sus posibilidades; pero parece probable que se necesitarían hipótesis más fuertes en algunos respectos, y más débiles en otros, que las del teorema 2.

3. Secuencias mínimas de extensos

Definimos una *secuencia mínima* de extensos como una secuencia $R_1, ..., R_m$ tal que

$$(3) \qquad i > j \rightarrow \neg (R_i \mathbf{f} R_j).$$

Dada una secuencia de extensos $R_1, ..., R_m$, mínimo o no, definimos una *reducción secuencial respecto de* $R_1, ..., R_m$ como una reducción tal que ningún residuo de ningún R_i se contrae después que un residuo de R_{i+1}.

Si $R_1, ..., R_m$ es una secuencia mínima se sigue por (3) y (H_2) que hay un residuo único, R_i', de cada R_i, para $i > 1$, tras la contracción de R_1. Además, de (H_6) se sigue que

$$\neg (R_i \mathbf{a} R_1) \;\&\; R_i' \mathbf{a} R_j' \rightarrow R_i \mathbf{a} R_j;$$

de esto, en combinación con (H_5), se sigue que R_2', ..., R_m' es una secuencia mínima de m-1 términos. Por inducción sobre k se sigue que después de efectuada una reducción secuencial respecto de R_1, ..., R_k, cada R_i, para $i > k$, tendrá un residuo único R_i'; y que R_{k+1}', ..., R_m' constituirán una secuencia mínima de m-k términos.

Se sigue de esto que la reducción secuencial completa respecto de una secuencia mínima R_1, ..., R_m es única y consta de la contracción del residuo único de R_2, luego del de R_3, etc.

LEMA 1. *Sea R_1, ..., R_m una secuencia mínima, y sea S tal que*

$$\urcorner (S \mathbf{f} R_i), \qquad i = 1, 2, ..., m. \tag{4}$$

Entonces la reducción secuencial completa respecto de S, R_1, ..., R_m es equivalente a la relativa a R_1, ..., R_m, S.

Demostración. Procedemos por inducción sobre m. Para $m = 1$ el lema es una especialización de (D). Basta, pues, demostrarlo para un m dado, bajo la hipótesis de que es verdadero para valores menores de m.

Sea $\mathfrak{D}_k$ ($k \leq m$) la reducción secuencial completa respecto de R_1, ..., R_k; y sea $\mathfrak{D}_k'$ la reducción secuencial completa respecto de R_1, ..., R_m, S, que es también una secuencia mínima en virtud de (4). Convengamos en que $\mathfrak{D}_k$ reduce X a X_k, y en que S_k sea el residuo de S después de $\mathfrak{D}_k$. Convengamos en que la contracción de S_k reduce X_k a Y_k; entonces $\mathfrak{D}_k'$ reduce X a Y_k. La reducción $\mathfrak{D}_m'$ consta de una reducción de X a X_{m-1} por $\mathfrak{D}_{m-1}$, luego de una contracción del residuo único, R_m' de R_m, que lleva a X_m, y luego de una contracción de S_m, que lleva a Y_m. En virtud de (D), podemos remplazar los dos últimos pasos —de X_{m-1} a Y_m— por una contracción de S_{m-1} (que lleva de X_{m-1} a Y_{m-1}) seguida por una reducción completa respecto de $R_m'|S_{m-1}$ (que lleva de Y_{m-1} a Y_m).

Sea $\mathfrak{E}_k$ una reducción secuencial completa respecto de S, R_1, ..., R_k. $\mathfrak{E}_m$ consta entonces de un $\mathfrak{E}_{m-1}$ seguido por una reducción completa respecto de los residuos de R_m. Por la hipótesis inductiva $\mathfrak{E}_{m-1}$ lleva a Y_{m-1} y tiene los mismos residuos de R_m que $\mathfrak{D}_{m-1}'$, es decir, que $R_m'|S_{m-1}$. Por tanto, también $\mathfrak{E}_m$ lleva a Y_m. Y como esto se ha mostrado mediante subrogación de reducciones por otras equivalentes a ellas, $\mathfrak{E}_m$ es equivalente a $\mathfrak{D}_m'$, q. e. d.

En el § 4 tendrá importancia el siguiente caso especial del lema 1

LEMA 2. *Si las secuencias R_1, ..., R_m, S, y S, R_1, ..., R_m son ambas mínimas, entonces sus reducciones secuenciales completas son equivalentes.*

4. Minimalización de una reducción relativa.

Vamos a dedicarnos ahora a demostrar el siguiente:

Lema 3. *Si* $\mathfrak{D}$ *es una reducción completa respecto de* $\mathfrak{R}$, *entonces hay una reducción mínima* $\mathfrak{D}'$ *(también relativa a* $\mathfrak{R}$*) que es equivalente a* $\mathfrak{D}$.

Demostración. Nuestra hipótesis admite la posibilidad de que R a S y que, al mismo tiempo, $R|S$ sea vacío. En tal caso hemos dicho (cfr. definición B1, caso 4b) que R queda *cancelado* por S. Remitimos al § 5 la consideración del caso de que se produzcan cancelaciones y demostramos aquí el lema bajo el supuesto de que no se produce ninguna. Entonces, por (H_2) y (H_3), se sigue que $R|S$ es vacío si y sólo si R e S.

Suponemos que $\mathfrak{D}$ es una reducción

$$X \equiv X_0 >_1 X_1 >_1 \dots >_1 X_n \equiv Y,$$

tal que los primeros p pasos de $\mathfrak{D}$ reducen X_0 a X_p. Sea $\mathfrak{R}_p$ los residuos de $\mathfrak{R}$ en X_p.

Decimos que una secuencia de extensos $R_0, R_1, \dots, R_m$, no necesariamente distintos, es una *secuencia representativa* de $\mathfrak{R}_p$ exactamente cuando se cumplen las siguientes condiciones (a) y (b): (a) R_0 es el residuo cuya contracción reduce X_p a X_{p+1}; (b) para $k > 0$, la contracción que lleva de X_{p+k} a X_{p+k+1} es una contracción respecto de R_k. Decimos que una tal secuencia representativa es *normal* si —y sólo si— satisface, además, las siguientes condiciones: (c) todo $R \in \mathfrak{R}_p$ es algún R_i; (d) si $i \neq j$, $\neg (R_i \mathrm{e} R_j)$; (e) la secuencia $R_0, R_1, \dots, R_m$ es mínima en el sentido de § 3.

Dada una $\mathfrak{D}$ cualquiera, podemos definir secuencias representativas de cada p partiendo del final de $\mathfrak{D}$ y procediendo del modo siguiente: para $p = n$, $\mathfrak{R}_p$ es vacío; para p $= n_{-1}$, $\mathfrak{R}_p$ consta sólo de R_0. Supongamos que $S_0, S_1, \dots, S_{m-1}$ es una secuencia representativa de $\mathfrak{R}_{p+1}$. Tómese R_0 como exige la condición (a). Para satisfacer la condición (b) tómese R_k tal que $S_{k-1} \in R_k|R_0$. Esta condición define a R_k unívocamente por (H_5). Si las secuencias representativas, tal como quedan definidas para todo p, son todas normales, entonces $\mathfrak{D}$ es claramente una reducción mínima. Vamos a establecer aquí la afirmación recíproca por inducción sobre p, procediendo desde el final de $\mathfrak{D}$ hacia adelante. Para $p = n$—1 la secuencia representativa consta sólo de R_0, lo cual es claramente normal. Supongamos que la secuencia representativa de $\mathfrak{R}_{p+1}$, o sea, $S_0, S_1, \dots, S_{m-1}$ es normal, y que $R_0, R_1, \dots, R_m$ está determinada como dice el párrafo anterior con R_0 mínimo. Entonces todo R ɔ

$\mathfrak{R}_p$ tiene (por (H_2)) un residuo único S en $\mathfrak{R}_{p+1}$; por la propiedad (c) aplicada a $\mathfrak{R}_{p+1}$ tenemos S **e** S_{i-1} para algún i, y, por tanto, R **e** R_i por (H_5). Esto verifica la propiedad (c) para $\mathfrak{R}_p$. Y puesto que, para $i > 0$, R_i tiene como residuo S_{i-1}, no puede darse (por (H_3)) R_i **e** R_0; por lo que acabamos de ver, S_{i-1} es el único residuo de R_i. Supongamos que para $i > 0$, $j > 0$, $i \neq j$, R_i **f** R_j. Entonces, por (H_4), tenemos S_{i-1} **f** S_{j-1}; y como S_{i-1} **e** S_{j-1} sería contradictorio de la propiedad (d) para $\mathfrak{R}_{p+1}$, tenemos, en definitiva, S_{i-1} **a** S_{j-1}. De esto podemos inferir, por una parte, que $i < j$, por la minimalidad de $S_0, S_1, \ldots, S_{m-1}$, y, por otro lado, por (H_6), que R_i, **a** R_j, y, por tanto, $\neg (R_i \text{ e } R_j)$. Esto verifica las propiedades (d) y (e) para $\mathfrak{R}_p$.

Para demostrar el lema bastará con mostrar lo siguiente: sea $\mathfrak{D}$ mínima más allá de X_{p+1}; entonces hay una $\mathfrak{D}'$ equivalente que es la misma que $\mathfrak{D}$ hasta X_p y mínima a partir de X_p. Toda $\mathfrak{D}$ es, en efecto, mínima más allá de X_{n-1}; y el lema se seguirá entonces por inducción sobre n—p. Tomamos, por tanto, $S_0, S_1, \ldots, S_{m-1}$ como secuencia representativa normal de $\mathfrak{R}_{p+1}$, y $R_0, R_1, \ldots, R_m$ como secuencia representativa de $\mathfrak{R}_p$ y procedemos a demostrar lo dicho.

Si R_0 es mínimo en $\mathfrak{R}_p$, entonces $\mathfrak{D}$ misma es la $\mathfrak{D}'$ buscada. Si no, sea R_k mínimo entre todos los R_i tales que R_i **a** R_0. Tenemos entonces

$$R_k \text{ a } R_0, \tag{5}$$

$$R_i \text{ a } R_0 \rightarrow \neg (R_i \text{ a } R_k). \tag{6}$$

Y como, por (H_1) y (5)

$$R_i \text{ a } R_k \rightarrow R_i \text{ a } R_0,$$

se sigue que puede prescindirse de la premisa (6), y para todos los i tenemos

$$\neg (R_i \text{ a } R_k) \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{7}$$

Si (5) y (7) no valen para $k = 1$, elegimos un $k > 1$ para el que valgan; en este caso ponemos $q = 0$. En otro caso, sea q tal que

$$R_1 \text{ e } R_2 \text{ e } \ldots \text{ e } R_q,$$

mientras que $\neg (R_1 \text{ e } R_{q+1})$; y elegimos, si es posible, un $k > q$ tal que R_1 **e** R_k. En cualquier caso (5) y (7) valdrán para el k elegido.

Supongamos que determinados k y q como en el párrafo anterior. Por (H_7) tenemos

$$R_k \mathbf{a} R_0 \ \& \ S_{i-1} \mathbf{a} S_{k-1} \rightarrow R_i \mathbf{a} R_k.$$

De (5) y (7) inferimos

$$\neg (S_{i-1} \mathbf{a} S_{k-1}). \qquad i = 1, 2, ..., m. \tag{8}$$

Por tanto, S_{k-1} es mínimo en $\mathfrak{R}_{p+1}$, y la secuencia S_{k-1}, S_0, S_1, ..., S_{k-2} es mínima. Y como la secuencia S_0, S_1, .. , S_{k-1} es también mínima (por la propiedad (e)), las reducciones secuenciales respecto de esas dos secuencias son equivalentes por el lema 2. Si subrogamos a la segunda de esas reducciones secuenciales la primera, trasformamos a $\mathfrak{D}$ en una $\mathfrak{D}''$ equivalente que tiene las mismas propiedades que $\mathfrak{D}$ con q mayor en una unidad. Después de un número finito de repeticiones llegamos a un estadio en el cual no puede incrementarse más a q; por tanto, para todo $k > q$,

$$\neg (R_k \mathbf{e} R_1). \tag{9}$$

Después de esta transformación S_0, ..., S_{q-1} será todos los residuos de $R_1|R_0$; y, por tanto, la reducción secuencial de S_0, S_1, ..., S_{q-1} será una reducción completa respecto de dichos residuos. Por (D), la contracción de R_0 seguida por esa reducción secuencial es equivalente a una contracción de R_1 seguida por contracción del residuo único de $R_0|R_1$.

Este proceso nos da una reducción $\mathfrak{D}''$ que es equivalente a $\mathfrak{D}$ y mínima más allá de su paso (p + 2)-ésimo, es la misma que $\mathfrak{D}$ antes de X_p y es mínima en la contracción del paso p-ésimo. Podemos volver a aplicar el mismo proceso a la contracción del paso $(p+1)$-ésimo, y así sucesivamente. En cada iteración retrasamos la anormalidad un paso más sin cambiar nada de lo que le precede y sin aumentar la longitud de la reducción. Así tenemos que alcanzar el $\mathfrak{D}'$ buscado. Queda, por tanto, demostrado el lema 4.

Para completar la demostración del teorema 2 para el caso de que no haya ninguna cancelación basta con mostrar que, cuando alcanzamos $p = 0$, si el extenso mínimo dado es R_k en vez de R_0, podemos cambiar como si empezara por R_k. Y esto es una consecuencia inmediata del lema 2.

5. Tratamiento de las cancelaciones

Para completar la demostración del teorema 2 en el caso de que se produzcan cancelaciones basta con demostrar el siguiente:

Lema 4. *Bajo las hipótesis del teorema* 2, *si* $\mathfrak{D}$ *es una reducción completa respecto de* $\mathfrak{R}$, *entonces existe una reducción* - $\mathfrak{R}$ *completa equivalente*, $\mathfrak{D}'$, *que no contiene cancelaciones.*

Demostración. Supongamos que en un determinado paso de $\mathfrak{D}$ hay una contracción de un extenso R_0, y que R_1, ..., R_m son todos los residuos de $\mathfrak{R}$ que quedan cancelados por esa contracción. Podemos suponer que forman una secuencia mínima, porque si no la forman es fácil conseguirlo mediante una permutación adecuada.

Por el lema 1, como la contracción de R_0 no deja residuos de R_1, ..., R_m, esa sola contracción es equivalente a la reducción secuencial completa de la secuencia mínima R_1, ..., R_m, R_0. Esta última reducción no tiene cancelaciones. Pues si S **a** R_i, tenemos por (H_1) S **a** R_0, y, por (H_4) si hubiera residuo de $S|R_0$, lo habría también de $R_i|R_0$; por tanto, todo S tal está ya entre los R_i. Por otro lado, si $\neg(S\ \mathbf{f}\ R_i)$ vale para todos los i, entonces, por § 3, habrá un residuo único de S en la reducción secuencial de R_1, ..., R_m; si este residuo quedara cancelado por el residuo de R_0, entonces S quedaría cancelado por R_0, lo que quiere decir que sería uno de los R_i.

Así hemos subrogado a la contracción de R_0 una reducción equivalente que no contiene cancelaciones. Y, evidentemente, podemos hacer lo mismo por toda $\mathfrak{D}$.

Church y Rosser [10] han propuesto otro método de tratar cancelaciones para la conversión $\lambda\beta$. Este método consiste en introducir una nueva constante primitiva, a, subrogando λxM, cuando M no contiene x, por $\lambda x.axM$. Si en una conversión del sistema así modificado omitimos a y su primer argumento cada vez que se presentan, tenemos una reducción en el sistema λK.

6. Observaciones finales

Los artículos anteriores completan la demostración del teorema 2, y, por tanto, del teorema A1, para el caso en el cual no se aceptan contracciones η.

---

[10] En una nota a máquina añadida a una reimpresión de su [PCn] enviada a Curry.

Para algunos fines es deseable saber que existe un límite superior para la longitud de una reducción relativa. No vamos a intentar resolver esta cuestión de un modo abstracto y sobre la base de los supuestos del teorema 2. Church y Rosser la han resuelto ya para el caso de la conversión β. Su solución supone una inducción estructural sobre X. Sea el límite superior, si existe, $\varphi(X)$. Tenemos entonces

I. Si X es una variable, $\varphi(X) = 0$.
II. Si $X \equiv \lambda x Y$, $\varphi(X) = \varphi(Y)$.
III. Si $X \equiv YZ$, $\varphi(Y) = m$, $\varphi(Z) = n$, hay dos subcasos:

A. X no es ninguno de los extensos de $\mathfrak{R}$. Entonces los extensos de Y y Z no se solapan. Por tanto, $\varphi(X) = m + n$.

B. Si X es un extenso de $\mathfrak{R}$, entonces $Y \equiv \lambda x M$. Si no hay cancelaciones, está claro que conseguiremos el mayor número de pasos al formar primero una reducción completa de M, contraer luego el residuo de X y, por último, los residuos de extensos de Z[11]. Si p es el número de instancias de x después de la reducción completa de M, entonces $\varphi(X) = m + np + 1$.

Si se producen cancelaciones hay que modificar ese resultado, para incluir en la cuenta que lleva a p todas las instancias de x canceladas.

Si se presentan contracciones δ tenemos que incluir la posibilidad de que X sea un extenso δ en I, y la de que YZ sea un extenso δ en III.

D. EXTENSION PARA INCLUIR LA CONVERSION η

En esta sección generalizamos la demostración del teorema A1 al cálculo λ pleno. Primero (§ 1) demostramos el teorema para todos los casos en los que la única regla de conversión admitida es (η), y mostramos que para esta «conversión η pura» existe siempre una forma normal. Luego mostramos que cualquier reducción del cálculo βη puede ser remplazada por otra en cualquiera de dos formas normalizadas: en la primera de esas formas (§ 2) las contracciones η se hacen las últimas; en la segunda (§ 3) se hacen lo antes posible. De esos dos resultados dedu-

---

[11] Si llamamos a las contracciones de residuos de X, de un extenso de Y o de un extenso de Z contracciones principal, básica y de argumento, respectivamente, entonces el intercambio entre una contracción principal y una contracción básica no puede cambiar el número total de contracciones, mientras que el desplazamiento de una contracción de argumento puede aumentar el número de contracciones, aunque nunca puede disminuirlo.

cimos en el § 4 (χ) para el cálculo βη, suponiéndola verdadera para el cálculo β. La generalización al cálculo λ pleno se hace en § 5.

1. Conversión η pura

Llamamos *cálculo de conversión η pura* —o simplemente cálculo η (puro)— a un cálculo de conversión η en el que admitimos las reglas (α) y (η), pero no la regla (β) ni ninguna forma de (δ). En toda esta sección el subíndice 'η' (o el prefijo 'η-') significa que la noción afectada por él se toma relativamente al cálculo η puro.

Puesto que una contracción η disminuye el número de casos de los átomos, es claro que la longitud de una reducción η tiene un límite superior. Dado cualquier X, hay, por tanto, al menos un X^*, que no contiene ningún extenso η y tal que $X \geq_\eta X^*$.

Para mostrar que este X^* es único, basta (teorema A2) con demostrar que (χ) vale para el cálculo η. Con este fin es suficiente a su vez (teorema A5) establecer (E). Pero puesto que (H) vale —con la diferencia de que R **a** S es siempre falso para la reducción η—, se sigue por el teorema C2[12] que es suficiente establecer la forma fuerte de (D).

La forma débil de (D) ha sido ya demostrada en § B2 para el cálculo λ pleno; vale, por tanto, *a fortiori* para el cálculo η. Podemos demostrar la forma fuerte de (D) mediante una argumentación análoga a la de § B3. Los únicos subcasos que pueden presentarse bajo los casos 3 y 4 de la definición B2 son los subcasos 3d y 4d; y éstos pueden tratarse como los casos 3b y 4b. La situación es más sencilla que en § B3 porque ahora no hay sustituciones, y hay siempre un residuo único de $R|S$, excepto en el caso 1. Omitimos, por tanto, los detalles.

De este modo establecemos:

Teorema 1. *Dado cualquier ob X, existe un ob X^*, que no contiene ningún extenso* η, *y tal que*

$$X \geq_\eta X^*; \tag{1}$$

además, para todo Y,

$$X =_\eta Y \rightarrow Y \geq_\eta X^*. \tag{2}$$

El X^* así asociado al X se llama la *forma normal-η de X*. Reservamos el asterisco* supraescrito para indicar la forma normal-η en todo el resto de esta sección.

---

[12] Es también fácil demostrar (E) directamente mediante una inducción sobre m.

2. Posposición de contracciones η

Demostraremos aquí un teorema que muestra que toda reducción del cálculo βη puede ponerse en una forma en la cual todas las contracciones η se hacen al final. La formulación exacta es:

Teorema 2. *Si*

$$X \geq_{\beta\eta} Y, \tag{3}$$

entonces hay un Z tal que

$$X \geq_{\beta} Z \geq_{\eta} Y. \tag{4}$$

Demostración. Comencemos por examinar el caso en el cual la reducción (3) consta de una sola contracción β precedida por cualquier número de contracciones η. La reducción (3) tiene entonces la forma

$$X \equiv X_0 >_{1\eta} X_1 >_{1\eta} \cdots >_{1\eta} X_m \geq_{\beta} Y, \tag{5}$$

siendo el último paso la contracción de un extenso β, R, de X_m. Observemos que la dificultad se presenta en el caso de que R sea $(\lambda x M)N$ y la contracción precedente haya dado ese mismo $\lambda x M$ como contracto de un extenso η, $\lambda z.\ (\lambda x M)z$. Entonces el lugar de R en X_{m-1} está ocupado por $(\lambda z.(\lambda x M)z)N$. Dos contracciones β sobre esto tienen el mismo efecto que la contracción η originaria seguida por una contracción β. Esto disminuye a m; pero si se aplicara a una reducción general aumentaría el número de contracciones β. Para conseguir una demostración por inducción tenemos que considerar que esas dos reducciones β constituyen un par de contracciones de forma especial.

Supongamos que, dado $\lambda x M$, definimos M_k por inducción del modo siguiente: sean $y_1, \ldots, y_k$ variables distintas de x y de toda otra, y que no se presenten libres en M. Entonces definimos

$$M_1 \equiv \lambda x M, \qquad M_{k+1} \equiv \lambda y_k.\ M_k y_k.$$

Por inducción sobre k podemos mostrar que después de k contracciones β, $M_k N$ se reduce a $[N/x]M$ (o a un ob convertible-α con éste). Llamamos a un tal $M_k N$ *extenso* β *compuesto de orden* k, y a su subrogación por $[N/x]M$ la llamamos *su contracción completa.*

Supongamos ahora que la reducción de X_m a Y en (5) es la contrac-

ción completa de un extenso β compuesto, R, de orden k. Deseamos mostrar que siempre podremos disminuir m en una unidad a expensas, posiblemente, de un aumento de k. Sea $S \equiv \lambda z.Lz$ el extenso η contraído al reducir X_{m-1} a X_m. Tenemos que considerar varios casos, del modo siguiente:

Caso 1. R y S no se solapan. Entonces R es, dicho de un modo intuitivamente evidente, el residuo, respecto de S, de un R' de X_{m-1} que es un caso de $[R]$. Además, la contracción (completa) de R' tendrá siempre un único residuo S' de S que será un caso de $[S]$. Convengamos en que la contracción completa de R' reduce X_{m-1} a Y'; entonces la contracción de S' reducirá Y' a Y. Así hemos encontrado un Y' tal que

$$X \geq Y' \geq_\eta Y, \tag{6}$$

siendo la primera reducción de (6) una reducción de la forma (5), con m disminuido en una unidad, y k sin alterar.

Caso 2. R es parte de L. Entonces en el caso de $[L]$ que se presenta en S hay un caso R' de $[R]$, y podemos decir también, en este caso, que R es el residuo de $R'|S$. Pongamos que la contracción de R subroga L por L'. Sea Y' el resultado de contraer R' en X_{m-1}. Esta contracción subrogará S por un extenso η único S' cuya contracción reducirá Y' a Y. De nuevo tenemos (6) y con las mismas condiciones que en el caso 1.

Caso 3. R es M_kN y L es parte de M. Sea R' el componente de X_{m-1} que se convierte en R por la contracción de S. Entonces R' es $M_k'\,N'$, siendo N' un caso de $[N]$, y obteniéndose M_k' a partir de M_k por expansión de L a S. Supongamos que la contracción completa de R' reduce X_{m-1} a Y'. Sea S' el residuo único de S en Y'; entonces S' es un caso de $[\lambda w.L'w]$, siendo $L' \equiv [N/x]L$, y sin que w esté libre en L'. La contracción de S' resduce Y' a Y. Volvemos a tener (6) con las mismas condiciones que antes.

Caso 4. R es M_kN y L es parte de N. Sea R' como en el caso 3. Entonces R' es $M_k'N'$, siendo M_k' un caso de $[M_k]$ y obteniéndose N' por expansión de L a S. Sea Y' el resultado de la contracción completa de R'. Habrá entonces en cada caso de $[N]$ un residuo de S sustituido a x; estos residuos serán todos casos de $[S]$. La contracción de todos estos residuos reducirá Y' a Y. Volvemos, pues, a obtener (6); la única diferencia en las condiciones es que ahora la segunda reducción de (6) puede faltar o puede constar de más de un paso.

Caso 5. R es M_kN y L es algún M_j con $j \leq k$. Sea R' como en los

casos 3 y 4. R' es entonces un extenso β compuesto de orden $k+1$, cuya reducción completa reduce X_{m-1} directamente a Y. Volvemos a tener (6) con m disminuido en una unidad, k aumentado en una unidad e $Y' \equiv Y$.

Estos casos agotan todos los posibles. Puesto que R y L son componentes, para que no se presenten los casos 1 ó 2, L tiene que ser parte de$R$; y si L es una parte de R y R es $M_k N$, tiene que darse uno de los casos 3, 4 ó 5.

Por iteración de ese proceso tenemos que conseguir eventualmente una reducción de la forma (6) con $m = 0$. Entonces habremos mostrado la equivalencia de (5) con una reducción de la forma

$$X \geq_\beta Y' \geq_\eta Y.$$

Podemos hacer esto, en particular, en el caso de que (5) sea verdadera para $k = 1$.

Supongamos ahora que tenemos una reducción (3) de la forma

$$X \equiv X_0 \geq X_1 \geq \ldots \geq X_n, \tag{7}$$

cada paso de la cual es una reducción de la forma (5). Podemos aplicar una inducción sobre n. Para $n = 1$ el teorema 2 es verdadero, por lo que hemos visto. Supongamos que el teorema es verdadero para valores inferiores de n. Tenemos entonces, como hemos mostrado, un X_1' tal que

$$X \geq_\beta X_1' \geq_\eta X_1 \geq \ldots X_n. \tag{8}$$

Ahora bien, la reducción

$$X_1' \geq X_2 \geq X_3$$

es una reducción de la forma (5). Por tanto, la reducción (8), a partir de X_1', es de la forma (7), con inferior valor de n. Por la hipótesis inductiva hay un Z tal que

$$X_1' \geq_\beta Z \geq_\eta Y.$$

Por tanto,

$$X \geq_\beta Z \geq_\eta Y, \qquad \text{q. e. d.}$$

El teorema 2 deja de verificarse si se admiten reducciones δ. Pues si R es un extenso δ, puede ocurrir que L sea una parte propia de R; el resultado de la expansión de R mediante la subrogación de L por

S no es entonces un extenso δ. Por ejemplo, si δ_1 es la δ de Church, X es $\delta_1\,(\lambda z.Lz)L$, $Y \equiv \lambda fx.f(fx)$, tenemos la reducción

$$X >_{1\eta} \delta_1 LL >_{1\delta} \lambda fx.f(fx),$$

y esa reducción no puede ponerse en una forma en la cual el extenso η se contraiga en último lugar. Además, los ejmplos

$$\begin{aligned} X \equiv (\delta_1 LL)fx &>_{1\delta} (\lambda fx.f(fx))fx \\ &>_\beta \lambda x.f(fx)x \geq f(fx), \\ X \equiv (\lambda x.\,\delta_1 xx)L &\geq_\beta \delta_1 LL >_{1\delta} \lambda fx.f(fx), \end{aligned}$$

muestran que la contracción de un extenso δ y la de un extenso β no pueden intercambiarse siempre en una dirección cualquiera.

De todos modos, el teorema 2 sigue siendo verdadero aunque se admitan extensos δ para R, siempre que todas las contracciones δ sean contracciones de residuos de extensos δ presentes desde el principio. En este caso, si R es un extenso δ, L no puede ser una parte propia de R, puesto que R es residuo de un extenso R' de X_{m-1}. Si L es R entero, tenemos el caso 2. Las demostraciones de los casos 1 y 2 proceden sin dificultad.

3. Anticipación de contracciones η.

Vamos a estudiar ahora una forma típica de reducciones en la cual practicamos las contracciones η lo antes posible, en vez de lo más tarde posible. Exigimos, de hecho, que no se efectúen contracciones β o δ sin que el punto de partida sea una forma normal-η. Llamamos a tales reducciones reducciones θ.

Teorema 3.—*Si en el cálculo* λ *pleno*

$$X \geq Y, \tag{9}$$

entonces

$$X^* \geq_\theta Y^*. \tag{10}$$

Demostración. Supongamos primero que tenemos una reducción de la forma

$$X \geq_\eta Z >_1 Y, \tag{11}$$

en la cual la reducción de Z a Y se produce por contracción de un extenso R que no es un extenso η. Supongamos, además, que Z contiene un extenso η, S; sea S $\lambda z.Lz$; z es una variable que no se presenta libre en L ni en ningún otro lugar de Z. Sea Z' el resultado de contraer S en Z.

Con referencia a la definición B2 y al teorema B2 son posibles los siguientes casos: 2, 3d, 3e, 4a, 4b, 4c. En los casos 2, 3d, 4a, 4b habrá un residuo único de R en Z'; pongamos que su contracción convierte a Z' en Y'. Por el teorema B2 la contracción de todos los residuos de S en Y lo convertirá en Y'. Tenemos, por tanto,

$$Z >_{1\eta} Z', \quad Y \geq_{\eta} Y', \tag{12}$$

$$X \geq_{\eta} Z' >_{1} Y'. \tag{13}$$

En los casos 3e y 4c la contracción de S tiene el mismo efecto (en el sentido de la equivalencia α) que la de R; tenemos, por tanto,

$$Z' \cong Y. \tag{14}$$

Así, pues, en todos los casos en que vale (11) podemos concluir, o bien (14), o bien (12) y (13). Si vale (14), se sigue de (11) que

$$X \geq_{\eta} Y,$$

y, por tanto, por el teorema 1, que

$$X^* \cong Y^*. \tag{15}$$

Si valen (12) y (13), como (13) es de la forma (11), podemos iterar el proceso. Y puesto que cada iteración disminuye el número de casos de los átomos en Z, tenemos que alcanzar eventualmente una situación en la cual, o bien vale (15), o bien Z' es X^*. En este último caso tenemos

$$X^* >_{1} Y' \geq_{\eta} Y^*;$$

y, por tanto, vale (10).

La reducción más general (9) puede ponerse en la forma

$$X \equiv X_0 \geq X_1 \geq \ldots \geq X_n,$$

en la que cada paso es de la forma (11). Por lo que acabamos de mostrar,

$$X_i^* \geq_{\theta} X_{i+1}^*.$$

Y como la reducción θ es, evidentemente, transitiva, tenemos (10), q. e. d.

4. La propiedad (χ) para el cálculo βη.

Vamos a demostrar ahora la propiedad Church-Rosser para el cálculo βη mediante el establecimiento de la propiedad (B). La argumentación aparece diagramáticamente en la figura 4. Supongamos que

$$U \geq X \;\&\; U \geq Y.$$

Por el teorema 2 existen un X' y un Y' tales que

$$U \geq_\beta X' \geq_\eta X, \qquad U \geq_\beta Y' \geq_\eta Y.$$

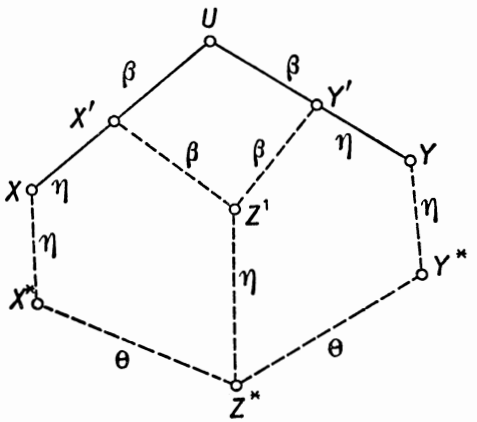


Fig. 4

Por la propiedad (B) para el cálculo β hay un Z' tal que

$$X' \geq_\beta Z', \qquad Y' \geq_\beta Z'.$$

Sea Z^* la forma η-normal de Z'; X^*, Y^*, respectivamente, las formas η-normales de X' e Y' (que, por el teorema 1, son las mismas de X e Y, respectivamente). Entonces, por el teorema 3,

$$X^* \geq_\theta Z^*, \qquad Y^* \geq_\theta Z^*.$$

Por tanto, con $Z \equiv Z^*$,

$$X \geq Z, \qquad Y \geq Z.$$

Teniendo en cuenta el teorema A3, tenemos:

Teorema 4. *La propiedad* (χ) *vale para el cálculo* βη.

5. Generalización al cálculo λ pleno

Hemos visto que el teorema 2 no vale, en general, si la regla (δ) se admite con las demás; pero que vale, en cambio, si todos los extensos δ contraídos son residuos de los que estaban presentes en el punto de partida. En este artículo estudiamos reducciones que satisfacen esa condición. Llamaremos por el momento a esas reducciones *reducciones especiales*; e indicaremos el hecho de que (9) es tal mediante la notación

$$X \geq_\sigma Y. \tag{16}$$

Demostraremos la propiedad (C) para $\geq$ considerada como producida por $\geq_\sigma$ (en el papel de $>_1$); con esto completaremos la demostración del teorema A1.

Puesto que en un X cualquiera no puede haber más que un número finito de extensos δ y éstos son necesariamente sin solapamiento, una reducción respecto de esos extensos tiene necesariamente que ser terminable, con lo que vale la propiedad (E). Denote $X^\dagger$ el término final de una tal reducción respecto de un conjunto determinado de extensos δ en X. Entonces, por una argumentación análoga a la de § 3, con S como extenso δ y R como extenso de cualquier otro tipo (el caso en el cual R es un extenso η queda incluido bajo el teorema 2 generalizado), podemos mostrar que

$$X \geq_\sigma Y \to X^\dagger \geq_{\beta\eta} Y^\dagger, \tag{17}$$

siendo el conjunto prescrito de extensos para $Y^\dagger$ los residuos de los prescritos para $X^\dagger$.

Supongamos ahora que

$$U \geq_\sigma X, \qquad U \geq_\sigma Y. \tag{18}$$

Entonces, por (17),

$$U^\dagger \geq_{\beta\eta} X^\dagger, \qquad U^\dagger \geq_{\beta\eta} Y^\dagger,$$

siendo los extensos prescritos los extensos δ de U. Por el teorema 4 hay un Z tal que

$$X^\dagger \geq_{\beta\eta} Z, \qquad Y^\dagger \geq_{\beta\eta} Z.$$

Por tanto,

$$X \geq_\sigma Z, \qquad Y \geq_\sigma Z.$$

Además, esas reducciones no suponen contracciones de ningún extenso δ que no sea residuo (respecto de (18)) de los ya presentes en U.

Ahora toda reducción (9) puede ponerse en la forma

$$X \equiv X_0 \geq_\sigma X_1 \geq_\sigma \cdots \geq_\sigma X_n \equiv Y.$$

Efectivamente, ponemos un nuevo X_{k+1} en cuanto tengamos una contracción de un extenso δ que no sea residuo de uno en X_k. Podemos, por tanto, considerar $\geq$ como producida por una $\geq_\sigma$ no trivial en el papel de $>_1$. Entendido esto, mostramos que tenemos ya la propiedad (C).

Supongamos para ello que admitimos las premisas de (C), es decir,

$$U \geq_\sigma X, \qquad U \geq Y, \tag{19}$$

con $\geq_\sigma$ no trivial. Sea la reducción de la derecha

$$U \equiv U_0 \geq_\sigma U_1 \geq_\sigma \cdots \geq_\sigma U_n \equiv Y, \tag{20}$$

de nuevo con $\geq_\sigma$ no trivial, como antes. Sea

$$Z_0 \equiv X.$$

Entonces, para $k = 0$, tenemos

$$U_k \geq_\sigma Z_k. \tag{21}$$

Supongamos que hemos encontrado Z_k de modo que vale (21). Por (20) y lo antes visto, hay un Z_{k+1} tal que

$$Z_k \geq_\sigma Z_{k+1}, \qquad U_{k+1} \geq_\sigma Z_{k+1}. \tag{22}$$

Definiendo los Z_k de este modo y sucesivamente, (21) y (22) valen para todo k. Por tanto,

$$X \geq Z_k, \qquad U_k \geq Z_k. \tag{23}$$

Sea ZZ_n. Entonces para el caso $k = n$ en (23), tenemos

$$X \geq Z, \qquad Y \geq Z,$$

lo que prueba que vale (C).

Teniendo en cuenta el teorema A4 esto completa la demostración del teorema A1.

E. EL SEGUNDO TEOREMA DE CHURCH-ROSSER

El teorema que acabamos de demostrar es el teorema 1 de Church y Rosser [PCn]. Estos demostraron dos teoremas más, el segundo de los cuales es una mera variante del primero. Estos dos teoremas se refieren al límite superior del número de contracciones en la reducción de un ob X que tenga forma normal; de la existencia de este límite superior podemos inferir que todo componente de un ob con forma normal tiene él mismo una forma normal. Esta sección se dedica a la consideracióm de dichas cuestiones. Pero el método que utilizamos es completamente diverso del de Church y Rosser. Obtendremos su teorema 2, y algunos otros resultados relacionados con él, como corolarios de un teorema de normalización que demostramos en el § 1. El teorema de normalización promete ser muy útil en otros contextos.

1. El teorema de normalización

Vamos a definir aquí un tipo especial de reducción, llamado reducción típica, que tiene la peculiaridad de que las contracciones se llevan a cabo de izquierda a derecha. Mostraremos que si $A \geq B$, hay una reducción típica de A a B. Llamaremos reducción normal a una reducción típica que no deje ningún extenso sin contraer; nuestro resultado mostrará entonces que si B es una forma normal de A, hay una reducción normal de A a B.

Para precisar esas ideas necesitamos algo de nueva terminología sobre reducciones.

Dada una reducción

$$A_0 >_1 A_1 >_1 \cdots >_1 A_p, \tag{1}$$

decimos (cfr. § A3) que A_k es el k-ésimo *estadio*, y que la contracción que lleva de A_{k-1} a A_k es el *paso* k-ésimo.

Dado un extenso R que sea una instancia de $(\lambda x M)N$ llamamos a la instancia en él de la operación λx la *cabeza* de R. Un extenso β está entonces unívocamente determinado por su cabeza.

Sea R y S dos extensos β del mismo estadio. Decimos que R es ***anterior*** a S precisamente cuando la cabeza de R se encuentra a la iz-

quierda de la cabeza de S [13]. En tal caso la contracción de S deja siempre un solo residuo de R; mientras que si lo que se contrae es R, S tiene un residuo único enteramente situado a la derecha del contracto de R, o bien todos los residuos de S son partes del contracto de R. Está claro que la relación de anterioridad es constructiva; y que, dados dos extensos distintos R y S, o bien R es constructivamente anterior a S o bien S es constructivamente anterior a R.

Sea $\mathfrak{D}$ una reducción (1), y sea R_k el extenso contraído en el paso k-ésimo. Diremos que $\mathfrak{D}$ es una *reducción típica* precisamente cuando R_{k+1} no sea nunca (es decir, para ningún $k = 1, 2, \ldots, n$) residuo de un extenso de A_{k-1} anterior a R_k. Puede entonces ocurrir que R_{k+1} no sea residuo de ningún extenso de A_{k-1}; pero si es residuo de algún R_k' de A_{k-1}, entonces R_k' es posterior a R_k. Además, la cabeza de R_{k+1} se encuentra en, o a la derecha, del contracto de R_k; y, recíprocamente, si esto ocurre para todo k, entonces $\mathfrak{D}$ es típica. Pues si la cabeza de R_{k+1} se encontrara a la izquierda del contracto de R_k, entonces R_{k+1} sería residuo de un extenso, R_k', de A_{k-1} anterior a R_k.

Una *reducción normal* es entonces una reducción típica tal que ningún extenso queda sin contraer. Si una reducción así tiene un final, ese final es una forma normal.

Como tarea preliminar a la demostración del teorema de normalización —el cual dice que toda reducción puede ser tipificada—, demostramos el lema siguiente.

LEMA 1. *Supongamos que A se convierte en B por contracción de un extenso* β, *P. Sea*

$$B \equiv B_0 >_1 B_1 >_1 \cdots >_1 B_n \equiv C \tag{2}$$

una reducción β *típica de B a C. Entonces existe una reducción* β *típica de A a C.*

Demostración. Supongamos que $A_0 \equiv A$, y que hemos determinado A_i para $i \leq p$ y una función numérica, $f(i)$, definida para $i \leq p$, tal que se cumplen las condiciones siguientes:

(a) La reducción (1) es típica.

(b) $f(0) = 0, f(p) = q$, y o bien $f(i+1) = f(i)$, o bien $f(i+1) = f(i)+1$.

(c) Si $j = f(i)$, entonces una reducción completa respecto de todos los residuos de P en A_i convierte a A_i en B_j.

---

[13] Esto se entiende, naturalmente, con los términos de la presentación que venimos utilizando. Pero una especificación independiente de la presentación, aunque algo engorrosa, no presenta dificultad de principio.

Estas condiciones se cumplen para $p = 0$ por hipótesis, con la única condición de que $f(0) = 0$. Tomándolas como verdaderas para un p dado, y suponiendo, además, que $q = f(p) < n$, mostraremos que pueden ser satisfechas para $p + 1$. Convengamos en que Q_i es el extenso contraído en el paso i-ésimo de (1), y sea R_j el extenso contraído en el j-ésimo paso de (2). Con esto quedan determinados $Q_1, \ldots, Q_p$; tenemos que mostrar cómo se determina Q_{p+1}.

La reducción completa relativa especificada en (c) realiza ciertas subrogaciones en A_p para convertirlo en B_q. Si la cabeza de R_{q+1} se encuentra a la izquierda de todas esas subrogaciones, entonces R_{q+1} es el residuo único de A_p que es anterior a todos los residuos de P. En este caso tomamos este extremo para Q_{p+1} y ponemos $f(p+1) = q + 1$. En caso contrario tomamos para Q_{p+1} el residuo anterior de P, y ponemos $f(p + 1) = q$.

Las condiciones (b) y (c) quedan satisfechas para esta elección de Q_{p+1} y $f(p+1)$. Esto está claro para la condición (b). Por otra parte, la contracción de Q_{p+1} seguida de reducción completa respecto de los residuos de P contenidos en A_{p+1} constituye una reducción completa respecto de Q_{p+1} y los residuos de P en A_p. Si Q_{p+1} es un residuo de P, llegamos a B_q por la propiedad (c) para $i = p$; si no, se sigue de la propiedad (E) que si contraemos todos los residuos de P primero, llegamos a B_q y luego a B_{q+1}. Por tanto, también la propiedad (c) vale.

Queda por verificar la propiedad (a). Para hacerlo suponemos que $Q_1, \ldots, Q_p$ han sido elegidos por el mismo método descrito para Q_{p+1}. Si Q_{p+1}, es un residuo de P, entonces es residuo de Q_p' en A_{p-1}, que es también residuo de P. Como Q_p ha sido elegido del mismo modo que Q_{p+1}, Q_p' es posterior a Q_p. Supongamos, pues, que Q_{p+1} es un extenso anterior a todos los residuos de P en A_p, que su residuo es R_{q+1} y que Q_{p+1} es residuo de un Q_p' de A_{p-1}. Si Q_p es un residuo de P, tiene que ser anterior a Q_p'; porque si fuera posterior, todos los residuos de P en A_{p-1} serían posteriores a Q_p', lo cual estaría en contradición con la ley de determinación de Q_p. Si Q_p es anterior a todos los residuos de P en A_{p-1} y tiene a R_q como residuo único, inferimos de la tipicidad de (2) que la cabeza de R_{q+1} se encuentra en, o a la derecha, del contracto de R_q en B_q; la cabeza de Q_{p+1} tiene, por tanto, que estar en, o a la derecha, del contracto de Q_p en A_p. Esto completa la demostración de que (a) vale.

En todo esto hemos supuesto que $q < n$. Por inducción sobre p este proceso continúa hasta que alcanzamos un p tal que $f(p) = n$. Así, una reducción completa y adecuadamente elegida respecto de los

residuos de P nos da la reducción típica buscada, con lo que queda demostrado el lema 1.

Del lema 1 podemos derivar el teorema de normalización del modo siguiente:

TEOREMA 1. *Si* $A \geq_\beta B$, *entonces hay una reducción* β *típica de* A *a* B.

Demostración. Sea (1) la reducción dada, con $A_0 \equiv A, A_p \equiv B$. Sea m el último entero tal que la reducción de A_m a B es típica. Evidentemente, $m < p$. Si $m = 0$, el teorema queda demostrado. Si no, aplicamos el lema, con A_{m-1} para A, A_m para B, y B tomado como C. Esto nos da una nueva reducción (1) con un m menor; podemos también, naturalmente, tener entonces un p mayor, pero la parte que precede a A_{m-1} no queda afectada por ello. Repitiendo este proceso tenemos que alcanzar eventualmente el caso $m = 0$. Esto demuestra el teorema.

COROLARIO 1.1. *Si* B *es una forma normal-*β *de* A, *hay una reducción normal-*β *de* A *a* B.

La demostración es rutinaria.

OBSERVACIÓN 1. Este teorema y el corolario pueden generalizarse a la conversión $\beta\,\eta$, siempre que definamos una reducción $\beta\,\eta$ típica, de acuerdo con § D2, como una reducción β típica seguida por una reducción η que es típica según una definición estrictamente análoga.

2. FORMAS NORMALES EN LA CONVERSIÓN λI

En el caso de la conversión λI —en el cual no hay cancelaciones— la transformación utilizada en la demostración del teorema 1 no puede sino aumentar el número de pasos. En efecto, si consideramos la demostración del lema 1 (§ 1) vemos que el número de residuos de P puede aumentar; pero como ningún residuo puede cancelarse si no es por su propia contracción, el número de pasos no puede disminuir. Por tanto, la reducción normal que existe según el corolario 1 cuando B es una forma normal de A tiene el máximo número posible de pasos para cualquier reducción de A a B. Como una reducción de A a C puede siempre (por el teorema A1) prolongarse de un modo al menos en una reducción de A a B, ninguna reducción que parte de A puede tener mayor número de pasos que la reducción normal de A a B. Esto nos da el segundo teorema de Church y Rosser:

TEOREMA 2. *En la teoría de la conversión* βI, *si* B *es una forma normal de* A, *hay un número natural* m *tal que toda reducción que parta de* A *llevará a* B *después de* m *pasos como máximo.*

COROLARIO 2.1. *En la teoría de la conversión* βI, *si A tiene una forma normal, entonces todo componente de A tiene una forma normal.*

Pues una reducción de un componente es automáticamente una reducción de A.

Este teorema y su corolario pueden generalizarse para la conversión βη como se ha dicho en la observación 1 de § 1, mediante el uso de § D2.

3. EXTENSIONES PARA LA CONVERSIÓN λK

Ni el teorema 2 ni el corolario 2.1 son válidos para la conversión βK; en realidad, si N no tiene forma normal, podemos conseguir, a pesar de ello, reducciones

$$(\lambda uv.v)N >_1 \lambda v.v,$$

$$(\lambda x.xN)\,(\lambda uv.v) >_1 (\lambda uv.v)N \geq \lambda v.v, \tag{6}$$

en las que el resultado tiene una forma normal aunque N no la tenga. (El segundo ejemplo tiene, además, un componente xN que no desaparece completamente.) Esta circunstancia es una de las principales razones por las que Church prefiere el cálculo λI [14].

Church y Rosser han establecido una forma débil del teorema 2 para el cálculo λK. Hablan de contracción de orden uno cuando la base del extenso es el componente inicial de X, de tal modo que X es de la forma $(\lambda xM)N_1N_2 \ldots N_k$. Esto sentado, el tercer teorema de Church y Rosser dice que si X tiene una forma normal, el número de contracciones de orden uno tiene un límite superior. Esto es, evidentemente, derivable del teorema 1.

Bernays sugirió otro procedimiento [15]. Su propuesta es que la regla (β) se restrinja a los casos en los que N está en forma normal. Church llama a esta forma de teoría «teoría λK restringida». Bernays afirmó que tanto el teorema A2b cuanto el teorema 2 [16] siguen entonces siendo válidos, y que la restricción no hace perder ninguna posibilidad de conversión a forma normal del cálculo λI. Pero el ejemplo siguiente muestra que esto no es del todo verdad.

EJEMPLO 1. Sea $S \equiv (\lambda x.u)\,(y(\lambda z.zz))$,

$$R \equiv (\lambda y.S)\,(\lambda z.zz) \equiv (\lambda y.(\lambda x.u)\,(y(\lambda z.zz)))\,(\lambda z.zz).$$

---

[14] Cfr. su [CLC], pág. 59. Cfr. § S3 (final de este capítulo).
[15] In [res. CR]; cfr. Church [CLC], pág. 60.
[16] No está muy claro que Bernays quiera afirmar la validez del teorema A1.

Si contraemos S tenemos la reducción

$$R >_1 (\lambda y.u)\ (\lambda z.zz) >_1 u.$$

Por otro lado, si ponemos que Q sea el contracto de R, tenemos

$$Q \equiv (\lambda x.u)\ ((\lambda z.zz)\ (\lambda z.zz)).$$

Aquí, puesto que el argumento no está en forma normal ni puede reducirse más que a sí mismo, Q no puede reducirse ulteriormente. Así, tenemos $Q = u$, y u está en forma normal, pero Q no puede reducirse a u.

Este ejemplo muestra que el teorema 2, el teorema A2a y, *a fortiori*, el teorema A1, son todos falsos para la conversión λK restringida.

No vamos a estudiar más estas modificaciones de la conversión λK porque nos parecen basadas en un error. Si se acepta la tesis de que sólo obs con forma normal son «significantes», y que un ob no puede serlo sin que lo sean todas sus partes, entonces hay que preferir las teorías λI. Pero si se rechaza esa tesis, se aceptan las teorías λK y no se da importancia al teorema 2. Preferimos la segunda de esas posibilidades.

De todos modos, recogeremos de paso la siguiente forma del corolario 2.1, que es válida para la conversión λK:

COROLARIO 2.2. *Sea B una forma normal de A, y sea dada una reducción $\mathfrak{D}$ de A a B. Sea C un componente de A tal que ninguna parte cancelada en $\mathfrak{D}$ procede de* [17] *un componente de C. Entonces C tiene una forma normal.*

Omitimos la demostración de este corolario, que no es necesario en este volumen.

F. TEOREMAS SOBRE EL ORDEN

Vamos a considerar aquí algunos teoremas de carácter más especializado referentes a la noción de orden. Hablando sin precisión, el orden de un ob X es el número de variables de la combinación $Xx_1x_2 \ldots x_n$ dominadas por X, o sea, el número mínimo de argumentos de X considerado como función. La definición exacta se da en el § 1. El concepto es, sobre todo, importante para el cálculo β; y en

[17] Para precisar este punto tendríamos que generalizar la noción de residuo en una de *huella* de un componente arbitrario; entonces la proposición del corolario dice que ninguna huella de un componente de C se cancela en $\mathfrak{D}$. No consideramos interesantes estos detalles.

toda esta sección supondremos que estamos tratando sólo del cálculo β. En el § 2 se dan algunos teoremas preliminares; el teorema principal se encuentra en § 3. Los teoremas muestran que el orden es invariante respecto de la conversión β, y que una forma débil de la regla (η) es verdadera en la conversión β. Los teoremas más importantes presuponen la propiedad (χ).

1. Definición de orden

Definición 1. El *orden* de un ob X es el último entero m tal que toda reducción β de

$$Xx_1 \dots x_m y_1 \dots y_n$$

se obtiene por aplicaciones de (ν) a una reducción β de

$$Xx_1 \dots x_m.$$

En el caso de que no haya ningún entero m para el que se cumplan esas condiciones decimos que el orden es infinito [18].

El hecho de que X sea de orden m implica que si

$$Xx_1 \dots x_m y_1 \dots y_n \geq \mathfrak{Y} \tag{1}$$

hay un $\mathfrak{X}$ tal que

$$\mathfrak{Y} \equiv \mathfrak{X} y_1 \dots y_n \tag{2}$$

y

$$Xx_1 \dots x_m \geq \mathfrak{X}. \tag{3}$$

2. Teoremas preliminares

Teorema 1. *Condición necesaria y suficiente de que X sea de orden m es que m sea el último entero tal que $Xx_1 \dots x_m$ sea de orden 0.*

Esto está claro por la definición.

Teorema 2. *Condición necesaria y suficiente de que X sea de orden 0 es que no sea β-reducible a ningún ob de la forma $\lambda x\mathfrak{Y}$.*

---

[18] Para ejemplo de ob de orden infinito cfr. § 5G.

Demostración. Demostramos la suficiencia por inducción sobre el número de pasos en una reducción de $Xy_1 \dots y_n$. Supongamos que después de p pasos

$$Xy_1 \dots y_n \geq X'y_1 \dots y_n, \tag{4}$$

con $X \geq X'$. Como X' no es de la forma $\lambda x\mathfrak{Y}$, todo extenso β formado en $X'y_1 \dots y_n$ tiene que encontrarse todo él dentro de X'; análogamente, todo componente de la forma $\lambda x\mathfrak{Z}$ tiene que encontrarse dentro de (es decir, tiene que ser un componente de) X'. Se sigue de esto que el paso $(p+1)$-ésimo, si lo hay, de la reducción tiene que tener lugar dentro de X', y la condición según la cual una reducción de $Xy_1 \dots y_n$ se obtiene por la regla (ν) a partir de una reducción de X vale también para una reducción de $p+1$ pasos. Esto completa la inducción y la demostración de suficiencia.

Para demostrar la necesidad empezaremos por observar que si X es de orden 0 y $X \geq_\beta Y$, entonces Y es de orden 0. Pues si $Yx \geq \mathfrak{Z}$, entonces $Xx \geq \mathfrak{Z}$, y, por tanto, existe un Z sin ninguna x libre y tal que la reducción.

$$Xx \geq Yx \geq \mathfrak{Z} \equiv Zx$$

se obtiene a partir de la reducción.

$$X \geq Y \geq Z$$

por medio de la regla (ν). Y entonces Y es de orden 0 por definición.

Se sigue de esto que basta con demostrar que $\lambda x\mathfrak{Y}$ no puede ser de orden 0. Si lo fuera, en efecto, la contracción

$$(\lambda x\mathfrak{Y})y >_1 [y/x]\,\mathfrak{Y}$$

tendría que ser idéntica a una obtenida mediante (ν) a partir de una contracción de algún extenso interior a $\mathfrak{Y}$. Pero entonces $[y/x]\mathfrak{Y}$ tendría que ser de la forma My, con y no libre en M, y, por tanto, $X(\equiv \lambda x.\mathfrak{Y})$ tendría que ser de la forma $\lambda x.Mx$, con x no libre en M.

Basta, por tanto, mostrar que no podemos encontrarnos con una reducción de la forma

$$X \equiv \lambda x.Mx \geq_\beta M \tag{5}$$

Todo ob obtenido por reducción β a partir de $\lambda x\mathfrak{Y}$ tiene que ser de

la forma $\lambda x\mathfrak{Y}'$ con $\mathfrak{Y} \geq \mathfrak{Y}'$. Pues ningún ob de la forma $\lambda x\mathfrak{Y}$ puede constituir un extenso β; por tanto, todos los extensos β contraídos tienen que estar en el interior de $\mathfrak{Y}$. Por tanto, M tiene que ser de la forma $\lambda x.\ \mathfrak{Y}'$. Pero puesto que M es de orden 0, podemos aplicar la argumentación anterior para mostrar que $\mathfrak{Y}'$ es de la forma $M'x$.

De este modo podemos continuar indefinidamente. Así obtendríamos una secuencia sin fin $M_1\, M_2 \ldots$ de obs tales que

$$X \equiv \lambda x.M_1x, \qquad\qquad M_k \equiv \lambda x.\ M_{k+1}x.$$

Esto es imposible, puesto que cada M_{k+1} tendrá menor número de instancias de los átomos que M_k; por tanto, la secuencia no puede proseguirse indefinidamente. No podemos, por tanto, obtener (5) si X es de orden 0. Esto completa la demostración. Obsérvese que el teorema no vale si se admite la reducción η.

Observación. La condición de que (1) implique (2) y (3) para $m = 0$, $n = 1$, no es suficiente para garantizar que X sea de orden 0. Un contraejemplo puede ser $X \equiv UU$, con $U \equiv \lambda^2 zx.\ zzx$.

3. Orden y conversión β

La importancia del orden se debe en parte a que es invariante respecto de la conversión β. La demostración de este hecho presupone el teorema de Church-Rosser. (Por lo que hace a la constructividad de la argumentación cfr. la observación al teorema 4.)

Teorema 3. *Si X es de orden m y si*

$$X =_\beta Y, \tag{6}$$

entonces Y es de orden m.

Demostración. Supongamos primero que el teorema es verdadero para $m = 0$. Entonces podemos demostrar el caso general del modo siguiente: Si vale (6), entonces, por (ν),

$$Xx_1 \ldots x_n =_\beta Yx_1 \ldots x_n.$$

El miembro izquierdo es de orden 0 si $n = m$, por el teorema 1, y, por tanto, el miembro derecho es también de orden 0. Si el miembro derecho fuera de orden 0 para $n < m$, lo sería también el izquierdo, lo cual es imposible (teorema 1.) Por tanto, por el teorema 1, Y es de orden m.

Para demostrar el teorema para $m = 0$ basta (teorma 2) con mostrar que no hay ningún Y' de la forma $\lambda y\mathfrak{Y}$ tal que $Y = Y'$. Si existiera un Y' tal, entonces, por (χ), existiría un Z tal que

$$X \geq Z, \qquad Y' \geq Z.$$

Por la misma argumentación del teorema 2, esto implicaría que Z es de la forma $\lambda z\mathfrak{Z}$, lo cual es imposible por el teorema 2.

TEOREMA 4. *Si $x_1, \ldots, x_n$ no se presentan libres en X, entonces es condición necesaria y suficiente de que X sea de orden $\geq m$ el que exista un $\mathfrak{X}$ tal que*

$$X \geq \lambda x_1 \ldots x_m \mathfrak{X}. \tag{7}$$

Demostración. Si vale (7), entonces para todo $n < m$

$$Xx_1 \ldots x_n \geq \lambda x_{n+1} \ldots x_m . \mathfrak{X}. \tag{8}$$

Como la parte derecha no es de orden 0 (teorema 2), X no es de orden n. Por tanto, es de orden $\geq m$. Esto prueba la suficiencia.

Para demostrar la necesidad aplicaremos una inducción sobre m. Para $m = 1$ el teorema es una consecuencia del teorema 2. La única manera de mostrar constructivamente que X tiene un orden positivo es presentar una reducción de $Xy_1 \ldots y_n$ que no pueda derivarse mediante el uso de (ν) a partir de una reducción de X. Teniendo en cuenta la demostración de suficiencia del teorema 2, una tal reducción tiene que producir un X' de la forma $\lambda x\mathfrak{Y}$, tal que $X \geq X'$. Esta x, naturalmente, no se presenta libre en X, pero no hay que hacer ninguna restricción más sobre ella.

Supongamos ahora que X es de orden $m \geq 1$. Entonces es, *a fortiori*, de orden $\geq m$—1, y, por tanto, por la hipótesis inductiva, hay un $\mathfrak{X}'$ tal que

$$X \geq \lambda x_1 \ldots x_{m-1} \mathfrak{X}'.$$

Entonces

$$Xx_1 \ldots x_{m-1} \geq \mathfrak{X}'.$$

De aquí se sigue por el teorema 3 que $\mathfrak{X}'$ es de orden ≥ 1. Por el caso $m = 1$ hay un $\mathfrak{X}$ tal que

$$\mathfrak{X}' \geq \lambda x_m \mathfrak{X}$$

(x_m no se presenta libre en $\mathfrak{X}'$). Por tanto, por (ξ) y la definición de abstracción múltiple dada en § 3B,

$$X \geq \lambda x_1 \ldots x_{m-1} (\lambda x_m \mathfrak{X}) \equiv \lambda x_1 \ldots x_m . \mathfrak{X}.$$

COROLARIO 4.1. *Si X es precisamente de orden m, el $\mathfrak{X}$ de* (7) *es de orden* 0.

Demostración. Esto se sigue del teorema 3, puesto que (7) vale y la parte izquierda de (8), con $n = m$, es de orden 0.

OBSERVACIÓN. En lo que antecede no se presupone que sea decidible la cuestión de si X es o no es de orden m. Los teoremas son constructivos en el sentido de que si las premisas son constructivamente verdaderas, entonces la conclusión lo es también. La necesidad del teorema 2 tiene, pues, esencialmente, este significado constructivo: si se sabe que X es de orden 0, entonces se sabe que ninguna reducción de X puede contener pasos de la forma $\lambda x.\mathfrak{Y}$; dicho de otro modo: si en la reducción aparecen pasos así, entonces X es de orden > 1 (finito o infinito) [18a].

TEOREMA 5. *Si X tiene una forma normal, entonces x es de orden finito.*

Demostración. En virtud del teorema 3, basta con demostrar el teorema para un X que esté, efectivamente, en forma normal. Si un tal X no es de la forma $\lambda x\mathfrak{Y}$, entonces es de orden 0, por el teorema 2. Si no es éste el caso, sea m el número máximo tal que X es de la forma del lado derecho de (7). Entonces $\mathfrak{X}$ está en forma normal, y no es de la forma $\lambda x\mathfrak{Y}$; consiguientemente, es de orden 0. Entonces X es de orden m por el teorema 4.

TEOREMA 6. *Si X es de orden $\geq m$ y $x_1, \ldots, x_m$ no se presentan libres en X, entonces*

$$\lambda x_1 \ldots x_m . X x_1 \ldots x_m = X. \tag{9}$$

Demostración. Por el teorema 4, si X es de orden $\geq m$, hay un $\mathfrak{X}$ tal que

$$X = \lambda x_1 \ldots x_m . \mathfrak{X};$$

de aquí

$$X x_1 \ldots x_m = \mathfrak{X}.$$

Por tanto, por (ξ), tenemos (9).

[18a] (Añadida en galeradas.) Esto necesita alguna aclaración. Dada cualquier reducción (1) para $m = 0$, entonces, constructivamente, o bien esa reducción tiene lugar enteramente dentro de X, o bien el último estadio en el que tiene lugar así da una reducción (4) con un X' de la forma $\lambda x\mathfrak{Y}$. (Esta es la argumentación del teorema 4.) Por tanto, en el teorema 3, si (6) vale y X es de orden 0, considérese cualquier reducción $Yy, \ldots y_n \geq \mathfrak{Y}$; esta reducción tiene que tener lugar dentro de Y, porque la otra posibilidad constructiva no es posible.

Este teorema muestra que una forma débil de (η) es verdadera para la conversión β, a saber, la forma en la cual X no puede ser más que de orden ≥ 1. Se sigue del teorema que también es válida una forma debilitada de (ζ). Estas formas debilitadas son:

(η′) *Si x no está libre en X y X es de orden ≥ 1, entonces $\lambda x.Xx = X$.*

(ζ′) *Si x no está libre en X o en Y, y X e Y son de orden positivo, entonces*

$$Xx = Yx \rightarrow X = Y.$$

La derivación de (ζ′) cuando X e Y son de orden positivo es como en § 3D4. Si son de orden 0 podemos argüir del modo siguiente: sea

$$Xx = Yx.$$

Entonces, por (χ), hay un 3 tal que

$$Xx \geq 3, \quad Yx \geq 3.$$

Como X e Y son ambos de orden 0, hay un Z tal que $3 \equiv Zx$ y

$$X \geq Z, \qquad Y \geq Z.$$

De aquí

$$X = Y.$$

Así, el único caso de (ζ) que no es válido es aquel en el cual X o Y, pero no ambos, son de orden 0.

S. TEMAS SUPLEMENTARIOS

1. Precisiones históricas

Antes de formularse el teorema de Church-Rosser la consistencia del cálculo λ, en el sentido del § A1 (final) había sido ya demostrada por otros medios. La consistencia de la teoría de combinadores se demostró en [GKL, § IIA] y en Rosser [MLV]; y en [AVS], escrito (pero no publicado) antes de la aparición del primer trabajo de Church [SPF. I], se introdujeron variables ligadas de un carácter análogo a la abstracción funcional, tomando como base aquellos resultados. Rosser [MLV] estableció formalmente la equivalencia de los dos planteamientos [19].

Church y Rosser [PCn][20] contenía las demostraciones de los dos teoremas, es decir, de los teoremas A1 y E2 de este capítulo, más la formulación de un tercero que es,

---

[19] En Bernays [res. CR] se encontrará una exposición de esta historia.

[20] Reproducidas esencialmente en Church [CLC], § 7.

simplemente, la forma del teorema E2 mencionada en § E3 y que se aplica al cálculo λK; las afirmaciones del teorema A2 se establecían como corolarios. La demostración del teorema A1 comprendía dos lemas. El lema 1 era la propiedad (E); el lema 2 era una combinación del teorema A5 con una propiedad usada para la demostración del segundo teorema. Este último se establecía sin usar nuestro teorema E1. La demostración del lema 1 se hacía por inducción estructural, tal como queda esbozado en § C6. No había formulación explícita de la propiedad (D), ni en la forma fuerte ni en la forma débil. Por lo que se refiere a la forma débil, Church y Rosser verificaban cada caso particular a medida que se presentaba; pero la forma fuerte se ignoraba completamente. Visto lo ocurrido más tarde, opinamos que esa omisión es una laguna de su demostración.

En 1941 Curry se dispuso a generalizar la teoría de Church y Rosser al caso en el cual hay extensos η —caso que había sido incluido en la anterior demostración de consistencia—. En [CCT] pretendió tener la demostración. La demostración no se publicó, porque pareció tan parecida a la de Church-Rosser que no valía la pena publicarla. Pero en la preparación de este capítulo hemos descubierto un error en la correspondiente demostración de Curry; por tanto, queda refutada la pretensión hecha en 1941. La demostración, de todos modos, es válida para las conversiones δ generalizadas que se admiten aquí; la situación tiene algunas analogías con las teorías de las funciones recursivas (cfr. § B4), pero, que sepamos, esas analogías no han sido aún explotadas.

En 1942 apareció [TCD], de Newman. Newman explicitaba las analogías existentes entre el teorema de Church-Rosser y otras teorías originadas en la topología, e intentaba un tratamiento mediante postulados que se aplicaran a la conversión λ tomada como caso especial. Sus postulados incluían una formulación explícita de las versiones débil y fuerte de (D), y llamaban así la atención, por vez primera, sobre la necesidad de demostrar también la fuerte. Por eso expresaba cierto escepticismo respecto de la corrección de la demostración de Church-Rosser, escepticismo que resulta justificado en vista de la laguna ya mencionada. Desgraciadamente, David Schroer, un discípulo de Rosser, indicó en la primavera de 1955 que había hallado un error en la verificación por Newman de sus postulados para la conversión λ, de tal modo que el teorema de Church-Rosser no podía situarse entre los teoremas de Newman. Newman demostró varios teoremas más o menos análogos al teorema de Church-Rosser, y arrojó una luz considerable sobre toda la situación. La mayor parte del planteamiento abstracto de este capítulo se debe a él.

En 1951 Curry creyó poder simplificar el planteamiento de Newman. En [NPC] publicó una demostración de un teorema de la misma naturaleza general que el de Newman. Al reseñar ese trabajo, Newman elaboró un contraejemplo que mostraba que los supuestos hechos no se verificaban para la conversión λ. Consecuentemente, el título de ese trabajo es del todo inapropiado. Aunque el teorema formulado es correcto, que sepamos, no sabemos si tiene alguna aplicación relevante.

En la primavera de 1955 David Schroer nos dijo que en su tesis doctoral tenía una demostración del teorema de Church-Rosser. No la hemos visto, y la información escrita por el autor es insuficiente para apreciar si tiene alguna analogía con la que damos aquí. La nuestra no estuvo completa hasta diciembre de 1955.

Pueden verse comentarios críticos acerca del teorema en Bernays [res. CR] y en Ladrière [TFG].

Teoría intuitiva de combinadores

Como transición a la teoría sintética de combinadores del capítulo **6** estudiamos aquí algunos combinadores desde un punto de vista intuitivo. Estos combinadores serán los que expresan ciertas combinaciones corrientes de variables como funciones de dichas variables; las combinaciones serán, frecuentemente, tales que resulten de especial relevancia cuando una o más de las variables sean funciones ellas mismas, desde el punto de vista de la interpretación, como es obvio.

A cada uno de los combinadores simples asociaremos una regla de reducción designada por el símbolo del combinador puesto entre paréntesis. Esta regla sienta que cuando el combinador en cuestión se aplica sucesivamente a una serie (finita) de variables la combinación resultante se reduce a una determinada combinación de dichas variables. Esta reducción se seguirá de la definición del combinador en el cálculo λ por medio de la regla (β) (junto con (τ), (μ), (ν)). Pero a medida que avancemos dependeremos cada vez menos del cálculo λ; y las relaciones $\geq$, $=$ serán la relación monótona ordenadora parcial y la equivalencia producidas por dichas reglas.

Usaremos cursivas minúsculas para indicar variables sin especificar. Las letras '*f*', '*g*', '*h*' se usaran, frecuentemente, cuando, en la aplicación corriente, la variable se conciba como función; y las letras '*a*', '*b*', '*c*' cuando se conciba como constante. Pero esto no tiene relevancia formal, pues todas las variables son indeterminadas [1] y son formalmente análogas.

Parte de la finalidad de este capítulo consiste en establecer las convenciones y derivar las propiedades relativas a varios tipos especiales de combinadores que necesitaremos más tarde. En el capítulo **6** se mostrará que los postulados que usamos un tanto informalmente valen para las teorías axiomáticas, de tal modo que las propiedades derivadas aquí pueden obtenerse en las teorías posteriores.

---

[1] Excepto por lo que hace a cierto uso incidental de variables ligadas en § A.

La sección § H de este capítulo es una investigación sobre la definibilidad de combinadores, debida a Craig.

A. DISCUSION PRELIMINAR

1. Los combinadores B, C, I, W

Vamos a empezar definiendo algunos combinadores simples que expresan combinaciones como funciones de variables que, efectivamente, se presentan en ellos, y son, por tanto, obs del cálculo λI.

I. El más simple de estos combinadores es el que expresa una variable como función de sí misma. El combinador se llama I y tiene la definición

$$\mathsf{I} \equiv \lambda x.x. \tag{1}$$

Tiene la regla de reducción

$$\mathsf{I}\,x \geq x. \tag{I}$$

Este combinador se llama también *identificador elemental.*

C. Dada una función f de dos argumentos, $\mathsf{C}f$ es su recíproca, de modo que

$$\mathsf{C}fxy \geq fyx. \tag{C}$$

Esto será verdad si

$$\mathsf{C} \equiv \lambda fxy.fyx. \tag{2}$$

Este combinador se llama también *permutador elemental.*

W. Dada una función f de dos argumentos, $\mathsf{W}f$ es la función de un argumento que resulta de identificar los dos argumentos. Tenemos, pues, la regla

$$\mathsf{W}fx \geq fxx. \tag{W}$$

Por ejemplo, si M es la multiplicación, de modo que Mxy sea el producto de x por y, $\mathsf{W}Mx$ es Mxx, o sea, el cuadrado de x. La definición es

$$\mathsf{W} \equiv \lambda fx.fxx. \tag{3}$$

Este combinador se llama también *duplicador elemental.*

B. Sea f una función de un argumento, y sea $\mathfrak{G}$ una combinación que contiene x. Sea $gx \geq \mathfrak{G}$.

Para expresar $f\mathfrak{G}$ como función de x necesitamos un combinador B tal que

$$\mathsf{B}fgx \geq f(gx). \tag{B}$$

Esto es verdadero si

$$\mathsf{B} \equiv \lambda fgx.f(gx) \equiv \lambda fxy.f(xy). \tag{4}$$

B se llama también *componedor elemental.* Representa la composición de dos funciones f y g. Así, si f es la función logarítmica y g es la función seno, Bfg es el seno logarítmico. Si D representa la función diferenciación, BDD (o WBD) es la operación de diferenciar dos veces. Por otra parte, B tiene significación también como operación de un solo argumento, en cuyo caso convierte la función f en la correspondiente operación sobre funciones. Así, si f es el logaritmo, Bf es la operación de obtener el logaritmo de una función; si N es la negación lógica BN es la negación de un predicado. Este proceso puede iterarse. Y como

$$\mathsf{B}(\mathsf{B}f)gxy \geq \mathsf{B}f(gx)y \geq f(gxy),$$

es evidente que, si f es el logaritmo, B(Bf) es la operación de obtener el logaritmo de una función de dos argumentos, B(BN) la negación de una relación, y así sucesivamente.

2. El combinador K

Para expresar una constante c como función de x necesitamos un combinador K con la regla de reducción

$$\mathsf{K}cx \geq c. \tag{K}$$

Esto tiene como definición

$$\mathsf{K} \equiv \lambda fx.f \equiv \lambda xy.x. \tag{5}$$

K se llama *cancelador elemental.* Es el combinador característico del cálculo λK.

3. Los combinadores S, Φ, Ψ.

Son éstos combinadores del cálculo λI, pero un poco más complejos que los considerados en § 1.

S. Supongamos que $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ son dos obs que dependen de x. Supongamos que $fx \geq \mathfrak{F}$, $gx \geq \mathfrak{G}$. Podemos desear expresar $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ como función de x. Si llamamos Sfg a la función resultante necesitamos la regla de reducción

$$(S) \qquad Sfgx \geq fx(gx).$$

La representación será posible si definimos

$$(6) \qquad S \equiv \lambda fgx.fx(gx) \equiv \lambda xyz.xz(yz).$$

Φ. Sea f una función de dos argumentos, y supongamos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son obs que dependen de x. Supongamos que $ax \geq \mathfrak{A}$, $bx \geq \mathfrak{B}$. Puede ser necesario representar $f\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ como función de x. Sea Φfab la función resultante. Necesitamos la regla de reducción.

$$(\Phi) \qquad \Phi fabx \geq f(ax)(bx).$$

Basta, para que eso valga, con tener

$$\begin{aligned} \Phi fab &\equiv \lambda x.f(ax)(bx), \\ \Phi &\equiv \lambda fghx.f(gx)(hx) \\ &\equiv \lambda fxyz.f(xz)(yz). \end{aligned}$$

El combinador Φ tiene, hasta cierto punto, la misma significación respecto de funciones de dos argumentos que B respecto de funciones de un argumento. Así, si A representa la adición, ΦAfg representa la suma de dos funciones monádicas, f y g. Análogamente, $\Phi(\Phi A)$ es la operación de sumar funciones binarias. Si P representa la implicación (entre proposiciones), ΦP es la implicación entre predicados monádicos, $\Phi(\Phi P)$ la implicación entre relaciones, etc. Este último ejemplo ha sugerido el nombre de *combinador formalizador*, aplicado a Φ y a algunos otros combinadores análogos.

Ψ. Sea f una función de dos argumentos, y supongamos que tenemos $gx \geq \mathfrak{G}$, $gy \geq \mathfrak{G}'$. Puede ser necesario representar $f\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ como función de x y de y. Sea la función resultante Ψfg. Entonces la regla de reduc-

ción que se necesita es

$$(\Psi) \qquad \Psi fgxy \geq f(gx)\,(gy).$$

la cual impone la definición

$$(8) \qquad \Psi \equiv \lambda fgxy.f(gx)\,(gy) \equiv \lambda fxyz.f(xy)\,(xz).$$

4. Ejemplos

Como ejemplos del uso de estos combinadores podemos expresar las funciones de los ejemplos de § 3A (1) por medio de ellos. Supongamos que tenemos las siguientes constantes: 0, 1, 2, 3, 9, A (adición) y M (multiplicación). Tenemos entonces las siguientes correspondencias entre funciones λ, a la izquierda, y obs combinatorios, a la derecha.

$\lambda x.x + 1$	$\mathsf{C}A1$
$\lambda x.2x$	$M2$
$\lambda x.x^2$	$\mathsf{W}M$
$\lambda x.(x + 1)^2$	$\mathsf{B}(\mathsf{W}M)\,(\mathsf{C}A1)$
$\lambda x.x^2 + 2x$	$\Phi\, A(\mathsf{W}M)\,(M2)$
$\lambda x.1$	$\mathsf{K}1$
$\lambda x.\,((x^2 + 2x) + 1)$	$\Phi A\,(\Phi A\,(\mathsf{W}M)\,(M2))\,(\mathsf{K}1)$

Según esto, las cuatro afirmaciones de § 3A(1) se convierten en

$$(9a) \qquad \mathsf{B}(\mathsf{W}M)(\mathsf{C}A1) = \Phi A\,(\Phi A(\mathsf{W}M)(M2))(\mathsf{K}1),$$

(9b) $\mathsf{W}M$ es una función,

$$(9c) \qquad D(\mathsf{W}M) = M2,$$

$$(9d) \qquad J(0, 3, \mathsf{W}M) = 9.$$

Como se habrá visto, las ecuaciones son menos manejables que las originales. Y, efectivamente, no sostenemos que la eliminación de variables sea un expediente práctico. Su importancia es teorética, pues muestra que las variables son un expediente lógicamente innecesario, aunque muy práctico.

B. INTERDEFINIBILIDAD DE COMBINADORES SIMPLES

Los combinadores discutidos en la sección anterior no son todos independientes. En esta sección mostraremos cómo algunos de ellos pueden

definirse a base de otros, en el sentido de que la regla de reducción del combinador derivado se sigue de su definición junto con las reglas de reducción de los combinadores básicos. Mostraremos que W, S, Φ y Ψ pueden definirse así a base de B, C y W o S; que I puede definirse a base de W y K; y que todos los combinadores de la lista pueden expresarse a base de S y K. Al final de la sección se establecerá sin detalles una reducción análoga de B, C, W e I a dos combinadores llamados J y C_*.

Usamos aquí el infijo '$\leq$' para denotar la relación recíproca de $\geq$.

1. Definiciones a base de B, C, W

Vamos a considerar la expresión de S, Φ y Ψ a base de B, C, y W.

Por lo que hace a S, tenemos por la regla (S)

$$\mathsf{S}fgx \geq fx(gx).$$

Procederemos a una expansión de la parte derecha por medio de (B), (C), (W), usados inversamente, hasta conseguir algo de la forma $\mathsf{S}fgx$.

La presencia de (gx) sugiere el uso de B para eliminar los paréntesis:

$$fx(gx) \leq \mathsf{B}(fx)gx.$$

Con esto hemos introducido otro par de paréntesis, pero podemos eliminarlo mediante una nueva aplicación de B, que nos da

$$\mathsf{B}(fx)gx \leq \mathsf{BB}fxgx.$$

Ahora podemos utilizar C para conseguir que las variables estén en el orden deseado:

$$\mathsf{BB}fxgx \leq \mathsf{C}(\mathsf{BB}f)gxx.$$

Esta vez dejamos para más tarde la remoción de los paréntesis. Con W se puede dar razón del caso doble de x, de modo que tenemos (quitando paréntesis mediante (B)):

$$\begin{aligned}\mathsf{C}(\mathsf{BB}f)gxx &\leq \mathsf{W}(\mathsf{C}(\mathsf{BB}f)g)x\\ &\leq \mathsf{BW}(\mathsf{C}(\mathsf{BB}f))gx\\ &\leq \mathsf{B}(\mathsf{BW})\mathsf{C}(\mathsf{BB}f)gx\\ &\leq \mathsf{B}(\mathsf{B}(\mathsf{BW})\mathsf{C})(\mathsf{BB})fgx.\end{aligned}$$

Siguiendo de abajo arriba esta argumentación comprobamos que la regla de reducción de (S) se seguirá de (B), (C) y (W) si adoptamos la definición

(1) $$\mathsf{S} \equiv \mathsf{B}(\mathsf{B}(\mathsf{BW})\mathsf{C})(\mathsf{BB}).$$

Esto muestra que S puede definirse a base de B, C y W. Pero más sencilla es la definición inversa de W a base de B, C y S. Tenemos, efectivamente,

$$\begin{aligned} fxx &\leq fx(\mathsf{I}x) \\ &\leq \mathsf{S}f\mathsf{I}x \\ &\leq \mathsf{CSI}fx, \end{aligned}$$

de tal modo la siguiente sería una definición aceptable:

(2) $$\mathsf{W} \equiv \mathsf{CSI}.$$

Otra definición posible sería:

(3) $$\mathsf{W} \equiv \mathsf{S}(\mathsf{CI}).$$

Atendamos ahora a Φ. El análisis procede del modo siguiente:

$$\begin{aligned} f(xz)(yz) &\leq \mathsf{B}fxz(yz) \\ &\leq \mathsf{S}(\mathsf{B}fx)yz \\ &\leq \mathsf{BS}(\mathsf{B}f)xyz \\ &\leq \mathsf{B}(\mathsf{BS})\mathsf{B}fxyz. \end{aligned}$$

Esto muestra que la definición

(4) $$\begin{aligned} \Phi &\equiv \mathsf{B}(\mathsf{BS})\mathsf{B} \\ &\equiv \mathsf{B}(\mathsf{B}(\mathsf{B}(\mathsf{B}(\mathsf{BW})\mathsf{C})(\mathsf{BB})))\mathsf{B} \end{aligned}$$

dará la regla (Φ) como consecuencia de las reglas (B) y (S) o de las reglas (B), (C) y (W).

Por lo que hace a Ψ el análisis es más complicado y será conveniente introducir una abreviación. Tenemos, por de pronto,

$$\begin{aligned} f(gx)(gy) &\leq \mathsf{B}(f(gx))gy \\ &\leq \mathsf{BB}f(gx)gy \\ &\leq \mathsf{B}(\mathsf{BB}f)gxgy \\ &\leq \mathsf{BB}(\mathsf{BB})fgxgy. \end{aligned}$$

Sea $X \equiv \mathsf{BB(BB)}$. Entonces

$$\begin{aligned} f(gx)(gy) &\leq Xfgxgy \\ &\leq \mathsf{C}(Xfg)gxy \\ &\leq \mathsf{BC}(Xf)ggxy \\ &\leq \mathsf{W(BC}(Xf))gxy \\ &\leq \mathsf{BW(BC)}(Xf)gxy \\ &\leq \mathsf{B(BW(BC))}Xfgxy. \end{aligned}$$

Por tanto, la siguiente es una aceptable definición de Ψ:

$$\Psi \equiv \mathsf{B(BW(BC))(BB(BB))}. \tag{5}$$

El método usado en estos ejemplos puede generalizarse. Supongamos, en efecto, que se tenga una combinación $\mathfrak{X}$ de variables $x_1, \ldots, x_m$ y que se busca un combinador X tal que

$$Xx_1 x_2 \ldots x_m \geq \mathfrak{X}. \tag{6}$$

Se quitan paréntesis de $\mathfrak{X}$ por medio de (B): luego se disponen las variables en orden por medio de (C); y luego se eliminan las repeticiones por medio de (W). Si hay variables x_i que no aparezcan en $\mathfrak{X}$, se pueden introducir por medio de (K). Mediante este proceso conseguimos la expansión de la parte derecha de (6) hasta obtener su parte izquierda, y el X así formado es aceptable como definición. Es probable que este método dé siempre resultado; pero por el momento no necesitamos una demostración de ese hecho.

2. Definiciones que incluyen K

La definición de I a base de W y K puede obtenerse así:

$$x \leq \mathsf{K}xx \leq \mathsf{WK}x,$$

de modo que tenemos la definición

$$\mathsf{I} \equiv \mathsf{WK}. \tag{7}$$

Vamos a considerar ahora la expansión de obs combinatorios en téiminos de S y K. En estos casos usamos K para introducir variables

necesarias para expresar $\mathfrak{F}\,\mathfrak{G}$ en la forma $fx\,(gx)$, y luego aplicamos S. Vamos a aplicar este método a I, B, W, C, Φ y Ψ.

I. Para definir I tenemos

$$\begin{aligned} x &\leq \mathsf{K}x(gx) \\ &\leq \mathsf{SK}gx. \end{aligned}$$

Por tanto, I puede definirse como $\mathsf{SK}X$, siendo X un combinador cualquiera. Escogemos la definición

$$\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}. \tag{8}$$

Esta elección es arbitraria. Obsérvese que la ecuación

$$\mathsf{I} = \mathsf{SKS}, \tag{9}$$

o, más en general,

$$\mathsf{I} = \mathsf{SK}X, \tag{10}$$

con X como combinador cualquiera y la igualdad tomada como convertibilidad β, se siguen de § A(5) y § A(6); pero no son derivables de (S), (K) y (8) por las meras propiedades de la igualdad.

B. Para definir B empezaremos por observar:

$$\begin{aligned} f(gx) &\leq \mathsf{K}fx\,(gx) \\ &\leq \mathsf{S}(\mathsf{K}f)gx. \end{aligned}$$

Esto sugiere

$$\begin{aligned} \mathsf{B}f &\geq \mathsf{S}(\mathsf{K}f) \\ &\leq \mathsf{KS}f(\mathsf{K}f) \\ &\leq \mathsf{S}(\mathsf{KS})\mathsf{K}f. \end{aligned} \tag{11}$$

Esto nos da la definición

$$\mathsf{B} \equiv \mathsf{S}(\mathsf{KS})\mathsf{K}, \tag{12}$$

de la cual se siguen (11) y (B) por (S), (K), (ρ), (τ), (μ), (ν).

Obsérvese que de (11) se sigue inmediatamente

$$\mathsf{BSK} \geq \mathsf{B}. \tag{13}$$

W. Cualquiera de las definiciones (2) o (3) da definiciones de W a base de C, S e I, pudiendo C definirse como se verá abajo. Pero es fácil dar una definición directa de W a base de S y K:

$$\begin{aligned} fxx &\leq fx(\mathsf{I}x) \\ &\leq \mathsf{S}f\mathsf{I}x \\ &\leq \mathsf{SS}(\mathsf{KI})fx. \end{aligned}$$

Tenemos, pues, como definición aceptable

$$\mathsf{W} \equiv \mathsf{SS}(\mathsf{KI}). \tag{14}$$

C. Para definir C tenemos

$$\begin{aligned} fyx &\leq fy(\mathsf{K}xy) \\ &\leq \mathsf{S}f(\mathsf{K}x)y. \end{aligned}$$

Esto sugiere

$$\begin{aligned} \mathsf{C}fx &\geq \mathsf{S}f(\mathsf{K}x) \\ &\leq \mathsf{B}(\mathsf{S}f)\mathsf{K}x; \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{C}f &\geq \mathsf{B}(\mathsf{S}f)\mathsf{K} \\ &\leq \mathsf{BBS}f\mathsf{K} \\ &\leq \mathsf{BBS}f(\mathsf{KK}f) \\ &\leq \mathsf{S}(\mathsf{BBS})\,(\mathsf{KK})f; \end{aligned} \tag{16}$$

y, por último, como aceptable definición de C,

$$\mathsf{C} \equiv \mathsf{S}(\mathsf{BBS})\,(\mathsf{KK}). \tag{17}$$

Φ. Ya hemos obtenido una definición de Φ a base de B y S en el § 1, a saber, (4).

Ψ. Por lo que hace a Ψ puede obtenerse a base de Φ una definición algo más sencilla que (5):

$$\begin{aligned} f(gx)(gy) &\leq \mathsf{B}(f(gx))gy \\ &\leq \mathsf{B}(\mathsf{B}fgx)(\mathsf{K}gx)y \\ &\leq \Phi\,\mathsf{B}(\mathsf{B}fg)(\mathsf{K}g)xy \\ &\leq \Phi(\Phi\mathsf{B})\,(\mathsf{B}f)\mathsf{K}gxy \\ &\leq \Phi(\Phi\mathsf{B})\,(\mathsf{B}f)\,(\mathsf{KK}f)gxy \\ &\leq \Phi(\Phi(\Phi\,\mathsf{B}))\mathsf{B}(\mathsf{KK})fgxy. \end{aligned}$$

Así llegamos a la definición

(18) $$\Psi \equiv \Phi\,(\Phi(\Phi\,\mathsf{B}))\mathsf{B}(\mathsf{KK}).$$

Se adoptará esta definición en lugar de (5) cuando los combinadores fundamentales sean K y S.

Si eliminamos Φ de (18) por medio de (4) y reducimos mediante las regla (B) y (S) podemos, naturalmente, obtener una definición de Ψ a base directamente de S y B. Pero este proceso es excesivamente dilatado y es, además, poco inteligible, a menos de contar con algunas abreviaciones que introduciremos más tarde. Por eso nos limitaremos a establecer el resultado del modo siguiente:

(19) $$\Psi \geq \mathsf{S}(\mathsf{B}(\mathsf{BS}(\mathsf{B}(\mathsf{BS}(\mathsf{BB}))))\mathsf{B})(\mathsf{KK}).$$

En lo que precede hemos utilizado la relación $\geq$ definida en el sentido de la reducibilidad β; satisface, por tanto, las reglas (ρ), (τ), (μ), (ν), (ξ), (α), y (β). Pero estas derivaciones son también válidas si $\geq$ es la relación cuasi-ordenadora monónota con respecto a la aplicación y producida por (S) y (K).

3. Los combinadores primitivos de Rosser

Rosser [MLV, pág. 128] descubrió que si se postula, además de I, un combinador J cuya regla de reducción es

(J) $$\mathsf{J}fxyz \geq fx(fzy),$$

las reglas de reducción de B, C y W se siguen de las definiciones

(20a) $$\mathsf{C}_* \equiv \mathsf{JII},$$
(20b) $$\mathsf{C} \equiv \mathsf{JC}_*\,(\mathsf{JC}_*)\,(\mathsf{JC}_*),$$
(20c) $$\mathsf{B} \equiv \mathsf{C}(\mathsf{JIC})\,(\mathsf{JI}),$$
(20d) $$\mathsf{W} \equiv \mathsf{C}(\mathsf{C}(\mathsf{BC}(\mathsf{C}(\mathsf{BJC}_*)\mathsf{C}_*))\mathsf{C}_*).$$

El combinador C_* tiene la regla de reducción

(C_*) $$\mathsf{C}_* xy \geq yx,$$

que puede deducirse de la definición

(21) $$\mathsf{C}_* \equiv \mathsf{CI}.$$

El combinador C_* tiene una significación muy sencilla, pero el combinador J resulta muy artificial.

C. TERMINOLOGIA Y NOTACION

Por lo que hace a la terminología, adoptaremos las definiciones siguientes (algunas de las cuales se refieren a términos ya usados en la anterior discusión).

1. Clases de obs

Un ob de un cálculo λ se llamará un *ob* λ con símbolos adicionales, cuando sean útiles, para indicar la clase de cálculo λ al que pertenece. Así, un ob λK será un ob del cálculo λK; un ob λI un ob del cálculo λI.

Una *combinación* será desde ahora una combinación en el sentido del § 2B2 respecto de la aplicación como operación única; por eso puede llamársele más precisamente *combinación aplicacional.* Una *combinación pura* es una combinación de sólo variables. Un *combinador*, de acuerdo con § 0*C*, es una combinación de obs λ, cada uno de los cuales es de la forma

$$\lambda x_1 \ldots x_m . \mathfrak{X}, \tag{1}$$

siendo $\mathfrak{X}$ a su vez una combinación de $x_1, \ldots, x_m$. Usaremos el término '*ob combinatorio*' para designar cualquier combinación de combinadores y variables. En las aplicaciones de la teoría se admiten algunas constantes suplementarias; en este caso, las combinaciones que contienen esas constantes se admiten como obs combinatorios.

Ejemplos de esas varias categorías son los siguientes (los ejemplos dados para las categorías más amplias no pertenecen a ninguna más reducida):

Combinadores:	$(\lambda xy.yx)\ (\lambda xy.x)$
Obs combinatorios:	$(\lambda xy.yx)z$
obs λ	$\lambda x.x(\lambda y.zy), \lambda x.x(\lambda y.yy).$

Si $\mathfrak{X}$ es una combinación de $x_1. \ldots, x_m$, diremos que un combinador X tal que

$$Xx_1 \ldots x_m \geq \mathfrak{X} \tag{2}$$

corresponde a $\mathfrak{X}$, y la regla (2) se llamará *regla de reducción de* X.

2. Combinadores propios y regulares

Un combinador *propio* es un combinador que corresponde a una combinación pura. Todos los combinadores considerados en § B eran combinadores propios, incluyendo el C_* y el J del § B3. Todo combinador de la forma (1) es un combinador propio, y, por tanto, todo combinador es una combinación de combinadores propios. Por otro lado, el combinador C_* K no es propio, porque

$$\mathsf{C}_* \mathsf{K} x y_1 \dots y_n \geq x \mathsf{K} y_1 \cdots y_n,$$

y es evidente que no cabe otra reducción. Otro ejemplo es WWW.

Un combinador *regular* es un combinador propio en cuya regla de reducción la primera variable se queda sin modificación en su primera posición. Dicho de otro modo, un combinador regular es un combinador cuya regla de reducción es de la forma

$$X f x_1 \dots x_m \geq f \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \dots, \mathfrak{X}_n, \tag{3}$$

siendo $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n$ combinaciones de $x_1, \dots, x_m$. Los combinadores regulares tienen importancia porque representan, por así decirlo, transformaciones sobre los argumentos de una función f. Los combinadores B, C, I, K, S, W, Φ, Ψ del § A son todos combinadores regulares; C_* y J son, en cambio, irregulares.

3. Orden y grado

La definición de orden del § 4F puede trasladarse a la presente teoría. Según aquella definición, todo ob combinatorio que empiece con una variable —incluyendo, por tanto, toda combinación pura— es de orden 0; tal es también WWW. I es de orden 1, W, K y C_* son de orden 2; B, C y S son de orden 3; y Φ, Ψ y J son de orden 4. En § G daremos un ejemplo de un combinador de orden infinito. Pero de los teoremas del § 4F se sigue que todo combinador propio —y, por tanto, *a fortiori*, todo combinador regular— es de orden finito.

Si X es un combinador regular de orden $m + 1$, definimos el *grado* de X como el n de la regla de reducción (3). Así, el grado de K es 0, el de I y B es 1, el de C, W, S, Φ y Ψ es 2.

4. Clases de combinadores regulares

Las diferentes clases de combinadores regulares pueden definirse en términos de las combinaciones a las que corresponden, exactamente igual que hemos definido la noción misma de combinador regular.

Un *identificador* es un combinador regular que, para algún $m \geq 0$, corresponde a la combinación de $f, x_1, \ldots, x_m$ que es $fx_1 \ldots x_m$.

Un *componedor* es un combinador regular que corresponde a una combinación de $f, x_1, \ldots, x_m$ que puede obtenerse colocando algunos paréntesis en $fx_1 \ldots x_m$.

Un *variador* es un combinador regular que corresponde a una combinación de $x, fx_1, \ldots, x_m$ de la forma $fy_1 \ldots y_n$, siendo cada y_j uno de los x_i. (Por tanto, un componedor no es un variador, mientras que un identificador puede ser considerado, en un sentido trivial, como variador.) En particular, un *permutador* es un variador en el que los y_j son los x_i en un orden diferente; un *duplicador* es un variador en el cual los y_j son los x_i en el orden $x_1 \ldots, x_m$, pero algunos de los x_i están repetidos; un *cancelador* es un variador en el cual la secuencia $y_1 \ldots, y_n$, se obtiene omitiendo algunos de los x_i de $x_1, \ldots, x_m$.

A veces usamos los símbolos genéricos $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{R}$, respectivamente, para indicar combinadores regulares, identificadores, componedores, variadores, permutadores, duplicadores y canceladores.

5. Cuasi-ordenadoras monótonas y equivalencias

A partir de aquí usamos '$\geq$' y '$=$', respectivamente, para indicar la cuasi-ordenadora monótona y la equivalencia producidas por las reglas de reducción de los combinadores primitivos. Para hablar con precisión, tomamos a K y S como combinadores primitivos de la teoría λK; y B, C, I, junto con W o S, para la teoría λI; nuestras afirmaciones seguirán valiendo, con cambios menores, para otras elecciones posibles. Las reglas de reducción de todos los combinadores relevantes enumerados en § A se seguirán entonces de las oportunas definiciones del § B. Usamos también '$\leq$' para indicar la recíproca de $\geq$.

Escribimos '$\doteq$' en lugar de '$=$' cuando la equivalencia deba tener también la propiedad (3). De aquí se sigue que si X e Y satisfacen la misma regla de reducción, entonces $X \doteq Y$. Por lo que hace al orden, escribimos '$=_k$' en vez de simplemente '$=$' cuando la equivalencia

tiene que establecerse mediante k aplicaciones de la regla (3); esto es,

$$X =_k Y \tag{4}$$

significa que para las variables $x_1, \ldots, x_k$

$$Xx_1 \ldots x_k = Yx_1 \ldots x_k.$$

Lo mismo vale de '$\geq_k$'. De esto podemos inferir que X es convertible-$\beta\eta$ con Y; si X e Y son del mismo orden, son convertibles-β.

6. Terminología para combinaciones

Si Y es un componente de X, diremos que Y aparece en *posición funcional* en X, o que es un *componente funcional de* X, precisamente cuando Y sea el U de un componente de la forma UV; y diremos que aparece en *posición argumental*, o que es un *componente argumental*, precisamente cuando sea el V de un componente UV.

Si —y sólo si— Y es el U de un componente Z de X de la forma

$$UV_1 V_2 \ldots V_n \tag{5}$$

con ($n > 0$), podremos decir que (ese caso[2] de) Y es un *componente rector de* Z, y que $Y_1, \ldots, Y_n$ son los *argumentos principales*. Y precisamente cuando n sea el mayor entero tal que Z es él mismo X o un componente argumental de X, diremos que Y es un *componente funcional de grado n*, o que *tiene el grado funcional n*, y que Z es el *componente regido por* Y *en* X.

Si —y sólo si— el U de (5) es un átomo, podremos llamarle la *cabeza* o elemento rector de Z.

D. PROPIEDADES DE B

Vamos a estudiar algunas operaciones definidas a base del combinador B. Estas operaciones posibilitan una notación más condensada y manejable. Los últimos artículos no son de interés más que para ciertos fines más bien especializados.

---

[2] En toda esta discusión consideramos casos concretos de Y, Z, U, V_1, etc.

1. Producto compuesto

Hemos visto que si f y g son funciones de un solo argumento, $\mathsf{B}fg$ representa el producto compuesto de f y g. Esta operación promete ser de gran importancia, por lo que introducimos aquí la siguiente definición:

Definición 1. Para cualesquiera obs X, Y

$$X \cdot Y \equiv \mathsf{B}XY. \tag{1}$$

Admitimos una regla de asociación por la izquierda, de modo que

$$X \cdot Y \cdot Z \equiv (X \cdot Y) \cdot Z, \tag{2}$$

etcétera. También consideraremos el producto como una operación anterior a la aplicación, de modo que tengamos, por ejemplo,

$$XU \cdot YV \equiv (XU) \cdot (YV). \tag{3}$$

Tenemos entonces las siguientes propiedades de esta operación:

Teorema 1. *Si X es un combinador regular e Y es un combinador, entonces $X \cdot Y$ aplicado a una secuencia de argumentos realiza primero sobre ellos la transformación X, y luego la transformación Y.*

Demostración. Por la regla (B) tenemos

$$\mathsf{B}XYfx_1x_2x_3 \ldots \geq X(Yf)x_1x_2x_3 \ldots$$

Como X es un combinador regular, no altera su primer argumento, que es aquí Yf, y transforma los argumentos siguientes, por ejemplo, en una secuencia $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$ ... De aquí

$$\mathsf{B}XYfx_1x_2x_3 \ldots \geq Yf\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3 \ldots$$

Entonces hay que realizar la trasformación Y sobre el resultado de la trasformación X. (Si también Y es un combinador regular, dejará a su vez a f sin alterar.)

Ejemplo. C realiza una permutación, W realiza una duplicación, $\mathsf{C} \cdot \mathsf{W}$ realiza primero una permutación y luego una duplicación del resultado:

$$(\mathsf{C} \cdot \mathsf{W})fxy \geq \mathsf{C}(\mathsf{W}f)xy \geq \mathsf{W}fyx \geq fyyx.$$

TEOREMA 2. *Para todo ob* X

$$X \cdot \mathsf{I} =_1 \mathsf{I} \cdot X =_1 X.$$

Demostración. El teorema se desprende directamente del teorema 1, la regla (I) y la regla (3).

TEOREMA 3. *El producto es asociativo, es decir,*

$$X \cdot (Y \cdot Z) =_1 (X \cdot Y) \cdot Z.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} ((X \cdot Y) \cdot Z)f &\geq \mathsf{B}(\mathsf{B}XY)Zf \\ &\geq \mathsf{B}XY(Zf) \\ &\geq X(Y(Zf)) \\ (X \cdot (Y \cdot Z))f &\geq \mathsf{B}X(\mathsf{B}YZ)f \\ &\geq X(\mathsf{B}YZf) \\ &\geq X(Y(Zf)). \end{aligned}$$

TEOREMA 4. *El producto es distributivo respecto de la aplicación anterior de* B, *es decir,*

$$\mathsf{B}(X \cdot Y) =_2 \mathsf{B}X \cdot \mathsf{B}Y.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathsf{B}(X \cdot Y)fx &\geq (X \cdot Y)(fx) \\ &\geq X(Y(fx)) \\ &\leq X(\mathsf{B}Yfx) \\ &\leq \mathsf{B}X(\mathsf{B}Yf)\ x \\ &\leq (\mathsf{B}X \cdot \mathsf{B}Y)fx. \end{aligned}$$

2. POTENCIAS

DEFINICIÓN 2. Definimos por inducción natural las potencias de un ob combinatorio, del modo siguiente:

$$\begin{aligned} &X^1 \equiv X, \\ &X^{n+1} \equiv X \cdot X^n. \end{aligned}$$

Por tanto, $X^2 \equiv X \cdot X$, $\quad X^3 \equiv X \cdot X \cdot X$, etc.

La definición se aplica a cualquier ob combinatorio. Si N es la negación, por ejemplo, tenemos $N^2f \equiv N(Nf)$; N^2 es la negación iterada, o doble negación.

Si X es un combinador regular el efecto de X^n consiste en iterar la operación X, es decir, en realizar la operación X exactamente n veces. Esto se sigue obviamente de la definición 1 y el teorema 1.

Para $n = 2$ tenemos las siguientes reglas de reducción:

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{B}^2fxyz & \equiv \mathsf{B}(\mathsf{B}f)xyz \geq \mathsf{B}f(xy)z & \geq f((xy)z), \\ & & \equiv f(xyz), \\ \mathsf{C}^2fxy & \equiv \mathsf{C}(\mathsf{C}f)xy \geq \mathsf{C}fyx & \geq fxy, \\ \mathsf{W}^2fx & \equiv \mathsf{W}(\mathsf{W}f)x \geq \mathsf{W}fxx & \geq fxxx, \\ \mathsf{K}^2fxy & \equiv \mathsf{K}(\mathsf{K}f)xy \geq \mathsf{K}fy & \geq f. \end{array}$$

Las potencias son especialmente importantes en relación con B, Φ y combinadores análogos. Tenemos, en efecto, el siguiente:

TEOREMA 5. *Para cualesquiera obs*, $U, X, Y, Z_1, \ldots, Z_n$,

$$\begin{aligned} \mathsf{B}^n UXZ_1 \ldots Z_n &\geq U(XZ_1 \ldots Z_n), \\ \Phi^n UXYZ_1 \ldots Z_n &\geq U(XZ_1 \ldots Z_n)(YZ_1 \ldots Z_n). \end{aligned}$$

TEOREMA 6. *Las leyes siguientes quedan satisfechas para potencias enteras positivas de obs cualesquiera*:

(a) $X^m \cdot X^n =_1 X^{m+n}$,
(b) $(X^m)^n =_1 X^{mn}$,
(c) $(\mathsf{B}X)^m =_2 \mathsf{B}X^m$.

Omitimos las demostraciones, que se obtienen por inducción natural, a partir de los teoremas 3 y 4, como en la aritmética ordinaria.

Observación. Para muchos fines es conveniente definir

(4) $$X^0 \equiv \mathsf{I}.$$

Con esta definición el teorema 6 vale para todos los X de orden ≥ 0.

3. COMBINADORES DIFERIDOS

Definición 3. Para cualquier ob combinatorio X y cualquier número natural n definimos $X_{(n)}$ recursivamente del modo siguiente:

$$\begin{aligned} X_{(0)} &\equiv X, \\ X_{(n+1)} &\equiv \mathsf{B}X_{(n)}. \end{aligned}$$

Así, $X_{(1)} \equiv \mathsf{B}X$, $X_{(2)} \equiv \mathsf{B}(\mathsf{B}X)$, etc.

Aplicado a potencias definitivas

$$X_{(n)}{}^m \equiv (X_{(n)})^m.$$

Se sigue entonces por la regla de reducción (B) que

$$X_{(n+1)} f x_1 x_2 \ldots \geq X_{(n)} (f x_1) x_2 \ldots;$$

y, por tanto, por inducción sobre n,

$$X_{(n)} f x_1 x_2 \ldots x_n \geq X(f x_1 x_2 \ldots x_n). \tag{5}$$

De esto se sigue que si X es de orden $m \geq 1$, entonces $X_{(n)}$ es de orden $m + n$.

Durante la discusión intuitiva de B en § A observamos que si N es la negación proposicional, BN, es decir, $N_{(1)}$, es la negación de un predicado monádico; B(BN) —es decir, $N_{(2)}$— es la negación de una relación, etc. Más en general, $N_{(m)}$, con $m > 0$, es la negación de un predicado m-ádico.

TEOREMA 7. *Para cualquier ob X, y para cualesquiera enteros m, n,*

$$X_{(m+n)} = \mathsf{B}^m X_{(n)}.$$

Demostración. Si $m = 1$, el teorema se sigue de la definición. Para conseguir una inducción sobre m observaremos que

$$X_{(m+n+1)} = \mathsf{B}(X_{(m+n)}) = \mathsf{B}(\mathsf{B}^m X_{(n)}) = \mathsf{B}^{m+1} X_{(n)}.$$

Si X es un combinador regular con la regla de reducción § C(3), se sigue de (2) que

$$X_{(k)} f x_1 \ldots x_{m+k} \geq f x_1 \ldots x_k \mathfrak{X}_1' \ldots \mathfrak{X}_n',$$

obteniéndose $\mathfrak{X}_i'$ a partir de $\mathfrak{X}_i$ por subrogación de cada x_i por x_{i+k}. Así, $X_{(k)}$ realiza sobre $x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}$ la misma operación que realiza X sobre $x_1, \ldots, x_m$, y deja sin modificar f, $x_1, \ldots, x_k$. Podemos expresar esto diciendo que $X_{(k)}$ *difiere* k pasos de acción de X. Así, $\mathsf{C}_{(k)}$ intercambia x_{k+1} y x_{k+2}; $\mathsf{W}_{(k)}$ causa la repetición de x_{k+1}; y $\mathsf{K}_{(k)}$ produce la cancelación de x_{k+1}. Además,

$$\mathsf{B}_{(k)} f x_1 \ldots x_k x_{k+1} x_{k+2} \geq f x_1 \ldots x_k (x_{k+1} x_{k+2}),$$

$$\mathsf{I}_{(k)} f x_1 \ldots x_k \geq f x_1 \ldots x_k.$$

La notación general de la definición 3 puede usarse con cualquier

combinador. Para algunos combinadores está ya en uso una notación que no pone los subíndices entre paréntesis [3]:

$$(6) \qquad C_k \equiv C_{(k-1)}, \qquad K_k \equiv K_{(k-1)}, \qquad W_k \equiv W_{(k-1)}.$$

A base de estas convenciones, (1), (4), (5) del § B resultan:

$$(7) \qquad \begin{aligned} &S \equiv W \cdot C \cdot B_{(1)} \equiv W_1 \cdot C_1 \cdot BB, \\ &\Phi \equiv S_{(1)} \cdot B, \\ &\Psi \equiv W \cdot C_{(1)} \cdot B \cdot B_{(1)} \equiv W_1 \cdot C_2 \cdot B \cdot BB. \end{aligned}$$

4. La operación asterisco

Para algunos fines especiales, en los que importa conseguir una notación muy compacta o condensada, resulta conveniente la siguiente definición:

Definición 4. $\qquad X_* \equiv XI.$

La definición de C_* (§ B(21)) es un caso especial.

La operación así definida es una recíproca parcial de la operación diferida B. Efectivamente, del teorema 2 se sigue que, para todo ob combinatorio X,

$$(BX)_* =_1 X,$$

y, por tanto, que

$$(X_{(n+1)})_* =_1 X_{(n)}.$$

Por otro lado, no tenemos ninguna equivalencia entre BX_* y X; por ejemplo, tenemos

$$BC_* xyz \geq C_* (xy)z \geq z(xy),$$

de tal modo que BC_* y C corresponden a combinaciones diferentes. Así, tenemos claramente:

$$(8) \qquad (X \cdot Y)_* \equiv XY_*.$$

---

[3] Obsérvese el desplazamiento de una unidad; se hace para adecuarse al uso anterior. Hemos pensado que el cambiar estas notaciones tiene inconvenientes no compensados por las nuevas ventajas.

5. Combinadores recíprocos

Si X es un combinador de orden $m + 1$, entonces Y se llamará recíproco de X si —y sólo si—

$$X \cdot Y \equiv Y \cdot X \equiv \mathsf{B}^m \mathsf{I}. \tag{9}$$

Estudiemos las circunstancias en las cuales pueden existir tales recíprocos bajo el supuesto de que X e Y son ambos combinadores regulares. Para m y n suficientemente grandes,

$$Xx_0x_1 \ldots x_m \geq x_0\mathfrak{U}_1 \ldots, \mathfrak{U}_n, \tag{10}$$
$$Yx_0x_1 \ldots x_n \geq x_0\mathfrak{B}_1 \ldots, \mathfrak{B}_p, \tag{11}$$

siendo $\mathfrak{U}_i$, $(\mathfrak{B}_j)$ combinaciones de $x_1, \ldots, x_m$ $(x_1, \ldots, x_n)$. Entonces

$$\begin{aligned} (X \cdot Y)\, x_0\, x_1 \ldots x_m &\geq Yx_0\mathfrak{U}_1 \ldots \mathfrak{U}_n && \text{por (10),} \\ &\geq x_0\mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_p, && \text{por (11),} \end{aligned}$$

obteniéndose $\mathfrak{Y}_k$ mediante sustitucion de x_i por $\mathfrak{U}_i$ en $\mathfrak{B}_k$. Por (9) y el teorema de Church-Rosser inferimos que

$$x_0\, \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_n \operatorname{red} x_0\, x_1 \ldots x_m,$$

y, por tanto,

$$\mathfrak{Y}_k \operatorname{red} x_k.$$

Pero como $\mathfrak{Y}_k$ es una combinación de variables, esto no puede ocurrir más que si $p = m$ y

$$\mathfrak{Y}_k \equiv x_k.$$

De esto se sigue que todo $\mathfrak{B}_k$ es algún x_j para el cual $\mathfrak{U}_j \equiv x_k$; además, no puede haber dos $\mathfrak{B}_k$ que sean el mismo x_j y todo x_k aparece al menos una vez entre los $\mathfrak{U}_i$. Como la relación entre X e Y es simétrica [4], inferimos el siguiente:

Teorema 8. *Los únicos combinadores regulares que tienen recíprocos regulares son los permutadores regulares.*

Queda abierta la cuestión de si existen recíprocos en condiciones más generales que las aquí consideradas.

---

[4] El ejemplo $X = \mathsf{W}$, $Y = \mathsf{K}$ muestra que una mitad de (9) puede valer sin la otra.

Cuando existe, un recíproco de X es, evidentemente, único, y podemos simbolizarlo, como es corriente, por X^{-1}. Como todo permutador puede expresarse en forma de un producto de los C y de I, definimos mediante las expresiones siguientes el recíproco de tales permutadores (X e Y son permutadores para los cuales han sido ya definidos X^{-1} e Y^{-1}):

$$\mathsf{C}^{-1} \equiv \mathsf{C}, \quad \mathsf{I}^{-1} \equiv \mathsf{I},$$
$$(\mathsf{B}X)^{-1} \equiv \mathsf{B}X^{-1},$$
$$(X \cdot Y)^{-1} \equiv Y^{-1} \cdot X^{-1}.$$

E. COMBINADORES RELACIONADOS CON S

Empezaremos esta sección con un estudio de ciertos combinadores llamados formalizadores o combinadores de formalización. Este término se aplicó inicialmente [5] a Φ a causa de su papel al definir la implicación formal en términos de la implicación ordinaria. Como vimos en § A, este combinador afecta a funciones de dos variables de un modo muy análogo a aquel en el cual B se refiere a funciones de una variable. Hay toda una serie de combinadores relacionados análogamente con funciones de 3, 4, 5, ... variables. Llamamos *combinadores formalizadores* a todos esos combinadores, así como a algunos otros análogos, tales como S y Ψ.

En esta sección consideraremos algunas propiedades de estos combinadores, en particular su producción en secuencias análogas a las secuencias de los combinadores diferidos. Resultará que esos procesos son también aplicables a otras secuenciasd e combinadores. Por eso, generalizaremos las definiciones y estudiaremos casos de secuencias que tienen una analogía formal con las de S y Φ, aunque por lo demás las secuencias parezcan no tener relación alguna con sus prototipos.

Terminaremos la sección con algunas observaciones respecto de secuencias en general, las cuales se aplican a esta sección y a la última. Aquí mostramos cómo puede expresarse el término n-ésimo de una secuencia iterativa como función del iterando. Esto nos lleva a los combinadores Z_n propuestos (Church [SPF. II], pág. 863) como representativos de los números naturales. El término n-ésimo de una tal secuencia puede exponerse también como la aplicación de un ob determinado a Z_n, de tal modo que los sufijos numéricos resultan en principio prescindibles.

---

[5] En [UQC], § 4, pág. 165.

1. Las secuencias Φ_n y S_n.

Un combinador Φ_n que formara la generación natural de Φ para funciones de n variables tendría la regla de reducción.

$$\Phi_n f g_1 g_2 \dots g_n x \geq f(g_1 x)(g_2 x) \dots (g_n x). \tag{1}$$

Para $n = 1$ y $n = 2$ esto da

$$\Phi_1 =_3 \mathsf{B}; \qquad \Phi_2 =_4 \Phi. \tag{2}$$

Este combinador está, evidentemente, relacionado con el combinador S_n con la regla de reducción

$$S_n f g_1 g_2 \dots g_n x \geq f x(g_1 x)(g_2 x) \dots (g_n x), \tag{3}$$

el cual constituye una generalización natural de S. Tenemos, efectivamente,

$$\begin{aligned} S_n f g_1 \dots g_n x &= \Phi_{n+1}\, \mathsf{I} f g_1 \dots g_n x, \\ \Phi_n f g_1 \dots g_n x &= S_n (\mathsf{K} f) g_1 \dots g_n x \\ &= (S_n \cdot \mathsf{K}) f g_1 \dots g_n x. \\ \Phi_{n+1} f g_1 \dots g_{n+1} x &= \mathsf{B} f g_1 x(g_2 x) \dots (g_{n+1} x) \\ &= S_n (\mathsf{B} f g_1) g_2 \dots g_{n+1} x \\ &= (\mathsf{B} S_n \cdot \mathsf{B}) f g_1 \dots g_{n+1} x; \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$S_n =_{n+2} \Phi_{n+1}\, \mathsf{I}, \tag{4}$$

$$\Phi_n =_{n+2} S_n \cdot \mathsf{K}, \tag{5}$$

$$\Phi_{n+1} =_{n+3} \mathsf{B} S_n \cdot \mathsf{B}. \tag{6}$$

De eso se sigue que las secuencias Φ_n y S_n son equivalentes, en el sentido de que cada una de ellas puede definirse a base de la otra, con K o sin él.

Al intentar producir esas secuencias inductivamente, resulta que el intento es más fácil para S_n. En efecto, por mera sustitución de S por B, por así decirlo, en la anterior derivación de (6), tenemos

$$S_{n+1} =_{n+3} \mathsf{B} S_n \cdot \mathsf{S}.$$

Podemos, pues, tomar como definición de S_n

$$\mathsf{S}_1 \equiv \mathsf{S}; \qquad \mathsf{S}_{n+1} \equiv \mathsf{BS}_n \cdot \mathsf{S}, \tag{7}$$

y para Φ_n tenemos, o bien

$$\Phi_1 \equiv \mathsf{B}; \qquad \Phi_{n+1} \equiv \mathsf{BS}_n \cdot \mathsf{B}, \tag{8}$$

o bien

$$\Phi_n \equiv \mathsf{S}_n \cdot \mathsf{K}. \tag{9}$$

Con estas definiciones se obtienen (1), (3) y, por tanto, también (2), (4), (5), (6).

2. La secuencia $X_{[n]}$

El esquema para producir S_n se ha usado a veces para producir otras secuencias similares. La forma general de una tal definición es la siguiente:

Definición 1. *Para cualquier ob combinatorio X definimos $X_{[n]}$ mediante una inducción natural sobre n del modo siguiente:*

$$X_{[1]} \equiv X; \quad X_{[n+1]} \equiv \mathsf{B}X_{[n]} \cdot X.$$

Con esta definición (7) equivale a

$$\mathsf{S}_n \equiv \mathsf{S}_{[n]}. \tag{10}$$

El teorema siguiente se sigue de la definición por inducción natural.

Teorema 1. *Si X es un ob combinatorio, entonces*

$$X_{[m+n]} =_2 \mathsf{B}^m X_{[n]} \cdot X_{[m]}, \tag{a}$$

$$X_{[n+1]} =_2 \mathsf{B}^n X \cdot \ \ldots \ \cdot \mathsf{B}X \cdot X. \tag{b}$$

Demostración. Para $m = 1$, (a) es verdadero por definición. Para demostrarlo por inducción sobre m observaremos que

$$\begin{aligned} X_{[n+1]}fx &= (\mathsf{B}X_{[n]} \cdot X)\,fx \\ &= \mathsf{B}X_{[n]}\,(Xf)x \\ &= X_{[n]}\,(Xfx), \end{aligned}$$

Entonces, suponiendo que (a) es verdadero para un m dado, lo demostramos para $m + 1$ del modo siguiente:

$$\begin{aligned} X_{[m+n+1]}fx &= X_{[m+n]}(Xfx) \\ &= \mathsf{B}^m X_{[n]}(X_{[m]}(Xfx)) \\ &= \mathsf{B}^m X_{[n]}(X_{[m+1]}fx) \\ &= \mathsf{B}^{m+1}X_{[n]}(X_{[m+1]}f)x \\ &= (\mathsf{B}^{m+1}X_{[n]} \cdot X_{[m+1]})fx. \end{aligned}$$

Para demostrar (b) observamos que de (a) se sigue

$$X_{[n+1]} =_2 \mathsf{B}^n X \cdot X_{[n]}.$$

A partir de aquí podemos proceder por inducción sobre n.

Aparte del caso especial $X \equiv \mathsf{S}$, es de alguna importancia el caso especial $X \equiv \mathsf{C}$. Por el teorema 1 (b) tenemos

$$\mathsf{C}_{[n]} \equiv \mathsf{C}_n \cdot \ldots \cdot \mathsf{C}_2 \cdot \mathsf{C}_1.$$

Por tanto, $\mathsf{C}_{[n]}fx_1x_2 \ldots x_{n+1} \geq fx_{n+1}x_1x_2 \ldots x_n$. Así, $\mathsf{C}_{[n]}$ corresponde al Δ_n de Rosser [MLV] y al D_{n+1} de [ALS]. Su recíproco $(\mathsf{C}_{[n]})^{-1}$, o, simplemente, $\mathsf{C}_{[n]}{}^{-1}$, es el Γ_n de [GKL, II E 2).

3. La secuencia $X^{[m]}$

Conseguimos otro tipo de generalización si suponemos que las g pueden aplicarse a m argumentos. La generalización de Φ_n es fácil, pues por inducción natural sobre S resulta claro que

$$\Phi_n{}^m fg_1 \ldots g_n x_1 \ldots x_m \geq f(g_1x_1 \ldots x_m)(g_2x_1 \ldots x_m) \ldots (g_nx_1 \ldots x_m),$$

siendo $\Phi_n{}^m$ la m-ésima potencia de Φ_n tal como éste quedó definido en § D2. Por lo que hace a la generalización de S, tenemos, análogamente,

$$\Phi_{n+1}{}^m fg_1 \ldots g_n x_1 \ldots x_m \geq fx_1 \ldots x_m (g_1x_1 \ldots x_m) \ldots (g_nx_1 \ldots x_m).$$

Podemos considerar esa expresión como $\mathsf{S}_n{}^{[m]}$, siempre que $X^{[m]}$ esté definido como sigue:

Definición 2. Para todo ob combinatorio X y todo número natural m

$$X^{[1]} \equiv X, \qquad X^{[n+1]} \equiv X \cdot \mathsf{B}X^{[n]}.$$

TEOREMA 2. *Si X es un combinador regular de orden $p+1$ y grado $q > 0$*, entonces:

(a) $$X^{[m+n]} =_{p+1} X^{[m]} \cdot \mathsf{B}^m X^{[n]},$$

(b) $$X^{[n+1]} =_{p+1} X \cdot \mathsf{B}X \cdot \ldots \cdot \mathsf{B}^n X.$$

Demostración. Para $m = 1$, (a) es verdadero por definición. Para conseguir una inducción sobre m procedemos del modo siguiente. Sea la regla de reducción de X

$$Xfx_1 \ldots x_p \geq f\mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_q.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} X^{[m+n+1]} fx_1 \ldots x_p &\geq X(\mathsf{B}X^{[m+n]} f)x_1 \ldots x_p \\ &\geq \mathsf{B}X^{[m+n]} f\mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_q \\ &\geq X^{[m+n]}(f\mathfrak{Y}_1)\,\mathfrak{Y}_2 \ldots \mathfrak{Y}_q \\ &= X^{[m]}\,(\mathsf{B}^m X^{[n]}\,(f\mathfrak{Y}_1))\,\mathfrak{Y}_2 \ldots \mathfrak{Y}_q \\ &= \mathsf{B}X^{[m]}\,(\mathsf{B}^{m+1} X^{[n]} f)\,\mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_q \\ &= X\,(\mathsf{B}X^{[m]}\,(\mathsf{B}^{m+1} X^{[n]} f))x_1 \ldots x_p \\ &= (X^{[m+1]} \cdot \mathsf{B}^{m+1} X^{[n]})\, fx_1 \ldots x_p. \end{aligned}$$

Con eso queda demostrado (a). Ahora se demuestra (b) por inducción como en el teorema 1.

OBSERVACIÓN. Este teorema es válido sin restricción sobre X para la igualdad entendida en el sentido de conversión $\beta\eta$. La argumentación procedería del modo siguiente:

$$\begin{aligned} X^{[m+n+1]} &\doteq X \cdot \mathsf{B}X^{[m+n]} \doteq X \cdot \mathsf{B}(X^{[m]} \cdot \mathsf{B}^m X^{[n]}) \\ &\doteq X \cdot (\mathsf{B}X^{[m]} \cdot \mathsf{B}^{m+1} X^{[n]}) \\ &\doteq (X \cdot \mathsf{B}X^{[m]}) \cdot \mathsf{B}^{m+1} X^{[n]} \doteq X^{[m+1]} \cdot \mathsf{B}^{m+1} X^{[n]}. \end{aligned}$$

Esta demostración no utiliza más que los teoremas D3 y D4 y la hipótesis inductiva.

Para el caso de que índices y subíndices sean simultáneos adoptamos la convención de que el índice se escribe después del subíndice, o sea,

$$X_{[n]}{}^{[m]} \equiv (X_{[n]})^{[m]}; \quad X_{[n]}{}^{m} \equiv (X_{[n]})^{m}.$$

En el caso de que X sea S, omitiremos los corchetes del subíndice y entenderemos que

$$S_n^{[m]} \equiv (S_{[n]})^{[m]}.$$

Análogamente,

$$\Phi_n^m \equiv (\Phi_n)^m,$$

definiéndose Φ_n por (8) o (9).

Los combinadores Φ_n^m, $S_n^{[m]}$ son de algún interés en la teoría de las funciones recursivas. La operación de sustitución ordinariamente postulada en ella [6] forma la función $\Phi_m^n f g_1 \ldots g_m$ a partir de las funciones $f, g_1, \ldots, g_m$. Podría usarse en vez de eso las operaciones asociadas a $S^{[n]}$ y B^nK. Enumeramos sin más demostración las siguientes expresiones, la primera de las cuales ha sido ya usada:

(11) $$S_n^{[m[} = {}_{m+n+1}\Phi_{n+1}^m \mathsf{I} = {}_{m+n+1}(S^{[m]})_{[n]},$$

(12) $$S_n^{[m+1]} = {}_{m+n+2}\Phi_{n+1} S_n^{[m]}.$$

La fórmula del § B(18) para Ψ resulta entonces

(13) $$\Psi = \Phi^3 \mathsf{BB}(\mathsf{KK}).$$

Otras formas de Ψ son

(14) $$\begin{aligned} \Psi &= S_2^{[4]} K^3(K(BK))(KK) \\ &= C_{[2]} \Phi^3 (BK)K. \end{aligned}$$

Para el combinador $C^{[m]}$ tenemos

$$C^{[m]} \equiv C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_m,$$

y, consecuentemente,

$$C^{[m]} = (C_{[m]})^{-1}.$$

Es el combinador Γ_m de [GKL, IIE2].

---

[6] Cfr. Kleene [IMM], pág. 219.

4. Secuencias iterativas

Decimos que una secuencia $\{X_n\}$ está producida iterativamente a partir de X_k mediante Y si —y sólo si— para todo $n \geq k$.

$$X_{n+1} = YX_n. \tag{15}$$

Llamamos a Y el *iterando* de la secuencia y a X_k *término inicial. Secuencia iterativa* es la producida iterativamente por algún iterando. Generalmente se tiene $k = 0$ ó 1; pero una secuencia con X_k como término inicial contiene una secuencia con X_l como término inicial para todo $l > k$. En toda secuencia tal se sigue por inducción sobre n que

$$X_{n+k} = Y^n X_k; \tag{16}$$

esto es verdad para todo $n \geq 0$ si definimos Y^0 como en § D(4).

Se sigue de § D que las secuencias X^n, $X_{(n)}$ son iterativas y tienen, respectivamente, los iterandos BX y B. Por lo que hace a las secuencias $X_{[n]}$ y $X^{[n]}$, tenemos

$$X_{[n+1]} \equiv BX_{[n]} \cdot X = CB^2XX_{[n]},$$
$$X^{[n+1]} \equiv X \cdot BX^{[n]} = B^2XBX^{[n]}.$$

Esas secuencias son, pues, iterativas, y tienen como iterando CB^2X y B^2XB, respectivamente. De aquí, por (16),

$$X_{[n+1]} = (CB^2X)^n X, \tag{17}$$
$$X^{[n+1]} = (B^2XB)^n X.$$

Para algunos fines es conveniente extrapolar las secuencias $X_{[n]}$, $X^{[n]}$ para el caso $n = 0$. Supongamos que definimos

$$X_{[0]} \equiv X^{[0]} \equiv I. \tag{18}$$

Tenemos entonces

$$CB^2XX_{[0]} = BI \cdot X =_2 X,$$
$$B^2XBX^{[0]} = X \cdot BI =_{p+1} X,$$

requiriendo el último paso la hipótesis del teorema 2. Podemos mostrar por inducción sobre n que

$$X_{[n]} =_{n+1} (\mathsf{CB}^2X)^n\mathsf{I}, \tag{19}$$
$$X^{[n]} =_r (\mathsf{B}^2X\mathsf{B})^n\mathsf{I},$$

adoptando en el último caso la hipótesis del teorema 2 y un r suficientemente grande.

5. Iteradores

Vamos a definir ahora una secuencia iterativa de combinadores Z_n, llamados iteradores, y tales que para todo X

$$X^n =_1 \mathsf{Z}_nX. \tag{20}$$

Para buscar el iterando utilizamos la relación

$$X^{n+1} = \mathsf{B}XX^n =_1 \mathsf{B}X(\mathsf{Z}_nX) = \mathsf{SBZ}_nX.$$

Por tanto, SB es un iterando adecuado; podemos, pues, especificar que

$$\mathsf{Z}_{n+1} \equiv \mathsf{SBZ}_n. \tag{21}$$

Para el término inicial, si deseamos que (20) valga también para $n = 0$, debemos tomar

$$\mathsf{Z}_0 \equiv \mathsf{KI}. \tag{22}$$

Tenemos entonces

$$\mathsf{Z}_1f \equiv \mathsf{SB}(\mathsf{KI})f \geq \mathsf{B}f\mathsf{I} =_1 f,$$

de modo que

$$\mathsf{Z}_1 \equiv \mathsf{SB}(\mathsf{KI})^7 = \mathsf{CBI}. \tag{23}$$

Si no aceptamos K renunciamos al exponente cero y empezamos la

---

[7] Es lo mismo que el I_η de § 6C2. Es una traducción del obλ $\lambda xy.xy$ a la teoría sintética.

secuencia con Z_1 definido como CBI. En cualquiera de los casos se sigue por inducción sobre n que (20) vale para todo n admisible.

Esta argumentación fundamenta el siguiente:

TEOREMA 3. *Los iteradores* Z_n *definidos por* (21) *y* (22) *son tales que* (20) *vale para todo* X *y para todo* $n \geq 0$. *Además, vale* (23). *Si* K *no se acepta, entonces* (20) *vale para* $n > 0$ *si tomamos por* Z_1 CBI.

Church [SPF II, página 863] propuso tomar el combinador Z_n como representativo del número natural n en el sistema. Puede mostrarse fácilmente que

$$(24) \qquad \begin{aligned} \mathsf{Z}_{m+n} &=_2 \Phi\mathsf{B}\mathsf{Z}_m\mathsf{Z}_n, \\ \mathsf{Z}_{mn} &=_2 \mathsf{Z}_m \cdot \mathsf{Z}_n, \\ \mathsf{Z}_{n^m} &=_2 \mathsf{Z}_m\mathsf{Z}_n. \end{aligned}$$

Por tanto, en la teoría de combinadores puede incluirse una aritmética elemental. Además, si introducimos el combinador

$$\mathsf{D}_2 \equiv \lambda xyz.z(\mathsf{K}y)x,$$

tenemos

$$\mathsf{D}_2XYZ_0 = X, \quad \mathsf{D}_2XYZ_{n+1} = Y,$$

de modo que tenemos una noción de par ordenado. Por medio de ésta podemos definir funciones recursivas de naturaleza más general. Con esto llegamos al umbral de la aritmética combinatoria, que hemos pospuesto para el segundo volumen.

Teniendo en cuenta esta aplicación, vale la pena mostrar cómo puede presentarse como función de X y Z_n el n-ésimo término de una secuencia iterativa cuyo término inicial y cuyo iterando estén dados como funciones de X. Si X_0 es el término inical e Y el iterando, tenemos por (16) y (20)

$$X_n = \mathsf{Z}_nYX_0.$$

Sea ahora

$$Y \equiv UX, \quad X_0 \equiv VX;$$

entonces

$$X_n = \Phi\,\mathsf{Z}_nUVX = \mathsf{C}_{[3]}\,\Phi\,UVX\mathsf{Z}_n.$$

F. TEOREMAS SOBRE ORDEN DE COMBINADORES

Vamos a considerar en esta sección algunos teoremas sobre orden y grado y su relación con los identificadores $\mathsf{B}^p\mathsf{I}$. El orden se definió para obs en general (tomando la definición del § 4F); mientras que el grado,

tal como queda definido en § C, tiene significación primariamente para combinadores regulares.

En esta sección tendremos que suponer que los combinadores están definidos como obs-λ según las definiciones de § A. Subrayaremos el hecho utilizando 'cnv' para la relación de igualdad. En toda esta sección ese uso significa convertibilidad β.

1. Teoremas generales

Estos teoremas se refieren a combinadores o a obs-λ, sin restringirse a combinadores regulares.

Teorema 1. *Si X es al menos de orden m, entonces*

$$\mathsf{B}^m\mathsf{I}X \text{ cnv } X; \tag{1}$$

si X tiene orden menor que m, $\mathsf{B}^m\mathsf{I}X$ es un ob Y de orden m tal que

$$Yx_1 \dots x_m \text{ cnv } Xx_1 \dots x_m. \tag{2}$$

En uno y otro caso

$$\mathsf{B}^m\mathsf{I}X \text{ cnv } \lambda x_1 \dots x_m . Xx_1 \dots x_m. \tag{3}$$

Demostración. Sea n el orden de X si es $\leq m$; en otro caso $n = m$. Por el teorema 4F4, para un $\mathfrak{Z}$ adecuado,

$$X \text{ cnv } \lambda z_1 \dots z_n . \mathfrak{Z}. \tag{4}$$

Como $\mathsf{B}^m\mathsf{I}$ cnv $\lambda x y_1 \dots y_m . x y_1 \dots y_m$, tenemos

$$\mathsf{B}^m\mathsf{I}X \text{ cnv } \lambda y_1 \dots y_m . Xy_1 \dots y_m. \tag{5}$$

Excepto por lo que hace al cambio de variables ligadas, esto es precisamente (3).

Si $n = m$ tenemos por (4) (cambiando las variables ligadas)

$$\begin{aligned} \mathsf{B}^m\mathsf{I}X &\text{ cnv } \lambda z_1 \dots z_m . Xz_1 \dots z_m. \\ &\text{cnv } \lambda z_1 \dots z_m . \mathfrak{Z} \text{ cnv } X, \end{aligned}$$

que es (1). La ecuación (2) se sigue de (5); y si $m > n$, $\mathsf{B}_m\mathsf{I}X$ es de orden m por (5), puesto que $Xx_1 \dots x_m$ es entonces de orden 0.

TEOREMA 2. *Si*

$$Xx_1 \dots x_m \text{ cnv } Yx_1 \dots x_m, \tag{6}$$

entonces

$$\mathsf{B}^m|X \text{ cnv } \mathsf{B}^m|Y; \tag{7}$$

además, si X e Y son de orden $\geq m$,

$$X \text{ cnv } Y. \tag{8}$$

Demostración... Por (6) y regla (ξ)

$$\lambda x_1 \dots x_m \cdot Xx_1 \dots x_m \text{ cnv } \lambda x_1 \dots x_m \cdot Yx_1 \dots x_m.$$

Tenemos entonces (7) por (3). Bajo la hipótesis establecida tenemos (8) por (1).

OBSERVACIÓN. Si vale (6), sus dos partes tienen que ser del mismo orden. Si el orden es 0, X e Y pueden tener órdenes diferentes; pero si el orden es $p > 0$, X e Y tienen que ser los dos de orden $m + p$ (pues está claro por definición que si X es de orden $m + p$, $Xx_1 \dots x_m$ es de orden p).

2. TEOREMAS SOBRE COMBINADORES REGULARES

En § C se definió la noción de grado para combinadores regulares. Recordamos que un combinador regular X de orden $m + 1$ es de grado n si —y sólo si— tiene una regla de reducción de la forma

$$Xx_0x_1 \dots x_m \geq x_0 \mathfrak{Y}_1 \mathfrak{Y}_2 \dots \mathfrak{Y}_n, \tag{9}$$

siendo cada $\mathfrak{Y}_j$ una combinación de $x_1, \dots, x_m$.

TEOREMA 3. *Si X es un combinador regular de orden $m + 1$ y grado n, entonces para todo ob Z*

$$\mathsf{B}^{m+p} Z \cdot X \text{ cnv } X \cdot \mathsf{B}^{n+p} Z. \tag{10}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
(\mathsf{B}^{m+p} Z \cdot X)x_0x_1 \dots x_{m+p} &\geq \mathsf{B}^{m+p}Z(Xx_0)x_1 \dots x_{m+p} \\
&\geq Z(Xx_0x_1 \dots x_{m+p}) \\
&\geq Z(x_0\mathfrak{Y}_1 \dots \mathfrak{Y}_n x_{m+1} \dots x_{m+p}) \\
&\leq \mathsf{B}^{n+p} Zx_0\mathfrak{Y}_1 \dots \mathfrak{Y}_n x_{m+1} \dots x_{m+p} \\
&\leq X(\mathsf{B}^{n+p}Zx_0)x_1 \dots x_m x_{m+1} \dots x_{m+p} \\
&\leq (X \cdot \mathsf{B}^{n+p}Z)x_0x_1 \dots x_{m+p}.
\end{aligned}$$

Como el orden de los dos lados de (10) es, al menos, $m + p$, tenemos (10) por el teorema 2.

TEOREMA 4. *Si X es un combinador regular de orden $m + 1$ y grado n,*

$$\mathsf{C}\mathsf{B}^{m+1}X \text{ cnv } \mathsf{B}X \cdot \mathsf{B}^n.$$

Demostración. Esto se sigue del teorema 3, tomando $p = 0$, Z como variable, y aplicando el teorema 2.

TEOREMA 5. *Si X es un combinador regular de orden $m + 1$ y grado n, entonces para todo $p \leq n$*

$$X \cdot \mathsf{B}^p\mathsf{I} \text{ cnv } X.$$

Demostración. Sea $Xx_0x_1 \dots x_m \geq x_0\mathfrak{Y}_1 \dots \mathfrak{Y}_n$.

Entonces
$$\begin{aligned}(X \cdot \mathsf{B}^p\mathsf{I})x_0x_1 \dots x_m &\geq X(\mathsf{B}^p\mathsf{I}x_0)x_1 \dots x_m \\ &\geq \mathsf{B}^p\mathsf{I}x_0\mathfrak{Y}_1 \dots \mathfrak{Y}_n \\ &\geq \mathsf{I}(x_0\mathfrak{Y}_1 \dots \mathfrak{Y}_p)\,\mathfrak{Y}_{p+1} \dots \mathfrak{Y}_n \\ &\geq x_0\mathfrak{Y}_1 \dots \mathfrak{Y}_n \\ &\leq Xx_0x_1 \dots x_m.\end{aligned}$$

El resto se sigue por el teorema 2.

G. COMBINADORES PARADOJICOS

Si atendemos ahora a la paradoja de Russell tal como quedó descrita en § **0**B, vemos en seguida que la definición

$$F(f) \equiv \neg f(f) \tag{1}$$

puede expresarse del modo siguiente en notación combinatoria. Sea N la negación. Entonces la definición (1) se convierte en

$$Ff = N(ff) = \mathsf{B}Nff = \mathsf{W}(\mathsf{B}N)\,f.$$

Por tanto, la definición (1) podría darse en la forma

$$F \equiv \mathsf{W}(\mathsf{B}N). \tag{2}$$

Este F tiene, efectivamente, la propiedad paradójica. Pues tenemos

$$FF \geq \mathsf{W}(\mathsf{B}N)F \geq \mathsf{B}NFF \geq N(FF),$$

es decir, que FF se reduce a su propia negación.

La definición (2) puede generalizarse. De (2) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathsf{F} &\leq \mathsf{BWB}N. \\ FF &\leq \mathsf{BWB}N(\mathsf{BWB}N) \\ &\leq \mathsf{S(BWB)(BWB)}N \\ &\leq \mathsf{WS(BWB)}N. \end{aligned}$$

De aquí,

Pongamos ahora

$$Y \equiv \mathsf{WS(BWB)}. \tag{3}$$

Tendremos entonces

$$\mathsf{Y}N \geq FF \geq N(FF). \tag{4}$$

Llamamos a Y *el combinador paradójico.* (Podemos conseguir otros combinadores que son de naturaleza paradójica; pero cuando usamos el artículo determinado nos referimos a Y.) Otras expresiones del mismo son

$$\begin{aligned} \mathsf{Y} = \mathsf{WI} \cdot \mathsf{W} \cdot \mathsf{B} &= \mathsf{SSI(SB(K(SII)))} \\ \text{cnv } \lambda uv.uv(uv)\ (\lambda yz.y(zz)). \end{aligned} \tag{5}$$

Formularemos del modo siguiente su propiedad característica:

Teorema 1. *Dado cualquier X, hay un Y tal que*

$$\mathsf{Y}X \geq Y \geq XY. \tag{6}$$

Demostración. Pongamos que N, que es una indeterminada en la anterior discusión, es X. Entonces (6) vale si ponemos

$$Y \equiv \mathsf{BWB}X(\mathsf{BWB}X).$$

Se sigue de este teorema que puede usarse Y para construir obs de naturaleza más o menos paradójica. Dado cualquier X, $\mathsf{Y}X$ es un ob no alterado por X. Así, $\mathsf{Y}N$, si N es la negación, es el FF de la paradoja de Russell; YK es un combinador que cancela infinitas variables; Y(BI), expresado en la forma λ, se reduce a un X de orden uno tal que $Xx \geq_\beta \mathfrak{Y}$ si —y sólo si— hay un Y tal que $\mathfrak{Y} \equiv Yx$ y $X \geq_\beta Y$. Para estos fines Y promete ser de utilidad más adelante. Es evidente que la famosa argumentación de Gödel puede concebirse como una aplicación de Y.

Los obs $\mathsf{Y}X$ tienen todos la propiedad de que no pueden reducirse a una forma que no sea ulteriormente reducible, es decir, que no contenga

un componente que no pueda formar parte del lado izquierdo de una instancia de una regla de reducción. Otros obs con esta misma propiedad son WWW y WI (WI), pero son de orden 0. El primero de ellos no puede reducirse más que a sí mismo, pero no es irreducible; el segundo, como combinación de W e I, tiene dos formas, cada una de las cuales puede reducirse a la otra; pero cuando se expresa en notación λ y se reduce a $(\lambda x.xx)$ $(\lambda x.xx)$, que tiene la misma propiedad que WWW. Otro ejemplo un tanto parecido a Y es $\mathsf{WS(BWB^2)}$; si le llamamos X, y llamamos X' a $\mathsf{BWB^2}x\mathsf{(BWB^2}x)y$, entonces

$$Xxy \geq X' \geq xX'.$$

Pueden verse otros ejemplos en Fitch [SRR].

Debe subrayarse que no podemos decir que Y, u obs parecidos a él, sean sin-sentidos, que deban, esto es, excluirse de la teoría. Pueden ser sin-sentidos en algunas interpretaciones, pero por lo que hace a la teoría formal en sí misma son tan admisibles como cualesquiera otros obs. Su admisión no implica contradicción; hemos visto, efectivamente, en el capítulo 4, que la teoría de combinadores es consistente en un sentido muy fuerte. La explicación de las paradojas y de los criterios de significación en un sentido estricto son tareas de la lógica combinatoria ilativa.

H. INDEPENDENCIA DEFINICIONAL DE LOS COMBINADORES [8]

En el § B dimos varias posibilidades de interdefinibilidad de los combinadores simples. Esta sección realiza un estudio más sistemático de las condiciones bajo las cuales un combinador puede o no ser definido en términos de otros combinadores. En ella se muestra que cualquier conjunto de combinadores primitivos para el sistema λI o el λK tiene que contener por lo menos dos combinadores distintos; y que en el caso de λI uno de ellos tiene que ser I. Por lo que hace a los combinadores B, C, I, K, S, W, se hace un estudio completo de la posibilidad de definir cualquiera de ellos a base de cualquiera de los otros.

---

[8] Esta sección se debe a William Craig.

1. Condiciones puestas sobre los combinadores propios que integran una combinación

Todo combinador es una combinación de combinadores propios. Vamos a imponer ahora condiciones a los combinadores propios que integran una combinación, y vamos a estudiar algunos de los efectos que tiene este hecho en la combinación misma.

Consideremos cualquier combinador propio X y su regla de reducción.

$$(1) \qquad X x_1 \ldots x_m \geq \mathfrak{X}.$$

Diremos que X tiene un *efecto duplicativo* si —y sólo si— una de las variables por lo menos se presenta en $\mathfrak{X}$ más de una vez. Análogamente diremos que X tiene un *efecto cancelativo* si —y sólo si— al menos una de las variables $x_1 \ldots x_m$ no se presenta en $\mathfrak{X}$. Diremos que X tiene un *efecto compositivo* si —y sólo si— $\mathfrak{X}$ contiene paréntesis. Diremos que X tiene un *efecto permutativo* si —y sólo si—, para algún $i < j$, por lo menos un caso de x_i en $\mathfrak{X}$ está a la derecha de un caso de x_j. Diremos que X *preserva el orden de primer (último) caso* si —y sólo si— las variables en $\mathfrak{X}$, en orden de primer (último) caso, son x_1, x_2, ..., x_m (x_m, x_{m-1}, ..., x_1).

Teorema 1. *Sea X una combinación de combinadores propios, ninguno de los cuales tiene efecto duplicativo. Entonces, para cualesquiera combinaciones puras $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n$, $X\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_n$ no tiene más que un número finito de reducciones. Además, si X es propio, no tiene efecto duplicativo.*

Demostración. En cada paso de reducción el número de combinadores disminuye al menos en una unidad, y el número de casos de cualquier variable sigue siendo el mismo o disminuye.

Teorema 2. *Sea X una combinación de combinadores propios, ninguno de los cuales tiene efecto cancelativo, y sea X propio. Entonces X no tiene efecto cancelativo.*

Demostración. Ningún paso de reducción disminuye el número de casos de ninguna variable.

Teorema 3. *Sea X una combinación de combinadores propios, ninguno de los cuales tiene efecto compositivo, y sea X propio. Entonces X no tiene efecto compositivo.*

Demostración. Ningún paso de reducción pone entre paréntesis ningún ob combinatorio que contenga una variable.

Teorema 4. *Sea X una combinación de combinadores propios,*

ninguno de los cuales tiene efecto permutativo, y sea X propio, con la regla de reducción

$$(1) \qquad Xx_1 \ldots x_m \geq \mathfrak{X}.$$

Entonces $\mathfrak{X}$ *tiene la siguiente propiedad: considérese cualquier caso de* x_j *en* $\mathfrak{X}$ *a la izquierda de un caso de* x_i, *siendo* $i < j$. *Entonces hay un ob* $\mathfrak{X}'$ *tal que el caso de* x_j *en* $\mathfrak{X}$ *se encuentra dentro de un anterior caso de* $\mathfrak{X}'$, *y caso de* x_i *en* $\mathfrak{X}$ *se encuentra dentro de un posterior caso de* $\mathfrak{X}'$, *de tal modo que, considerados como casos en* $\mathfrak{X}'$, *el de* x_i *es anterior al de* x_j.

Demostración. Supongamos como hipótesis inductiva que $Xx_1 \ldots x_m$ ha sido reducido a un ob combinatorio $\mathfrak{X}$ que tiene la propiedad afirmada en el teorema. Basta con que consideremos el caso de que $\mathfrak{X}$ no sea una combinación pura. En este caso $\mathfrak{X}$ contiene un ob combinatorio $U\,\mathfrak{V}_1 \ldots \mathfrak{V}_n$ que puede reducirse, pero no contiene, en cambio, ningún componente propio que pueda ser reducido. Sea $\mathfrak{W}_1 \ldots \mathfrak{W}_r$ el resultado de aplicar a $U\,\mathfrak{V}_1 \ldots \mathfrak{V}_n$ la regla de reducción de U. Sea $\mathfrak{X}^*$ el resultado de subrogar simultáneamente en $\mathfrak{X}$ todas las instancias $U\,\mathfrak{V}_1 \ldots \mathfrak{V}_n$ por $\mathfrak{W}_1 \ldots \mathfrak{W}_r$. Como la combinación correspondiente a X es independiente del orden en el cual se emprendan los pasos de reducción, quedará demostrado el teorema si mostramos que $\mathfrak{X}^*$ tiene la propiedad afirmada.

Asociaremos a cada instancia de una variable en $\mathfrak{X}^*$ un caso único de la misma variable en $\mathfrak{X}$. Si el caso en $\mathfrak{X}^*$ no es dentro de un caso de uno de los obs $\mathfrak{W}_1 \ldots \mathfrak{W}_r$ obtenidos por reducción, practicamos una asociación obvia. Si el caso en $\mathfrak{X}^*$ está dentro de uno de los obs $\mathfrak{W}_1 \ldots \mathfrak{W}_r$ obtenidos por reducción, entonces ese mismo caso estará también dentro de uno de los obs $\mathfrak{V}_1 \ldots \mathfrak{V}_n$. La regla de reducción de U no asocia a cada uno de esos casos de $\mathfrak{V}_l$, $1 \leq l \leq n$, en $\mathfrak{X}^*$ más que un caso de $\mathfrak{V}_l$ en $\mathfrak{X}$; ahora vamos a asociar a cada caso de una variable en ese caso de $\mathfrak{V}_l$ en $\mathfrak{X}^*$, ese caso correspondiente de la variable en el caso asociado de $\mathfrak{V}_l$ en $\mathfrak{X}$.

Consideremos ahora cualquier caso de x_j en $\mathfrak{X}^*$ a la izquierda de un caso de x_i, con $i < j$.

Caso 1. El orden de los dos casos asociados en $\mathfrak{X}$ está invertido, de modo que al caso asociado de x_j en $\mathfrak{X}$ está a la derecha del caso asociado de x_i en $\mathfrak{X}$. Por el modo como se ha llevado a cabo la asociación, esa inversión del orden sólo es posible si los casos dados de x_j y x_i en $\mathfrak{X}^*$ se encuentran en el mismo caso de $\mathfrak{W}_1 \ldots \mathfrak{W}_r$. Además, como U no tiene efecto permutativo, la inversión del orden sólo es posible si

los dos casos asociados en $\mathfrak{X}$ se encuentran en el mismo caso de $\mathfrak{V}_l$, $1 \leq l \leq n$, mientras que el caso de x_j en $\mathfrak{X}^*$ se encuentra en un caso anterior de $\mathfrak{V}_l$, y el caso de x_i en $\mathfrak{X}^*$ se encuentra en un caso posterior de $\mathfrak{V}_l$. Así, pues, considerados como casos en $\mathfrak{V}_l$, la de x_i está a la izquierda de la de x_j.

Caso 2. El caso asociado de x_j en $\mathfrak{X}$ está a la izquierda del caso asociado de x_i en $\mathfrak{X}$. Entonces, por la hipótesis inductiva, hay un $\mathfrak{X}'$, tal que el caso asociado de x_j en $\mathfrak{X}$ está dentro de un anterior caso de $\mathfrak{X}'$, y el caso asociado de x_i en $\mathfrak{X}$ se encuentra en un posterior caso de $\mathfrak{X}'$, de tal modo que, considera dos como casos en $\mathfrak{X}'$, el de x_i es anterior al de x_j. Escogemos a $\mathfrak{X}'$ de modo que sea el ob más pequeño en el que se cumple lo dicho.

Subcaso I). No se realiza dentro de $\mathfrak{X}'$ ninguna reducción, de modo que un caso de $\mathfrak{X}'$ en $\mathfrak{X}$ está dentro de uno de $\mathfrak{V}_1, \ldots, \mathfrak{V}_n$ o está completamente fuera de $U\,\mathfrak{V}_1 \ldots \mathfrak{V}_n$. En los dos casos, por el modo como se han asociado los casos de variables en $\mathfrak{X}^*$ con casos en $\mathfrak{X}$, el caso dado de x_i en $\mathfrak{X}^*$ es también un caso en $\mathfrak{X}'$, de tal modo que el caso de x_i en $\mathfrak{X}^*$ y el caso asociado de x_i en $\mathfrak{X}$ son el mismo si se consideran como casos en $\mathfrak{X}'$. Lo mismo vale para el caso dado de x_j en $\mathfrak{X}^*$ y el caso asociado en $\mathfrak{X}$. Se sigue de esto que, considerados como casos en $\mathfrak{X}'$, al caso dado de x_i es anterior al de x_j.

Subcaso II). Se realiza por lo menos una reducción en $\mathfrak{X}'$, de tal modo que $\mathfrak{X}'$ contiene por lo menos un caso de $U\,\mathfrak{V}_1 \ldots \mathfrak{V}_n$. Sea $\mathfrak{X}''$ el resultado de subrogar simultáneamente en $\mathfrak{X}'$ todos los casos de $U\,\mathfrak{V}_1 \ldots \mathfrak{V}_n$ por $\mathfrak{W}_1 \ldots \mathfrak{W}_r$. Consideremos ahora, como casos en $\mathfrak{X}'$ el caso de x_i en $\mathfrak{X}$ asociado al caso dado en $\mathfrak{X}^*$, y al caso de x_j en $\mathfrak{X}$ asociado al caso dado en $\mathfrak{X}^*$. Entonces este caso de x_i en $\mathfrak{X}'$ es anterior a ese caso de x_j. Además, no pueden presentarse los dos en el mismo caso de un $\mathfrak{V}_l$, $1 \leq l \leq n$, puesto que, en este caso, $\mathfrak{V}_l$ habría tenido que escogerse como $\mathfrak{X}'$ menor. Como U no tiene efecto permutativo, se sigue que este caso de x_i en $\mathfrak{X}'$ no produce más casos de x_i en $\mathfrak{X}''$ que los que están a la izquierda de los casos de x_j producidos por el caso de x_j en $\mathfrak{X}'$. Pero el caso dado de x_i en $\mathfrak{X}$ es uno de esos casos de x_i en $\mathfrak{X}''$, y el caso dado de x_j en $\mathfrak{X}$ es uno de esos casos en $\mathfrak{X}''$. Con esto queda completa la demostración.

TEOREMA 5. *Sea X una combinación de combinadores propios, ninguno de los cuales tiene efecto duplicativo ni permutativo. Entonces X es propio y no tiene efecto permutativo.*

Demostración. Por inducción, toda secuencia de pasos reductivos sobre $Xx_1 \ldots x_r$ dará una combinación pura o bien un ob combinatorio $U\,\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_l$ con $l \geq 0$, y siendo U un combinador que se presenta en

X, y todo combinador que se presente en $\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_l$ está a la izquierda de todas las variables. En el último caso, $U\,\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_l\, x_{r+1} \ldots x_{r+s}$ puede reducirse ulteriormente para un adecuado $s \geq 0$, disminuyendo así el número de combinadores al menos en una unidad. Eventualmente resultará una combinación pura $\mathfrak{X}$. Por el teorema 1 cada variable se presenta en $\mathfrak{X}$ como máximo una vez, y, por tanto, por el teorema 4 no se presenta ninguna permutación.

TEOREMA 6. *Sea X una combinación de combinadores propios, ninguno de los cuales tiene efecto duplicativo, permutativo ni compositivo, de modo que todo combinador presente en X es, o bien un identificador, o bien un cancelador (regular), o bien un combinador irregular cuyo único efecto consiste en cancelar la primera variable y tal vez otras. Entonces X es propio y no tiene efecto duplicativo, permutativo ni compositivo.*

Demostración. Teoremas 5, 3 y 1.

TEOREMA 7. *Sea X una combinación de combinadores propios, cada uno de los cuales preserva el orden de primero (último) caso, y sea X propio. Entonces X preserva el orden de primero (último) caso.*

Demostración. Cada paso de reducción preserva el orden de primer (último) caso.

2. BASES DE CONJUNTOS DE COMBINADORES

Llamaremos *selector* a todo combinador $\mathsf{K}^{i-1}\mathsf{K}^{n-i}$ con la regla de reducción

$$\mathsf{K}^{i-1}\,\mathsf{K}^{n-i}\,x_1 \ldots x_n \geq x_i, \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{3}$$

En particular, $\mathsf{I} \equiv \mathsf{K}^0\mathsf{K}^0$ y $\mathsf{K} \equiv \mathsf{K}^0\mathsf{K}^1$ son selectores.

TEOREMA 8. *Sea X una combinación de combinadores propios, ninguno de los cuales es un selector. Entonces X no es un selector.*

Demostración. No es posible un último paso de reducción que dé x_i.

Dado cualquier conjunto de combinadores propios, llamaremos *base* del conjunto dado a un subconjunto determinado si —y sólo si— todo X de conjunto dado puede definirse a base de alguna combinación X' de combinadores del subconjunto, definiendo X' a X en el sentido de tener la misma regla de reducción.

TEOREMA 9. *Considérese cualquier conjunto de combinadores propios que contenga al menos un selector y al menos un combinador de efecto duplicativo, permutativo o compositivo. Entonces cualquier base de ese conjunto tiene que contener por lo menos un selector y otro combinador más.*

Demostración. Por el teorema 8 toda base del conjunto tiene que contener un selector. Por el teorema 6 ninguna combinación de selectores tiene un efecto duplicativo, permutativo o compositivo. Por tanto, cualquier base del conjunto tiene que contener otro combinador más.

COROLARIO 9.1. *Toda teoría sintética de combinadores equivalente al cálculo* λK *o al cálculo* λI *requiere al menos dos combinadores primitivos; en el caso de* λI, *uno de ellos tiene que ser* I.

3. INDEPENDENCIA E INTERDEFINIBILIDAD ENTRE LOS COMBINADORES S, K, C, B, W, I

Un combinador X es *independiente* de un conjunto de combinadores si no hay ninguna combinación X' de combinadores del conjunto que defina a X en el sentido de tener la misma regla de reducción.

Vamos a describir ahora, para los combinadores básicos S, K, C, B, W, I, de modo completo a base de qué otros combinadores es definible y de qué conjuntos de los otros es independiente. La mayor parte de las definiciones se dio en § B, pero se repiten aquí por completar la materia sistemática.

S. A base de C, B, y W tenemos las definiciones S ≡ B(B(BW)C)(BB) por § B(1). Sin C, es decir, a base de K, B, W a I, es imposible una definición, a causa del teorema 4. El teorema 3 elimina la posibilidad de definición sin B. El teorema 1 elimina la posibilidad de definición sin W.

K. El teorema 2 elimina cualquier definición a base de los otros cinco combinadores.

C. Por § B(17) tenemos C ≡ S(BBS)(KK), siendo B definido a base de S y K, *ut infra*. Sin S, es decir, a base de K, B, W, e I, la definición es imposible por el teorema 4. Sin K la definición es imposible por el teorema 7, puesto que S, B, W, e I preservan el orden de instancia última.

B. Ya hemos mostrado antes que B ≡ S(KS)K. Sin S la definición es imposible por el teorema 3. También sin K es imposible la definición, como puede verse por la argumentación siguiente: considérese cualquier secuencia de expansiones de $x(yz)$ mediante las reglas de S, C, W e I. El ob resultante contiene exactamente un caso de cada una de las variables x, y, z. Supongamos ahora como hipótesis inductiva que en este ob resultante y y z se presentan en un par de paréntesis (aunque no necesariamente adyacentes). Seguirán entonces presentándose entre paréntesis después de expansión por una de las reglas de S, C, W o I.

Y del hecho de que ni y ni z, con un caso de cada una, pueden presentarse en el ob $\mathfrak{X}$, se sigue que eso es también verdad tras expansión por la regla $\mathfrak{B}\mathfrak{X}(\mathfrak{U}\mathfrak{X}) \leq \mathsf{S}\mathfrak{B}\mathfrak{U}\mathfrak{X}$.

W. Tenemos $\mathsf{W} \equiv \mathsf{SS}(\mathsf{SK})$. En términos de S y C se tiene la definición $\mathsf{W} \equiv \mathsf{C}(\mathsf{S}(\mathsf{CC})(\mathsf{CC}))$, puesto que

$$(4) \qquad \begin{aligned} \mathsf{C}(\mathsf{S}(\mathsf{CC})(\mathsf{CC}))fx &\geq \mathsf{S}(\mathsf{CC})(\mathsf{CC})xf \geq \mathsf{CC}x(\mathsf{CC}x)f \\ &\geq \mathsf{C}(\mathsf{CC}x)xf \geq \mathsf{CC}xfx \geq \mathsf{C}fxx \geq fxx. \end{aligned}$$

Por el teorema 1 es imposible una definición sin S. La definición también es imposible a base de S, B e I, puesto que cualquier combinación de éstos aplicada a f y x puede dar sólo obs cuyos dos últimos símbolos distintos de paréntesis son f y x.

I. Tenemos $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}$ e $\mathsf{I} \equiv \mathsf{WK}$, como se mostró antes. Podemos tener también $\mathsf{I} \equiv \mathsf{CKC}$, puesto que

$$(5) \qquad \mathsf{CKC}x \geq \mathsf{K}x\mathsf{C} \geq x.$$

Sin K la definición es imposible, por el teorema 8. También es imposible la definición a base de B y de K, puesto que el primer paso de expansión de x por las reglas de B y K lleva a un ob $\mathsf{K}x\mathfrak{U}$, y no hay pasos ulteriores que eliminen en $\mathfrak{U}$ símbolos distintos de paréntesis y que se presenten a la derecha de x.

S. TEMAS SUPLEMENTARIOS

1. Precisiones históricas

El material de este capítulo procede, en su mayor parte, de [GKL], [PKR] y Rosser [MLV]. Esos materiales están complementados con notas inéditas y sugerencias concretas hechas por varias personas, especialmente Church y Bernays.

Los combinadores B, C, I, K y S fueron introducidos por Schönfinkel [BML] (cfr. § 0D). Este trabajo de Schönfinkel sigue siendo de valor para la discusión del significado intuitivo de los combinadores y los motivos por los cuales se introducen. (La observación final de Behmann al final del trabajo contiene un error: que no siempre es posible eliminar paréntesis sin utilizar más que B; Behmann escribe que este error fue indicado por Boscovitch previamente.)

El primer trabajo de Curry (en 1927), realizado sin conocer la obra de Schönfinkel, usaba como combinadores primitivos B, C, W e I. (Estos nombres estaban sugeridos por palabras inglesas, no alemanas: 'B' por 'sustitución', ya que 'S' podía usarse para muchos otros fines, como 'suma', 'sucesor', etc.; y 'W' por una asociación muy natural de esta letra con la idea de repetición.) Cuando se tropezó con la obra de Schönfinkel se añadió K a la teoría; pero S siguió considerado como elemento puramente técnico hasta el desarrollo de las nuevas teorías axiomáticas a partir de 1940 (cfr. § 6S1).

Los combinadores B^m, C_n, K_n, W_n se introdujeron en [GKL]; Φ, Ψ en [UQC]. Los combinadores Z_n fueron sugeridos, en principio al menos, por Church [SPF. II]. La relación entre esos combinadores y la aritmética ha sido elaborada por Kleene y Rosser (cfr. § 0C); [MLV], de Rosser, es de especial importancia en esta temática. En él se subrayaba la relación de B con productos y potencias. Del mismo modo fue Rosser quien subrayó el punto de vista de la conversión β, y su [MLV] contenía teoremas análogos a los de § F. (El trabajo de § 6C2 sugiere que el orden debería expresarse por I_η ($= Z_1$) en vez de por BI; pero no se ha conseguido todavía una revisión de § F de acuerdo con ese principio).

[MLV], de Rosser, estaba escrito desde el punto de vista de la conversión βI. En [PKR] se da una revisión de todas las partes básicas de la lógica combinatoria, adaptando algunas de las sugerencias de Rosser-Kleene a las teorías fuertes. El combinador D_3, introducido allí, fue sugerido por Bernays en su visita del 2 de mayo de 1936. (En la teoría de Kleene-Rosser había un par ordenado y un triplo ordenado; cfr. Rosser [DEL], Church [CLC].)

El combinador paradójico apareció explícitamente en Rosenbloom [EML] (con el símbolo Θ, páginas 130-131). De todos modos, el combinador estaba implícito en [IFL]; y la idea de que la paradoja de Russell (y algunas otras) puede formularse en términos combinatorios se remonta a los primeros tiempos de estudio de nuestro tema (cfr. [FPF], página 373, que estaba esencialmente contenido en la carta de Curry a Hilbert de diciembre de 1929 y en Church [SPF. I], página 347). En Fitch [SRR] puede encontrarse una idea análoga.

2. Otros conjuntos de combinadores primitivos

Veremos en § 9E que hay una relación entre la definibilidad de combinadores y los esquemas axiomáticos del álgebra absoluta (es decir, positiva e intuicionista) de la implicación pura. Los esquemas axiomáticos de [HB. I] corresponden a los combinadores B′ ($= CB$), K y W. Estos pueden, efectivamente, tomarse como combinadores primitivos; tenemos entonces

$$\begin{aligned} C_* &=_2 B'K(B'B'W), \\ C &=_3 B'B'(B'C_*), \\ B &=_3 CB', \\ S &=_3 C(B'(B'B'(B'B')\,)B')W. \end{aligned}$$

Las partes derechas pueden tomarse como deficiencia en términos de K, B′, W.

Church [CLC], página 46, muestra que B, I, C_*, W_* pueden tomarse como combinadores primitivos para el sistema λI. Si sustituimos a I por K, el conjunto es suficiente para el sistema λK.

Teoría sintética de combinadores

Hemos tratado hasta aquí sistemas que contenían variables formales. Ahora vamos a proceder a construir sistemas sin variables formales, en ningún sentido, pero que son, sin embargo, combinatoriamente completos en el sentido mencionado en la introducción.

Los sistemas que vamos a considerar serán completamente formalizados y aplicacionales. Contendrán un predicado de igualdad con las propiedades (ρ), (σ), (τ), (μ), (ν). Tomaremos al principio esta igualdad como primitiva; los sistemas así constituidos se llamarán sistemas $\mathscr{H}$. En el capítulo siguiente, cuando deseemos considerar sistemas de la mayor simplicidad, formularemos sistemas logísticos $\mathscr{K}$ y mostraremos que los sistemas $\mathscr{H}$ pueden interpretarse en ellos.

En el § A formularemos para los sistemas $\mathscr{H}$ la propiedad de completud combinatoria, utilizando las nociones epiteoréticas de indeterminada añadida y de extensión. Se mostrará que si el sistema contiene las constantes S y K, de tal modo que las reglas (S) y (K) sean válidas como esquemas axiomáticos, puede definirse una forma de abstracción funcional. Luego tomaremos otros postulados más, necesarios para que una extensión del sistema $\mathscr{H}$ sea equivalente al sistema $\mathscr{L}$ de conversión-λ; consideraremos con más detalle el caso de la conversión λK, y menos completamente los demás. La teoría de la conversión λ puede, pues, interpretarse en el correspondiente sistema $\mathscr{H}$, y éste, a su vez, en el correspondiente sistema $\mathscr{K}$.

El tratamiento incluirá, en § D, una teoría del prefijo de sustitución y un tratamiento de la subrogación en § F. Esto último es necesario para obtener un fundamento para ulteriores capítulos.

A. ANALISIS DE LA COMPLETUD COMBINATORIA

Como queda dicho, postulamos un sistema subyacente, llamado $\mathscr{H}$, que es aplicacional y posee una relación de igualdad con las propiedades

(ρ), (σ), (τ), (μ), (ν). Llamamos *constantes* a los obs de este sistema subyacente.

1. Preliminares

Empecemos preguntándonos qué queremos decir al hablar de una función intuitivamente definida sobre $\mathscr{H}$. Una respuesta natural sería que una tal función está determinada por una combinación de constantes y ciertos argumentos $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Si llamamos a una tal combinación $\mathfrak{U}$, entonces la función determinada por $\mathfrak{U}$ es la correspondencia que asocia a cada n-tuplo de constantes el valor obtenido al sustituir esas constantes, respectivamente, a los $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de $\mathfrak{U}$.

Este proceso equivale a añadir $u_1, u_2, \ldots, u_n$ a $\mathscr{H}$ como indeterminadas añadidas, formando así una extensión $\mathscr{H}'$ de los obs de $\mathscr{H}$. La combinación $\mathfrak{U}$ es entonces un ob de $\mathscr{H}'$. Todo ob de $\mathscr{H}'$ determina una función sobre $\mathscr{H}$ en el sentido dicho, y recíprocamente.

La función así determinada está formalmente definida en $\mathscr{H}$ si —y sólo si— existe una constante U tal que la ecuación

$$Uu_1u_2 \ldots u_n = \mathfrak{U} \tag{1}$$

es válida en $\mathscr{H}'$. Un tal U[1], que representa la función cuyo valor sin especificar está dado por $\mathfrak{U}$, será designado por la notación

$$[u_1, u_2, \ldots, u_n]\,\mathfrak{U}. \tag{2}$$

La definición de un tal U puede hacerse por inducción sobre n. Mas para llegar a ese resultado tenemos que definir primero una función, a la que llamaremos $[x]\mathfrak{X}$, no sólo respecto de $\mathscr{H}$ mismo, sino también respecto de una extensión cualquiera $\mathscr{H}'$ de $\mathscr{H}$. Supongamos—ésta es la hipótesis inductiva— que hemos definido un U como en (2) para todo $\mathfrak{U}$ de $\mathscr{H}'$. Añadamos a $\mathscr{H}'$ una nueva indeterminada x, para formar la extensión $\mathscr{H}'(x)$ de $\mathscr{H}'$; se trata, naturalmente, de la extensión de $\mathscr{H}$ obtenida añadiendo a $\mathscr{H}$ $u_1, u_2, \ldots, u_n, x$. Sea $\mathfrak{X}$ un ob de $\mathscr{H}'(x)$. Si definimos $\mathfrak{X}$ como un valor de una función de x en $\mathscr{H}'$, es decir, si podemos encontrar un $\mathfrak{U}$ tal que

$$\mathfrak{U}\,x = \mathfrak{X}; \tag{3}$$

---

[1] Si hay más de uno se definirá uno en particular por algún expediente normado.

entonces, puesto que, por la hipótesis inductiva, podemos encontrar un U de $\mathscr{H}$ que satisfaga (1), tendremos

$$Uu_1 \ldots u_n x \equiv \mathfrak{X}.$$

Si ahora denotamos por $[x]\,\mathfrak{X}$ el $\mathfrak{U}$ de (3), podemos tomar

$$(4) \qquad [u_1, \ldots, u_n, x]\,\mathfrak{X} \equiv [u_1, \ldots, u_n]\,[x]\,\mathfrak{X}$$

como una definición recursiva del U de (2) a base de la misma noción para $n - 1$.

Es evidente que $[x]\mathfrak{X}$ representa la abstracción funcional, y que, por tanto, es la misma idea que el $\lambda x\mathfrak{X}$ del capítulo 3. La definición recursiva (4) es la misma que la de § 3B(2). Pero hay entre ellas la siguiente diferencia: en el cálculo λ el prefijo se toma como primitivo, mientras que aquí $[x]\mathfrak{X}$ es algo que hay que definir. Demostraremos debidamente que las dos teorías son equivalentes; mas para demostrar esa equivalencia tenemos que poseer notaciones distintas para las dos ideas.

2. Definición de la abstracción funcional

Ahora atenderemos al problema de la definición de $[x]\,\mathfrak{X}$. Presuponemos una determinada extensión $\mathscr{H}'$ de $\mathscr{H}$, e intentamos definir para cada ob $\mathfrak{X}$ de $\mathscr{H}'$ (x) un ob X de $\mathscr{H}'$ tal que

$$(5) \qquad Xx = \mathfrak{X}$$

es válido en $\mathscr{H}'(x)$. Usamos sistemáticamente letras góticas como variables intuitivas para obs de $\mathscr{H}'(x)$, es decir, para combinaciones de x y los obs de $\mathscr{H}'$, y mayúsculas cursivas como variables intuitivas para los obs de $\mathscr{H}'$ (los cuales, por tanto, no contienen x como componente). Admitimos que

$$(6) \qquad X \equiv [x]\,\mathfrak{X}, \quad Y \equiv [x]\,\mathfrak{Y}, \quad Z \equiv [x]\,\mathfrak{Z},$$

etcétera.

Podemos definir $[x]\,\mathfrak{X}$ por inducción sobre la estructura de $\mathfrak{X}$. Si $\mathfrak{X}$ es primitivo, entonces es x o un ob primitivo de $\mathscr{H}'$; si $\mathfrak{X}$ es compuesto, entonces es de la forma $\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$, pudiendo suponerse que Y y Z han sido ya

previamente definidos. La definición de X en los tres casos es como sigue:

(a) Si $\mathfrak{X} \equiv x$, postulamos una constante I y ponemos

$$X \equiv \mathsf{I}; \tag{7}$$

con esto (5) valdrá si I obedece a la regla

$$\mathsf{I}x = x. \tag{I}$$

(b) Si $\mathfrak{X} \equiv a$, siendo a un ob primitivo de $\mathscr{H}'$, postulamos una constante K que nos da X como función de a, del modo siguiente:

$$X \equiv \mathsf{K}\,a; \tag{8}$$

para que valga (5) es entonces suficiente tener la regla

$$\mathsf{K}xy = x, \tag{K}$$

siendo x e y indeterminadas.

(c) Si $\mathfrak{X} \equiv \mathfrak{YZ}$, postulamos una constante S que nos dé X como función de Y y Z, del modo siguiente:

$$X \equiv \mathsf{S}YZ; \tag{9}$$

entonces (5) valdrá si

$$\mathsf{S}YZx = Yx(Zz)$$

que es un caso especial de la regla

$$\mathsf{S}xyz = xz(yz). \tag{S}$$

Con esas definiciones X ha quedado definido unívocamente para todo $\mathfrak{X}$, y satisface (5); además, X es una combinación de S, K, I y los obs primitivos de $\mathfrak{X}$ que son distintos de x. Además, puesto que (5) es consecuencia —por (τ), (μ), (ν)— sólo de (S), (K) e (I), se sigue que tenemos

$$Xx \geq \mathfrak{X}, \tag{10}$$

siendo $\geq$ la relación monótona cuasi-ordenadora producida por (S), (K) e (I),

Las reglas (S) y (K) son precisamente las que valían para los combinadores S y K en el capítulo 5. Como vimos allí, y podemos verificar directamente, la regla (I) es una consecuencia de la definición

$$\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}.$$

Por tanto, es innecesario postular I independientemente.

La discusión puede resumirse del modo siguiente:

TEOREMA 1. *Si el sistema completamente formal* $\mathscr{H}$ *es aplicacional y contiene una igualdad que satisfaga a* (ρ), (σ), (τ), (μ), (ν) *y tiene dos constantes* S *y* K *que satisfagan las reglas*

$$\text{(S)} \qquad \mathsf{S}xyz = xz(yz),$$
$$\text{(K)} \qquad \mathsf{K}xy = x,$$

entonces $\mathscr{H}$ *es combinatoriamente completo. Sea* $[x_1, \ldots, x_n]\,\mathfrak{X}$ *definido, para toda combinación* $\mathfrak{X}$ *de constantes y variables* $x_1, \ldots, x_n$ *por las siguientes especificaciones:*

(a) *Si* $\mathfrak{X} \equiv x$, $\quad [x]\,\mathfrak{X} \equiv \mathsf{SKK}$;

(b) *Si* $\mathfrak{X}$ *es un primitivo distinto de* x,

$$[x]\,\mathfrak{X} \equiv \mathsf{K}\,\mathfrak{X};$$

(c) *Si* $\mathfrak{X} \equiv \mathfrak{YZ}$, *entonces*

$$[x]\,\mathfrak{X} \equiv \mathsf{S}([x]\,\mathfrak{Y})\,([x]\,\mathfrak{Z});$$

(d) $$[x_1, \ldots, x_m, y]\,\mathfrak{X} \equiv [x_1, \ldots, x_m]\,[y]\,\mathfrak{X}.$$

Entonces $[x_1, \ldots, x_m]\,\mathfrak{X}$ *es una combinación de* S, K *y las constantes primitivas que son componentes de* $\mathfrak{X}$, *de tal modo que*

$$(11) \qquad ([x_1, \ldots, x_m]\,\mathfrak{X})\,x_1x_2 \ldots x_m \geq \mathfrak{X},$$

siendo $\geq$ *la relación monótona cuasi-ordenadora definida por* (S) y (K).

Las constantes S y K se llamarán *combinadores primitivos*. Para $\mathscr{H}$, un *combinador* es una combinación cualquiera de los combinadores primitivos.

OBSERVACIÓN. Las reglas (S) y (K) tienen que postularse como han quedado formuladas, son indeterminadas. Esto equivale a decir, en el

caso de (K), por ejemplo, que

$$KXY = X$$

es una consecuencia formal del hecho de que X e Y son obs. Esta es una condición más fuerte que la mera exigencia de que la ecuación valga cuando X e Y son obs cualesquiera; pues puede pensarse que valiera en una enumeración, por así decirlo, y no valiera necesariamente en una extensión. La condición fuerte queda satisfecha si las ecuaciones son esquemas axiomáticos.

3. Otras definiciones posibles

Aunque la definición formulada en el teorema 1 es conveniente para la demostración de § C, hay fines para los cuales resultan más adecuadas otras formas de la definición. Por eso vamos a hacer aquí algunas observaciones acerca de otras definiciones posibles. Estas observaciones no son necesarias para los resultados principales de §§ B-E. Las colocamos aquí por su interés intrínseco y como fundamentación de § F.

La discusión resulta más fácil utilizando una modificación de una técnica debida a Markov[2]. Enumeramos abajo seis especificaciones indicadas por (a)—(f); cada una de ellas especifica una subrogación de un componente de la forma $[x]\ \mathfrak{X}$. Llamamos *algoritmo* a cualquier selección de esas especificaciones en un orden determinado. Indicamos el algoritmo escribiendo los símbolos apropiados 'a'—'f' en el orden determinado y entre paréntesis; así, el algoritmo (fab) es el que contiene las especificaciones (f), (a), (b), en este orden. Interpretamos un algoritmo como significado que un componente de la forma $[x]\ \mathfrak{X}$ debe ser subrogado según la primera de las especificaciones del orden dicho que resulte aplicable. Para mayor precisión podemos suponer que los componentes deben eliminarse según el orden en que se presentan de dentro afuera y, en caso de que no se solapen, de izquierda a derecha.

Al enumerar las especificaciones utilizaremos la convención del § 1 según la cual las cursivas mayúsculas son obs de $\mathscr{H}'$ (que no contienen x), mientras que las góticas mayúsculas son obs cualesquiera de $\mathscr{H}'(x)$ (que pueden contener x o no contenerla). Las especificaciones deben usarse junto con (4), que debe considerarse como añadido a ellas en el algoritmo.

Dicho esto, la lista de las especificaciones es como sigue:

---

[2] [TAl], 1951.

(a)	$[x].X$	$\equiv$	$\mathsf{K}X$.
(b)	$[x].x$	$\equiv$	I.
(c)	$[x].Xx$	$\equiv$	X.
(d)	$[x].Y\mathfrak{Z}$	$\equiv$	$\mathsf{B}YZ$.
(e)	$[x].\mathfrak{Y}Z$	$\equiv$	$\mathsf{C}YZ$.
(f)	$[x].\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$	$\equiv$	$\mathsf{S}YZ$.

La definición hecha en § 2 es la misma hecha por el algoritmo (fab). Pues al colocar (f) antes que (a) garantizamos que (a) no puede aplicarse más que cuando (f) no puede serlo, es decir, cuando X es un átomo, y así tenemos los mismos requisitos que en el teorema 1. Por la misma razón vemos que si (f) es dada primero, entonces (c)—(e) son vacíos, de modo que (fab) es, en realidad, lo mismo que (fabcde). Los definientia últimos para casos incluso muy simples de $[x_1, \ldots, x_m]\,\mathfrak{X}$ son a menudo de una enorme complicación, como puede comprobar fácilmente el lector al explicitar $[x, y, z].\ xz(yz)$. De todos modos, evita la división en casos del § C; por esta razón lo preferimos aquí.

El algoritmo (abf) fue usado por Rosser [DEL] [3]. Da definiciones considerablemente más sencillas que las de (fab), pero complicadas en comparación con las definiciones propuestas en el capítulo **5** para combinadores que representan las mismas combinaciones.

El algoritmo (bdef) da una definición de $[x]\,\mathfrak{X}$ para todos los casos en los cuales $\mathfrak{X}$ contiene, efectivamente, a x libre, pero no para otros casos. Sirve, por tanto, para el estudio de la conversión $\lambda\mathsf{I}$ [4]. Obsérvese que sería natural tomar B, C, I, S como primitivas del sistema.

El algoritmo (abde) definirá $[x]\,\mathfrak{X}$ para todos los casos en los cuales $\mathfrak{X}$ no contiene más de una instancia de x. Es, por tanto, adecuado para una teoría de combinadores sin W. Nos interesaremos un tanto por un sistema así en el capítulo **10**.

Hasta el momento no nos hemos referido a la estipulación (c). Esta es, evidentemente, incompatible con la identificación de $[x]\,\mathfrak{X}$ y $\lambda x\mathfrak{X}$ para el caso de la conversión β [5]. Pero su presencia simplifica grandemente los definientia. Con esto tenemos esencialmente una formaliza-

---

[3] Ese trabajo apareció cuando el presente libro estaba ya en preparación, demasiado tarde, por tanto, para que pudiéramos modificar sustancialmente la demostración dada más abajo.

[4] Este es, esencialmente, el algoritmo de Church [CLC], § 12, excepto en que las expresiones de la derecha de (d), (e), (f) se reducen todo lo posible en términos de J e I como primitivas.

[5] Pero sería un error suponer que la presencia de la cláusula (c) permite deducir cualquier ecuación que no sea válida en el cálculo β después de eliminar los prefijos $[x]$, etcétera.

ción de las técnicas de § 5B, como resultará de algunos teoremas que diferimos hasta el final de este artículo a causa de su carácter muy especial.

Vamos a considerar ahora algunas propiedades generales de los algoritmos formados con (a)—(f) en la forma descrita. Sea $\mathfrak{A}$ un tal algoritmo. Llamamos *combinadores básicos* de $\mathfrak{A}$ a los que aparecen en el lado derecho de las condiciones (a), (b), (d), (e), (f), que sean, efectivamente, tomadas para $\mathfrak{A}$. Se entiende que la relación $\geq$ será la relación monótona ordenadora parcial producida por las reglas de reducción de los combinadores básicos de $\mathfrak{A}$, tal como esas reglas han quedado especificadas en el capítulo § 5; un ob es irreducible cuando no contiene ningún componente que pueda constituir la parte izquierda de una tal regla de reducción. Cuando tengamos que considerar simultáneamente dos o más algoritmos los distinguiremos mediante subíndices, acentos, etc., añadidos sistemáticamente a todas las notaciones referentes a los diversos algoritmos.

TEOREMA 2. *Sea* $\mathfrak{A}$ *un algoritmo formado con* (a)—(f), *y sea* $\mathfrak{X}$ *una combinación de* $x_1 \ldots, x_m$ *y las constantes primitivas* $a_1 \ldots, a_n$. *Sea*

$$X \equiv [x_1, \ldots, x_m]\, \mathfrak{X}.$$

Entonces X es una combinación de $a_1, \ldots, a_n$ *y los combinadores básicos de* $\mathfrak{A}$ *tal que*

(I) $$X x_1 \ldots x_m \geq \mathfrak{X};$$

(II) *X es irreducible si todos los componentes constantes de* $\mathfrak{X}$ *que puedan aparecer en el lugar de X en* (a) o (c), *de Y en* (d) *o de Z en* (e) *son irreductibles.*

Demostración. Para $m = 1$ lo demostramos por inducción estructural. Si $\mathfrak{X}$ es un átomo, tenemos (a) o (b); valen tanto (I) cuanto (II). Si $\mathfrak{X}$ es compuesto, los casos posibles son (a), (c)-(f). En todos estos casos las propiedades (I) y (II) valen por virtud de las hipótesis de este teorema, la hipótesis inductiva y las propiedades (η), (ν) de $\geq$.

Para conseguir una inducción sobre m, sea

$$\mathfrak{X}_m \equiv \mathfrak{X}, \qquad \mathfrak{X}_{k-1} \equiv [x_k]\mathfrak{X}_k.$$

Entonces, por (1), $\mathfrak{X}_{k-1}\, x_k \geq \mathfrak{X}_k$, de lo cual inferimos (I) por (ν), (τ). Para demostrar (II) en el caso del algoritmo (abcf), observaremos que $\mathfrak{X}_{k-1}$ es I, un componente constante de $\mathfrak{X}_k$ —es decir, que no contiene

x_k —, o una combinación formada con I y esos componentes constantes de $\mathfrak{X}_k$ mediante la operación monádica que consiste en formar KU a partir de U o mediante la operación binaria que consiste en formar SUV a partir de U y V. Por tanto, si los componentes constantes de $\mathfrak{X}_k$ son irreducibles, también $\mathfrak{X}_{k-1}$ y, *a fortiori*, todos sus componentes constantes son irreducibles. Así, pues, (II) se desprende de una inducción descendente sobre k. La demostración para los demás algoritmos es análoga. En el caso del algoritmo (fab) los únicos componentes constantes que pueden darse son átomos; por tanto, X es irreducible sin más calificación.

A veces es conveniente llamar a (los casos de) los combinadores introducidos por el algoritmo al formar $[x]\ \mathfrak{X}$ a partir de $\mathfrak{X}$ *combinadores adventicios* de $X \equiv [x]\ \mathfrak{X}$, para distinguirlos de los *combinadores natos* que estaban ya presentes en $\mathfrak{X}$.

OBSERVACIÓN 1. De (I) del teorema 2 se sigue que todas las definiciones de $[x_1 \ldots, x_m]\ \mathfrak{X}$ son iguales, como puede demostrarse, una vez establecida la propiedad (ζ). Demostraremos (ζ) en § C por el procedimiento de establecer los análogos de (ξ) y (η) para un algoritmo determinado (fab). Demostrado eso, podremos usar cualquier definición que sea útil en cada caso.

Vamos a interesarnos ahora por los teoremas sobre (c) a que antes nos hemos referido. En éstos usaremos la especial convención de que $[\mathfrak{Y}]$ designa un ob formado a partir de $\mathfrak{Y}$ por la aplicación de las definiciones de §§ 5D-E y reducido luego cuanto sea posible, tratando como indeterminadas a todos los obs, excepto a los combinadores indicados. Pueden omitirse las demostraciones de estos teoremas, pues son todas una aplicación más o menos mecánica de los algoritmos.

TEOREMA 3. *Respecto del algoritmo* (abcf) *tenemos*

(I) $\quad [x, y] \,.\, x \equiv \mathsf{K},$

(II) $\quad [x, y] \,.\, y \equiv \mathsf{KI},$

(III) $\quad [x, y] \,.\, xy \equiv \mathsf{I},$

(IV) $\quad [x, y] \,.\, yx \equiv \mathsf{S(K(SI))K},$

(V) $\quad [x, y] \,.\, xyy \equiv \mathsf{SS(KI)},$

(VI) $\quad [x, y, z] \,.\, xz(yz) \equiv \mathsf{S},$

(VII) $\quad [x, y, z] \,.\, x(yz) \equiv \mathsf{S(KS)K},$

(VIII) $\quad [x, y, z] \,.\, xzy \equiv \mathsf{S(S(KS)(S(KK)S))(KK)},$

(IX) *Si* $x_1 \ldots x_m$ *no se presentan libres en* X,

$$[x_1 \ldots, x_m] \,.\, Xx_1 \ldots x_m \equiv X.$$

TEOREMA 4. *Respecto del algoritmo* (abcdf) *valen sin alteración las propiedades* (I), (II), (III), (V), (VI), (IX) *del teorema* 3; *las propiedades* (IV), (VII), (VIII) *se convierten en*

(IV) $[x, y] \cdot yx \equiv \mathsf{B(SI)K},$
(VII) $[x, y, z] \cdot x(yz) \equiv \mathsf{B},$
(VIII) $[x, y, z] \cdot xzy \equiv \mathsf{S(BBS)\,(KK)};$

y tenemos, además,

(X) $[x, y, z, u] \cdot x(yu)\,(zu) \equiv \mathsf{B(BS)B},$
(XI) $[x, y, z, u] \cdot xu(yu)\,(zu) \equiv \mathsf{B(BS)S},$
(XII) *Si* $\mathfrak{X}$ *no contiene ninguna de las variables* $y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n,$

entonces

$$[y_1, \ldots, y_m, x, z_1, \ldots, z_n] \cdot \mathfrak{X} \equiv [\mathsf{K}^m\,(\mathsf{BK})^n X)],$$

(XIII) $[x, y, u, v] \cdot x(yu)\,(yv) \equiv (\mathsf{S}^{[2]} \cdot \mathsf{B}^2\mathsf{S})\,(\mathsf{B}^3\mathsf{BB})\,(\mathsf{KK})].$

TEOREMA 5. *Respecto del algoritmo* (abcdef) *valen como en el teorema* 4 *las propiedades* (I)-(III), (VI), (VII), (IX)—(XII); *las propiedades* (IV), (V), (VIII) *se convierten en*

(IX) $[x, y] \cdot yx \equiv \mathsf{CI},$
(V) $[x, y] \cdot xyy \equiv \mathsf{CSI},$
(VIII) $[x, y, z] \cdot xzy \equiv \mathsf{C}.$

Resulta de esos teoremas que conseguimos esencialmente las mismas definiciones a que llegamos en el capítulo **5**. Observemos que la definición de C en (VIII) del teorema 3 es más sencilla que la de (VIII) del teorema 4 cuando se subroga a B su definiens S(KS)K. Suponemos que cualquiera de las definiciones que proceden de los teoremas 4 ó 5 se reducirá a la definición correspondiente del teorema anterior si el combinador básico añadido se sustituye por su definición; pero esta conjetura está sin demostrar.

B. PROPIEDADES BASICAS DE $\mathscr{H}$

Consideramos en esta sección algunas propiedades de $\mathscr{H}$ que no requieren más supuestos que los hechos en § A. Formulado así, el sistema $\mathscr{H}$ se llamará $\mathscr{H}_0$.

1. Redundancia de la regla (ν)

La primera de esas propiedades es que la regla (ν) es redundante. Se trata de una consecuencia del teorema siguiente.

Teorema 1. *Si una relación* $\boldsymbol{R}$ *y su recíproca tienen ambas las propiedades* (τ), (μ), (S) y (K), *entonces* $\boldsymbol{R}$ *tiene también la propiedad* (ν).

Demostración. Supongamos que

$$X \boldsymbol{R} Y.$$

Entonces, por (μ), tenemos para cualquier U

$$UX \boldsymbol{R} UY. \tag{1}$$

Si podemos encontrar un U tal que

$$UX \boldsymbol{R} XZ \tag{2}$$

valga en razón de las reglas dichas, entonces tendremos (poniendo en lugar de $\boldsymbol{R}$, en el primer paso, su recíproca)

$$\begin{array}{lll} & XZ \boldsymbol{R} UX & \text{por (2),} \\ & UX \boldsymbol{R} UY & \text{por (1),} \\ & UY \boldsymbol{R} YZ & \text{por (2),} \\ \text{y, por tanto,} & XZ \boldsymbol{R} YZ & \text{por (τ).} \end{array}$$

La demostración del lema consiste exclusivamente en encontrar un U para el cual pueda derivarse (2) a partir de (τ), (μ), (S) y (K) sin usar (ν).

Vimos en el capítulo 5 que

$$\mathsf{I} = \mathsf{SK}Z; \tag{3}$$

y, efectivamente, tenemos para cualquier X

$$\mathsf{SK}ZX \geq \mathsf{K}X(ZX) \geq X$$

sólo mediante las reglas (S), (K) y (τ). Por tanto, poniendo XZ por X, tenemos

$$\begin{array}{lll} XZ & \leq \mathsf{SK}Z(XZ) & \\ & \leq \mathsf{S(SK)}XZ & \text{por (S),} \\ & \leq \mathsf{S(SK)}\ X\ (\mathsf{K}ZX) & \text{por (K) y (μ),} \\ & \leq \mathsf{S(S(SK))}\ (\mathsf{K}Z)X & \text{por (S).} \end{array}$$

Por tanto, todas las condiciones quedan cumplidas si tomamos

$$U = \mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{SK}))\,(\mathsf{K}Z).$$

El teorema queda, pues, demostrado.

OBSERVACIÓN. Si se elimina (ν) como regla primitiva, el teorema 1 exige que (S) y (K) se postulen para $\boldsymbol{R}$ y su recíproca. Esto convierte a $\boldsymbol{R}$ en una equivalencia (§ 2D). Seguiremos usando el signo '$\geq$' para designar la relación monótona ordenadora parcial producida por (S) y (K); pero la relación básica de la teoría es, en realidad, una igualdad.

2. INCORPORACIÓN DE LA TEORÍA INTUITIVA

Como, en $\mathscr{H}_0$, $\geq$ es la relación monótona ordenadora parcial e $=$ es la equivalencia monótona, producidas ambas por las reglas (K) y (S), todo lo que en el capítulo **5** se estableció sobre esas dos relaciones (y otras como $=_k$, definidas en términos de ellas) puede trasladarse sin más a $\mathscr{H}_0$. Desde luego, el punto de vista es ahora completamente diferente. En vez de definir, como hacíamos allí, los combinadores en el cálculo λ para estudiar luego sus relaciones, ahora tomamos a K y S como primitivas abstractas con sus esquemas axiomáticos (K) y (S) y definimos con ellas todos los demás combinadores y obs combinatorios. Estas definiciones deben tomarse como en el capítulo **5**. Para eliminar ambigüedades en los casos en que el capítulo **5** ofrece varias posibilidades de definición precisamos que B, C, I, W deben definirse como en § 5B2, S_n y Φ_n por § 5E(7) y (9), respectivamente, mientras que Ψ queda definido del modo más simple por § 5E(13). Con estas definiciones, y las demás propuestas en el capítulo **5**, son válidas en $\mathscr{H}_0$ todas las propiedades de $\geq$ y de $=$ que se dedujeron allí.

Esas propiedades incluyen, en particular, las reglas de reducción de varios combinadores, las cuales se indican escribiendo el símbolo del combinador entre paréntesis. Las de B, C, I, W, Φ, Ψ se han dado en § 5A, las de (J y) C* en § 5B3, las de B^n en § 5D y las de S_k, Φ_n en § 5E (3) y § 5E(1), respectivamente. Las reglas siguientes, a las que llamaremos *reglas de reducción parcial*, merecen seguramente que adoptemos para ellas una notación mnemotécnica:

$(\mathsf{B})_1$ $\qquad \mathsf{B}x \geq \mathsf{S}(\mathsf{K}x);$

$(\mathsf{B})_2$ $\qquad \mathsf{B}xy \geq \mathsf{S}(\mathsf{K}x)y,$

en particular,

(4) $\mathsf{BSK} \geq \mathsf{B};$
$(\mathsf{C})_1$ $\mathsf{C}x \geq \mathsf{B}(\mathsf{S}x)\mathsf{K};$
$(\mathsf{C})_2$ $\mathsf{C}xy \geq \mathsf{S}x(\mathsf{K}y);$
$(\mathsf{W})_1$ $\mathsf{W}x \geq \mathsf{S}x\mathsf{I}.$

Todas ellas se siguen de las definiciones adoptadas más arriba. La mayor parte de ellas se obtuvo ya en § 5B2.

Análogas conclusiones tendríamos tomando definiciones algo diferentes, o usando diferentes combinadores básicos (cfr. § A3). Pero no investigaremos esas otras posibilidades.

3. Generalización de S

Vamos a derivar ahora algunas consecuencias de la definición de $[x]\,\mathfrak{X}$ en § A2. Seguimos con la convención de que las mayúsculas cursivas designan obs en los cuales no se presenta x, y que las mayúsculas góticas designan obs cualesquiera de $\mathscr{H}(x)$ que pueden contener x o no contenerla; y la notación de § A(6) se aceptará también con subíndices puestos a las letras.

Establecemos ahora las siguientes fórmulas:

(5) $[x] \,.\, \mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_n \leq \mathsf{S}_n X Y_1 \ldots Y_n,$
(6) $[x] \,.\, a\,\mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_n \leq \Phi_n a Y_1 \ldots Y_n,$

siendo a una constante primitiva.

Demostramos (5) por inducción sobre n. Si $n = 1$, (5) vale por la parte (c) del teorema A1 (que es lo mismo que (f) en § A3). Si (5) vale para un n dado, entonces

$$\begin{aligned}
&[x]\mathfrak{X}\mathfrak{Z}\mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_n \leq \mathsf{S}_n([x]\mathfrak{X}\mathfrak{Z})Y_1 \ldots Y_n && \text{por hip. inductiva,}\\
&\equiv \mathsf{S}_n(\mathsf{S}XZ)Y_1 \ldots Y_n && \text{por teor. A 1 (c),}\\
&\leq (\mathsf{B}\mathsf{S}_n \cdot \mathsf{S})XZY_1 \ldots Y_n && \text{por § 5D,}\\
&\equiv \mathsf{S}_{n+1}XZY_1 \ldots Y_n && \text{por § 5E(7).}
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración.

Por lo que hace a (6), tenemos, por (5) y la parte (b) del teorema A1,

$$\begin{aligned}
&[x] \cdot a\,\mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_n \leq \mathsf{S}_n(\mathsf{K}a)Y_1 \ldots Y_n\\
&\leq (\mathsf{S}_n \cdot \mathsf{K})aY_1 \ldots Y_n && \text{por § 5D,}\\
&\equiv \Phi_n aY_1 \ldots Y_n && \text{por § 5E(9).}
\end{aligned}$$

4. Conclusión

Podemos resumir esta sección en una definición y un teorema, del modo siguiente:

Definición. Un sistema $\mathscr{H}_0$ es un sistema completamente formalizado tal que: (a) los obs primitivos son S, K y (no necesariamente) otros; (b) la única operación es la aplicación, o sea, que el sistema es aplicacional; (c) el predicado del sistema es una operación binaria de igualdad; (d) los postulados son (ρ), (σ), (τ), (μ), (K), (S).

Teorema 1. *En un sistema* $\mathscr{H}_0$, (ν) *es válida y se verifican las hipótesis del teorema* A1. *Además, si se adoptan definiciones como las establecidas en* § 2, *entonces cualquier relación*

$$X \geq Y \qquad X = Y$$

del capítulo 5 *que dependa sólo de dichas definiciones es válida en* $\mathscr{H}_0$. *Concretamente, son válidas en* $\mathscr{H}_0$ *las reglas de reducción y las fórmulas* (5), (6).

C. LOS AXIOMAS COMBINATORIOS

Los postulados aceptados hasta ahora para $\mathscr{H}$ no bastan para demostrar todas las ecuaciones del capítulo 5. Por ejemplo, $\mathsf{I} = \mathsf{SKS}$, $\mathsf{BCC} = \mathsf{B^2I}$, $\mathsf{BI} = \mathsf{I}$ son intuitivamente válidas (y demostrables si los obs se traducen a obs λ)[6], pero no son derivables en $\mathscr{H}_0$.

Pero todas esas ecuaciones intuitivas resultarían demostrables si añadiéramos la regla (ζ) o, lo que equivale a lo mismo, las reglas (ξ) y (η). Por eso vamos a añadir a $\mathscr{H}_0$ un conjunto de axiomas de la forma

$$(\omega) \qquad U_k = V_k \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

siendo U_k y V_k constantes. Los llamaremos *axiomas combinatorios* y los designaremos colectivamente por (ω), de modo que $\mathscr{H}$ quedará definido por los postulados (ρ), (σ), (τ), (μ), (S), (K) y (ω). Vamos a

[6] Las dos primeras en el sentido de la conversión β, la última en el sentido de la convesion βη.

intentar formular (ω) de tal modo que (ξ) y (η)[7] resulten derivables como epiteoremas.

Vamos a considerar dos formas de la teoría, $\mathscr{H}_\beta$ y $\mathscr{H}_\eta$, con axiomas (ω_β) y (ω_η), correspondientes, respectivamente, a la conversión β y a la conversión βη. En esta última tendremos a (η) y (ζ) en toda su fuerza; en la primera tendremos formas débiles a las que llamaremos (η′) y (ζ′).

Mantenemos las restricciones de § A sobre el uso de las mayúsculas cursivas, en particular que X e Y son obs de una extensión $\mathscr{H}'$ que no contiene x. La definición de § A(6) valdrá también con subíndices puestos a las letras. Tomamos $[x]\ \mathfrak{X}$ tal como queda definida en § A2 (es decir, por el algoritmo (fab) de § A3).

1. La regla (ξ)

Para establecer (ξ) basta con tener axiomas que aseguren que la relación $\cong$, definidas por

$$(1) \qquad \mathfrak{X} \cong \mathfrak{Y} \rightleftarrows [x]\,\mathfrak{X} = [x]\,\mathfrak{Y},$$

satisface a los postulados (ρ), (σ), (τ), (μ), (ω), (S) (K), es decir, que los postulados (ρ)*, (σ)*, (τ)*, (μ)*, (ω)*, (S)*, (K)*, obtenidos al poner $\cong$ en el lugar de $=$ (o $\boldsymbol{R}$), son propiedades válidas de $\mathscr{H}(x)$. Pues en este caso podemos ver, por una inducción deductiva, que una demostración de $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$ en $\mathscr{H}(x)$ hecha con el uso de las reglas originales puede transformarse paso a paso en una demostración de $\mathfrak{X} \cong \mathfrak{Y}$ hecha con las reglas transformadas y, por tanto, en una demostración de que $X = Y$ es válido en $\mathscr{H}$. Vamos, pues, a establecer esas reglas transformadas como epiteoremas.

Las reglas (ρ)*, (σ)*, (τ)* son consecuencias inmediatas de (ρ), (σ), (τ). Así, por ejemplo, si suponemos

$$\mathfrak{X} \cong \mathfrak{Y} \quad \text{y} \quad \mathfrak{Y} \cong \mathfrak{Z};$$

entonces, por la definición de $\cong$,

$$X = Y \text{ y } Y = Z;$$

---

[7] No hemos distinguido notacionalmente entre las reglas (ξ), (η), (ζ) de la teoría aquí considerada y las reglas correspondientes de la teoría de la conversión λ. En la primera, $[x]\ \mathfrak{X}$ sustituye al $\lambda x \mathfrak{X}$ de la segunda. En § E, donde las dos clases se presentan juntas, usamos subíndices para distinguirlas; pero esta elaboración no es necesaria aquí. Ampliamos este principio notacional a (η′) y (ζ′) infra.

y de aquí, por (τ), $X = Z$,

o sea, $$\mathfrak{X} \cong \mathfrak{Z}.$$

La regla (μ)* se infiere del modo siguiente. Supongamos

$$\mathfrak{X} \cong \mathfrak{Y}.$$

Entonces	$X = Y.$	
Por tanto,	$\mathsf{S}ZX = \mathsf{S}ZY$	por (μ),
	$[x]\,\mathfrak{Z}\mathfrak{X} = [x]\,\mathfrak{Z}\mathfrak{Y}$	por teor. A1(c),
	$\mathfrak{Z}\mathfrak{X} \cong \mathfrak{Z}\mathfrak{Y}$	por definición.

Por lo que hace a (K)*, tenemos por §B(6)

$$[x] \,.\, \mathsf{K}\,\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \Phi\,\mathsf{K}XY,$$
$$[x]\,\mathfrak{X} = X = \mathsf{K}XY.$$

De aquí podemos derivar (K)* partiendo de

(2) $$\Phi_2\,\mathsf{K} = \mathsf{K}.$$

Por lo que hace a (S)* tenemos por § B(6)

$$[x] \,.\, \mathsf{S}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z} = \Phi_3\,\mathsf{S}XYZ,$$
$$[x] \,.\, \mathfrak{X}\mathfrak{Z}\,(\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}) = \mathsf{S}(\mathsf{S}XZ)(\mathsf{S}YZ)$$
$$= \Phi_2\mathsf{S}(\mathsf{S}X)\,(\mathsf{S}Y)Z$$
$$= \Psi\,(\Phi_2\mathsf{S})\mathsf{S}XYZ.$$

Por tanto, es condición suficiente de (S)* que

(3) $$\Phi_3\mathsf{S} = \Psi\,(\Phi_2\mathsf{S})\mathsf{S}.$$

Por último, (ω)* queda establecido si tenemos para todo X

(4) $$[x]\,X = \mathsf{K}X.$$

Pues entonces $U_i \cong V_i$ se convierte en $\mathsf{K}U_i = \mathsf{K}V_i$, lo cual se sigue del axioma original por (μ). De todos modos, (4) no vale por definición (propiedad (a) del algoritmo de § A3) más que cuando X es un átomo; lo tendríamos también para un X cualquiera (por inducción estructural) si tuviéramos

(5) $$\mathsf{S}(\mathsf{K}x)\,(\mathsf{K}y) = \mathsf{K}\,(xy),$$

es decir, $$\Psi\mathsf{S}\mathsf{K}xy = \mathsf{B}\mathsf{K}xy.$$

Por tanto, para tener (4) basta con tener

(6) $$\Psi\mathsf{S}\mathsf{K} = \mathsf{B}\mathsf{K}.$$

Los tres axiomas (2), (3), (6) bastan para establecer (ξ).

2. Las reglas (η) y (η′)

Supongamos ahora que vale (4). De la definición de § A2, utilizando las reglas $(\mathsf{B})_2$ (§ B2), (S), (K), inferimos

$$[x]Xx = \mathsf{S}(\mathsf{K}X)\mathsf{I} = \mathsf{B}X\mathsf{I} = \mathsf{S}\mathsf{B}(\mathsf{K}\mathsf{I})X.$$

Si definimos

(7) $$\mathsf{I}_\eta \equiv \mathsf{S}\mathsf{B}\,(\mathsf{K}\mathsf{I}) \qquad (= \mathsf{C}\mathsf{B}\mathsf{I}),$$

tendremos

(8) $$[x]Xx = \mathsf{I}_\eta\, X.$$

El análogo del principio (η) para $\mathscr{H}$ es

(η) $$[x]Xx = X.$$

Por (8), esto equivale a decir que

(9) $$\mathsf{I}_\eta\, X = X$$

vale para todo X. Condición suficiente de esto es que

(10) $$\mathsf{I}_\eta = \mathsf{I}.$$

Así, pues, si (8) vale, (10) es suficiente para darnos (η); el cual, en combinación con (ξ), nos da (ζ) como en § 3D4.

Pero (η) no vale universalmente en el cálculo β. No obstante, vimos en § 3F que vale una forma restringida, (η′), de (η). La restricción consiste en exigir que el ob X sea de orden positivo. En nuestro presente

contexto el análogo de los obs de orden positivo es una clase de obs que definiremos ahora, llamada los obs O_1. Entonces el análogo de (η′) es el principio

(η′) $$\textit{Si } X \textit{ es un ob } O_1,\ [x] \,.\, Xx = X.$$

Si vale (8) y, por tanto, (4)), (η′) equivale a decir que (9) vale siempre que X es un ob O_1.

Por analogía con el cálculo β deberíamos exigir que los obs O_1 incluyan a todos los de la forma $[x]\,\mathfrak{X}$. Un vistazo a la definición de § A2 muestra que $[x]\mathfrak{X}$ es siempre de una de las formas KU o SUV (obsérvese que puesto que I es SKK, es también de la forma SUV). Sean obs O_1 todos los obs reducibles a una de las formas KU, SUV. Entonces los obs O_1 incluyen no sólo los de la forma $[x]\mathfrak{X}$, sino también los de la forma B^mUV $(m > 0)$, CUV, WU, etc.; también I_η y todo $I_\eta\, U$. Efectivamente, I_η es entonces un ob O_1 por (7); para los demás tenemos

$$BUV \geq S(KU)V, \qquad B^{m+1}UV \geq B(B^mU)V,$$

$$CUV \geq SU(KV), \qquad WU \geq SUI, \qquad I_\eta\, U \geq BUI, \text{ etc.}$$

Para que (9) valga para todos esos obs basta con postular

(11) $$I_\eta\,(KU) = KU,\ I_\eta\,(SUV) = SUV,$$

para todo U y todo V. Y esto, a su vez, se sigue de los axiomas [7a]

(12) $$BI_\eta\, K = K, \quad B^2I_\eta S = S.$$

Pero si postulamos (12), entonces (9) vale si X es K, S o cualquier SU. Efectivamente, K y S pueden ponerse en la forma B^mUV por (12); lo mismo puede decirse de SU, puesto que

$$SU = B^2I_\eta\, SU \geq BI_\eta\,(SU).$$

Todos esos obs son intuitivamente de orden positivo.

[7a] (Añadida en galeradas.) Si se postula I como combinador independiente (cfr. § 4, observación 3) necesitaremos añadir el

Ax. $[I_2]$. $$I_\eta\, I = I$$

y añadir también I como nueva forma básica en la definición 1. Nuestra argumentación sigue siendo válida, *mutatis mutandis*.

Adoptamos, consiguientemente, la

DEFINICIÓN 1. Un *ob* O_1 es un ob combinatorio reducible (por las reglas (S), (K)) a una de las cinco formas S, K, SU, KU, SUV. Un *ob* O_1 *básico* es un ob O_1 que es ya de una de esas cinco formas (la reducción tiene 0 pasos).

Con los obs O_1 así definidos hemos mostrado que (η') es una consecuencia de (8) y (12).

Si, además, tenemos (ξ), podemos deducir una forma debilitada de (ζ), a saber:

(ζ') *Si* X *e* Y *son obs* O_1 *y ninguno de los dos contiene* x, *entonces*

$$Xx = Yx \to X = Y.$$

Pues supongamos $Xx = Yx.$

Entonces $[x]Xx = [x]Yx$ por (ξ),

$X = Y$ por (η').

En caso de que valga (10) podemos decir que todo ob es un ob O_1, y entonces (η'), (ζ') se convierte en (η), (ζ').

3. CONSECUENCIAS DE (ζ')

Vamos a considerar ahora algunas propiedades que se tienen cuando se añade (ζ') a $\mathscr{H}_0$. Llamamos a una ecuación *aceptable*-β cuando es válida en el sistema así constituido; y *aceptable*-η cuando es derivable de $\mathscr{H}_0$ y (ζ). Desarrollaremos una técnica para verificar esa aceptabilidad. Resultará entonces que los axiomas (3), (6) y (12) son aceptable-β; por lo que hace a (2), mostraremos que podemos modificarlo de tal modo que resulte aceptable-β y siga siendo suficiente para dar (K)* [8].

Empezaremos por observar que (ξ), (η') y (8) son todos consecuencias de (ζ'). Efectivamente,

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} \to ([x]\,\mathfrak{X})\,x = ([x]\,\mathfrak{Y})x \qquad \text{por A(10)},$$

$$\to [x]\,\mathfrak{X} = [x]\,\mathfrak{Y} \qquad \text{por } (\zeta');$$

mientras que, puesto que $\mathsf{I}_\eta X$ es siempre un ob O_1 podemos inferir (η') por medio de (ζ') a partir de

$$\mathsf{I}_\eta Xx = Xx.$$

[8] Alterando la definición de ob O_1 podemos aplicar este mismo desarrollo a la aceptabilidad-η; pero eso tiene poco interés, puesto que está claro que todos los axiomas son aceptables-η.

Análogamente se sigue (8) de (ζ') y

$$\mathsf{I}_\eta Xx = ([x]\, Xx)x = Xx,$$

puesto que $[x]X$ e $\mathsf{I}_\eta X$ son siempre obs O_1.

Definiremos ahora un ob O_m como un ob combinatorio X tal que, para $x_1, \ldots, x_{m-1}$ no contenidas en X, $Xx_1 \ldots x_{m-1}$ es un ob O_1. Esto equivale a decir que hay un ob O_1 básico, $\mathfrak{X}_{m-1}$, tal que

$$Xx_1 \ldots x_{m-1} \geq \mathfrak{X}_{m-1}. \tag{13}$$

Esta definición se especializa en una definición de los obs O_1 si $m = 1$.

Los ejemplos siguientes son obs O_m:

$$\begin{aligned} Y &\equiv [x_1, \ldots, x_m]\, \mathfrak{Y}, \\ Z &\equiv \mathsf{B}^{m-1}\, \mathsf{I}_\eta\, X, \\ U &\equiv \mathsf{B}^m\, \mathsf{I} X. \end{aligned}$$

Tenemos, en efecto,

$$\begin{aligned} Yx_1 \ldots x_{m-1} &\geq [x_m]\, \mathfrak{Y}, \\ Zx_1 \ldots x_{m-1} &\geq \mathsf{I}_\eta\, (Xx_1 \ldots x_{m-1}), \\ Ux_1 \ldots x_{m-1} &\geq \mathsf{BI}\, (Xx_1 \ldots x_{m-1}); \end{aligned}$$

expresiones en las cuales las partes derechas son obs O_1, y reducibles, por tanto, a obs básicos.

Vamos a mostrar ahora que un ob O_m es también un ob O_k para todo $k < m$. Basta para esto con mostrar que un ob O_{k+1} es también un ob O_k. Supongamos, en efecto, que (13) vale para $m = k + 1$, siendo $\mathfrak{X}_k$ un ob O_1 básico. Llevemos a cabo cuanto sea posible la reducción (13) por medio de reducciones de $Xx_1 \ldots x_{k-1}$, y sea $\mathfrak{X}_{k-1}\, x_k$ el término de la reducción parcial. Esto define a $\mathfrak{X}_{k-1}$ de tal modo que (13) vale para $m = k$. Además, o bien $\mathfrak{X}_{k-1}\, x_k \equiv \mathfrak{X}_k$, o bien el paso siguiente es una contracción de $\mathfrak{X}_{k-1} x_k$ tomado en su conjunto. En el primer caso, $\mathfrak{X}_{k-1}$ es una de las formas S, K, SU; en el segundo caso, tiene que ser de la forma KU o SUV; en cualquiera de los dos casos es un ob O_1 básico, y X es, por tanto, un ob O_k.

Establecido esto, tenemos la siguiente generalización de (ζ'): *Si X e Y son obs O_m y ninguno de los dos contiene ninguna de las $x_1, \ldots x_m$, entonces*

$$Xx_1 \ldots x_m = Yx_1 \ldots x_m \to X = Y.$$

Esto se sigue por inducción sobre m y por (ζ').

Por esta generalización de (ζ′) tenemos

$$[x_1, \ldots, x_m]\, Xx_1 \ldots x_m = \mathsf{B}^{m-1}\mathsf{I}_\eta\, X = \mathsf{B}^m\mathsf{I}X. \tag{14}$$

Además, si X mismo es un ob O_m,

$$[x_1, \ldots, x_m]\, Xx_1 \ldots x_m = X. \tag{15}$$

Y en particular,

$$[x, y]\, \mathsf{K}xy = \mathsf{K};\ [x, y, z]\, \mathsf{S}xyz = \mathsf{S}. \tag{16}$$

En este caso, (16) pueden tomarse como axiomas en vez de (12), pues puede mostrarse que, dado (8), (η′) es deducible de ellos.

Por medio del (ζ′) generalizado podemos verificar que los axiomas (3), (6) y (12) son aceptables-β. Por lo que hace a (2), $\Phi_2\mathsf{K}$ (= BS(BK)) es un ob O_3, mientras que K es un ob O_2. No obstante, contando con (η′) y con (8) podemos analizar del modo siguiente la parte derecha de (K)*:

$$[x]\, \mathfrak{X} = X = \mathsf{I}_\eta\, X = \mathsf{K}(\mathsf{I}_\eta X)Y = \mathsf{BKI}_\eta XY.$$

De ahí, dado (η′), podemos deducir (K)* a partir de

$$\Phi_2\mathsf{K} = \mathsf{BKI}_\eta. \tag{17}$$

Aquí las dos partes son obs O_3, y (17) es β-aceptable.

Podemos resumir esta discusión del modo siguiente: los axiomas (17), (3), (6) y (12) (o (16)) son todos aceptables-β. Dado (6), podemos derivar (4) y, por tanto, (8); entonces podemos deducir (η′) a partir de (12); y entonces (17), (3) y (6) bastan para dar (ξ), y, por tanto, (ζ′). Por otro lado, a partir de (17) (o (2)), (3), (6) y (10) tenemos (ξ) y (η), y, por tanto, (ζ).

4. Los sistemas $\mathscr{H}_\eta$ y $\mathscr{H}_\beta$

De acuerdo con lo anterior elegimos como axiomas (ω_η) el conjunto

Ax. [K].	$\Phi_2\mathsf{K} = \mathsf{BK}(\mathsf{SB}(\mathsf{KI}))$.
Ax. [S].	$\Phi_3\mathsf{S} = \Psi\,(\Phi_2\mathsf{S})\mathsf{S}$.
Ax. [SK].	$\Psi\mathsf{SK} = \mathsf{BK}$.
Ax. [I_1].	$\mathsf{SB}(\mathsf{KI}) = \mathsf{I}$.

El conjunto (ω_β) se obtiene a partir de (ω_η) eliminando Ax. $[I_1]$ y añadiendo lo siguiente:

Ax. [KI]. $\quad B(SB(KI))K = K.$
Ax. [SI]. $\quad B^2(SB(KI))S = S.$

Definimos el sistema $\mathscr{H}_\eta$ $(\mathscr{H}_\beta)$ como el formado añadiendo a $\mathscr{H}_0$ los axiomas (ω) con el subíndice correspondiente en cada caso.

Ahora podemos resumir la discusión en el siguiente teorema:

TEOREMA 1. *El postulado* (ξ) *y todos los postulados de* $\mathscr{H}_0$ *son válidos tanto en* $\mathscr{H}_\beta$ *cuanto en* $\mathscr{H}_\eta$; (η) *y* (ζ) *son válidos en* $\mathscr{H}_\eta$, *mientras que* (η') *y* (ζ') *son válidos en* $\mathscr{H}_\beta$. *Condición necesaria y suficiente de que una ecuación*

$$X = Y$$

sea válida en $\mathscr{H}_\beta$ $(\mathscr{H}_\eta)$ *es que sea aceptable* —β *aceptable*$(\eta$-$)$.

Demostración. La validez de los postulados indicados en la primera parte, y, por tanto, la suficiencia de la condición de aceptabilidad, se mostró al final del § 3. El método para mostrar que los axiomas (ω) son aceptables se esbozó en § 3. Como los demás axiomas y reglas son válidos en $\mathscr{H}_0$, la necesidad de la condición de aceptabilidad se sigue por inducción deductiva.

OBSERVACIÓN 1. El sentido de los cuatro primeros axiomas queda explícito si recordamos que de ellos obtenemos, respectivamente, los siguientes principios:

$$\begin{aligned}
(K)^* \qquad & [x] \,.\, K\,\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y} = [x]\,\mathfrak{X}, \\
(S)^* \qquad & [x] \,.\, S\,\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\mathfrak{Z} = [x]\,\mathfrak{X}\mathfrak{Z}\,(\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}), \\
(4) \qquad & [x]X = KX, \\
(\eta) \qquad & [x]Xx = X.
\end{aligned}$$

De hecho, los axiomas son respectivamente equivalentes a esos principios, y son un modo de expresarlos en el lenguaje de los combinadores.

Los mismos principios pueden expresarse de otro modo mediante los axiomas:

$$\begin{aligned}
[x, y, z] \,.\, K(xz)\,(yz) &= [x, y, z] \,.\, xz. \\
[x, y, z, u] \,.\, S(xu)\,(yu)\,(zu) &= [x, y, z] \,.\, xu\,(zu)\,(yu(zu)). \\
(18) \qquad [x, y] \,.\, S(Kx)\,(Ky) &= [x, y] \,.\, K\,(xy) \\
[x, y] \,.\, xy &= [x] \,.\, x.
\end{aligned}$$

Estos últimos, junto con (16), son los axiomas de Rosser [DEL]. Tienen

la ventaja de que el sentido de cada axioma es más transparente para cualquier lector que se acerque a la lógica combinatoria desde el punto de vista del cálculo λ. Para usarlos necesitaríamos algunos teoremas de los más sencillos que demostramos más adelante (§§ D-E). Cuando se expresan directamente en términos de combinadores simples por medio de un algoritmo (§ A3) sin cláusula (c) son más complejos que los que hemos usado aquí.

Por otro lado, nuestros axiomas no representan tampoco el grado último de simplicidad formal. Rosenbloom da un conjunto de cuatro axiomas para $\mathscr{H}_\eta$, que consiste en $[I_1]$ y axiomas que expresan los mismos principios que [K], [S] y [SK]. Estos últimos son más sencillos porque no usan explícitamente ni Φ ni Ψ. Su forma de [SK] es

$$\mathsf{SB^2(KK) = BK},$$

de lo que se siguen fácilmente (5) y, por tanto, (4); en vez de (2) escribe

$$\mathsf{BS(BK) = K}.$$

Pero el uso de Φ y Ψ tiene la ventaja de que estos combinadores tienen una significación bastante sencilla, y su uso hace a los axiomas más sistemáticos.

Presentamos como curiosidad una forma de Ax. [K] que no necesita definición alguna:

$$\mathsf{S(KS)\,(S(KK)) = S(KK)\,(S(S(KS)K)(K(SKK)))}.$$

Observación 2. Aunque la cláusula (c) del algoritmo de § A3 no es válida en general para $\mathscr{H}_\beta$, puede usarse, sin embargo, en las valoraciones de $[x]\ \mathfrak{Y}$ [9] en los casos siguientes: 1) cuando $\mathfrak{Y} \equiv Xx$ y X es igual a un ob O_1; 2) cuando Xx es un componente propio de $\mathfrak{Y}$. El primero de esos casos está claro por (ζ′). Para establecer el segundo caso convengamos en que el acento denota abstracciones formadas mediante el uso de (c) con las restricciones de este segundo caso. Entonces.

$$Yx = Y'x = \mathfrak{Y}.$$

---

[9] Esta «valoración» consiste en encontrar un X tal que

$$X = [x]\ \mathfrak{Y},$$

no en encontrar

$$Y = [x]\ \mathfrak{Y}.$$

Si $\mathfrak{Y}$ es primitivo, $Y' \equiv Y$. Si $\mathfrak{Y}$ es compuesto, Y e Y' son ambos obs O_1, y, por tanto, por (3'),

$$Y = Y' \text{ q. e. d.}$$

OBSERVACIÓN 3. Para algunos fines es conveniente tomar I como combinador primitivo y postular para él la regla (I) como regla primitiva. Entonces la presente definición de I puede derivarse del axioma.

Ax. $[I_0]$ $\qquad\qquad$ $SK = KI.$

Veremos más tarde que este procedimiento simplifica grandemente la tarea de § F. El hecho de que en el capítulo **7** necesitemos reglas especiales para I, y de que el esquema axiomático de I desempeñe un papel especial en el capítulo **10** son otros argumentos más en favor de aquel procedimiento. Evidentemente, el procedimiento en cuestión no impone ningún cambio esencial en lo que precede.

D. TEORIA DEL PREFIJO DE SUSTITUCION

Para poner el sistema $\mathscr{H}$ en relación con el cálculo λ será necesario desarrollar la teoría de los prefijos de sustitución. La teoría es mucho más sencilla aquí que en § **3**E, a causa de la ausencia de variables. Teniendo en cuenta la equivalencia —que se demostrará en §E— entre la teoría de la conversión λ y la teoría sintética, la teoría de los prefijos de sustitución que vamos a desarrollar aquí puede sustituir a la anterior.

La teoría se desarrolla respecto de una extensión de los obs del sistema $\mathscr{H}$, extensión que contiene indeterminadas como variables formales. Se define entonces la sustitución de una indeterminada por un ob. La definición, caso especial de la de los §§ **2**C2 y **2**E5, es como sigue:

(γ_1) *Si a es un átomo distinto de x,* $[\mathfrak{M}/x]\ a \equiv a.$
(γ_2) $[\mathfrak{M}/x]\ x \equiv \mathfrak{M}.$
(γ_3) $[\mathfrak{M}/x]\ \mathfrak{Y}\mathfrak{Z} \equiv ([\mathfrak{M}/x]\ \mathfrak{Y})\ ([\mathfrak{M}/x]\ \mathfrak{Z}).$

Vamos a desarrollar ahora algunas de las propiedades de esa sustitución. En las demostraciones de los teoremas nos hemos dado el trabajo de mostrar, en unos cuantos casos, cómo puede dejar de cumplirse el teorema si se omiten algunas hipótesis. Esto da una base razonable para formular las leyes que permiten evitar la confusión entre las variables ligadas.

En las demostraciones de los teoremas usaremos, con objeto de abreviar, el siguiente esquema: Supongamos que deseamos derivar una ecuación entre dos obs construidos a partir de un $\mathfrak{X}$ cualquiera. Llamaremos $\mathfrak{X}^R$ a la parte izquierda de la ecuación, y $\mathfrak{X}^D$ a la parte derecha. Aquí '$\mathfrak{X}$' es una variable intuitiva. Usaremos letras góticas para indicar obs que pueden contener x, y; y letras latinas para indicar obs que no contienen x o y.

Nuestros teoremas contienen dos clases de igualdad, $\equiv$ y $=$. Aquí $\equiv$ es la equivalencia monótona producida por las definiciones ((γ) y § A3 (fab)); $=$ es el predicado de $\mathscr{H}_\beta$, o $\mathscr{H}_\eta$. Pero los teoremas demostrados para $\equiv$ son también verdaderos para $=$; y excepto en el caso del teorema 2, los teoremas demostrados para $=$ pueden también demostrarse para $\equiv$ eliminando toda referencia a (ω), (K) o (S).

TEOREMA 1. *La definición* (γ) *define un ob único* $[\mathfrak{M}/x]\ \mathfrak{X}$ *para cualesquiera obs dados* $\mathfrak{M}$ *y* $\mathfrak{X}$. *Además, valen las propiedades siguientes:*

(a) *Si x no es un componente de X,* $[\mathfrak{M}/x]\ X \equiv X$;

(b) $[x/x]\ \mathfrak{X} \equiv \mathfrak{X}$;

(c) $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} \to [\mathfrak{M}/x]\ \mathfrak{X} = [\mathfrak{M}/x]\ \mathfrak{Y}$;

(d) $\mathfrak{X} \geq \mathfrak{Y} \to [\mathfrak{M}/x]\ \mathfrak{X} \geq [\mathfrak{M}/x]\ \mathfrak{Y}$.

Demostración. La univocidad de la definición es un caso especial del teorema 2E5.

La propiedad (a) se sigue por inducción estructural: si X es primitiva, entonces, puesto que es imposible el caso (γ_2) de la definición, tenemos necesariamente (γ_1), y en este caso (a) se sigue por definición. Si $X \equiv YZ$ y (a) vale para Y y para Z, entonces, por (γ_3),

$$X^L = Y^L Z^L = YZ = X.$$

La propiedad (b) se sigue de un modo análogo por inducción estructural.

La propiedad (c) es una consecuencia del teorema 2E7. Interpretamos las variables intuitivas de ese teorema del modo siguiente: φ ($\mathfrak{X}$) por $[\mathfrak{M}/x]\ \mathfrak{X}$; $\boldsymbol{R}$ por $=$; $\boldsymbol{R}_0$ por la relación entre los dos lados (en cualquier orden) de cualquier caso especial de (ρ), (ω), (S), (K); ω es la aplicación y χ es la operación tal que

$$\chi(x, y, x', y') = x'\,y'.$$

Entonces $\boldsymbol{R}$ es la equivalencia monótona producida por $\boldsymbol{R}_0$ y, por

tanto, por el teorema 2D2, la cuasi-ordenadora monótona producida por $\boldsymbol{R}_0$. La demostración de (c) se reduce, consiguientemente, a la dada en § 2E(12), es decir, al caso especial de (c) en el cual la premisa $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$ es un caso de (ρ), (ω), (S), (K) o sus recíprocas.

Para recoger este caso especial introducimos la abreviación

$$\mathfrak{X}' \equiv [\mathfrak{M}/x]\,\mathfrak{X}, \qquad \mathfrak{Y}' \equiv [\mathfrak{M}/x]\,\mathfrak{Y}, \text{ etc.}$$

Entonces, si la premisa es un caso de (ρ), la conclusión es de la forma $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X}'$, que es otro caso de (ρ). Si la premisa es un caso de ω, entonces ninguno de los dos lados contiene a x, y la conclusión es idéntica a la premisa por el teorema 1a. Si la premisa es un caso de (S) o (K), la conclusión, por (γ_3) y (γ_1), es otro caso de la misma regla; así, si la premisa es

$$\mathsf{S}\,\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z} = \mathfrak{X}\,\mathfrak{Z}\,(\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}),$$

la conclusión es

$$\mathsf{S}\,\mathfrak{X}'\,\mathfrak{Y}'\,\mathfrak{Z}' = \mathfrak{X}'\,\mathfrak{Z}'\,(\mathfrak{Y}'\,\mathfrak{Z}').$$

Tampoco tiene dificultad el caso en el cual se presente el recíproco de uno de esos esquemas.

La demostración de (d) es análoga; tomamos simplemente $\geq$ por $\boldsymbol{R}_0$ y nos desentendemos de (ω).

TEOREMA 2. *Para todo* $\mathfrak{X}$ *y todo* $\mathfrak{M}$,

$$([x]\,\mathfrak{X})\,\mathfrak{M} \geq [\mathfrak{M}/x]\,\mathfrak{X}. \tag{1}$$

Demostración. Por § A(10)

$$([x]\,\mathfrak{X})\,x \geq \mathfrak{X}. \tag{2}$$

Ahora bien, por (γ_3), teorema 1a y (γ_2),

$$[\mathfrak{M}/x] \cdot ([x]\,\mathfrak{X})\,x \equiv ([x]\,\mathfrak{X})\,\mathfrak{M}.$$

Por tanto, (2) se sigue de (1) y del teorema 1d, q. e. d.

TEOREMA 3. *Si* y *no se presenta en* $\mathfrak{X}$,

$$[y]\,[y/x]\,\mathfrak{X} \equiv [x]\,\mathfrak{X}. \tag{3}$$

Demostración por inducción estructural:

(a) Sea $\mathfrak{X}$ un átomo distinto de x o y; entonces

$$\mathfrak{X}^L \equiv [y]\,\mathfrak{X} \equiv \mathsf{K}\,\mathfrak{X} \equiv \mathfrak{X}^R.$$

(b) Sea $\mathfrak{X} \equiv x$, entonces

$$\mathfrak{X}^L \equiv [y]\,y \equiv \mathsf{I} \equiv \mathfrak{X}^R.$$

(c) Sea $\mathfrak{X} \equiv y$, entonces

$$\mathfrak{X}^L \equiv [y]\,y \equiv \mathsf{I}, \qquad \mathfrak{X}^R \equiv \mathsf{K}y.$$

La ecuación (3) resulta entonces falsa. Por esta razón hemos excluido el caso en el cual $\mathfrak{X}$ contiene a y.

(d) Sea $\mathfrak{X} \equiv \mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}$, y supongamos que el teorema es verdadero para $\mathfrak{Y}$ y $\mathfrak{Z}$. Entonces.

$\mathfrak{X}^L \equiv [y] \cdot ([y/x]\,\mathfrak{Y})\,([y/x]\,\mathfrak{Z})$	por (γ_3) y § 2E1,
$\equiv \mathsf{S}\,\mathfrak{Y}^L\mathfrak{Z}^L$	por teor. A1,
$\equiv \mathsf{S}\,\mathfrak{Y}^R\mathfrak{Z}^R$	por hip. induct.,
$\equiv \mathfrak{X}^D$	por teor. A1.

Esto completa la demostración.

TEOREMA 4. *Si z no se presenta en $[y]\ \mathfrak{X}$[10], y si, además, z no se presenta en $\mathfrak{M}$ cuando x se presenta en $\mathfrak{X}$, entonces*

$$[\mathfrak{M}/x]\,[y]\,\mathfrak{X} = [z]\,[\mathfrak{M}/x]\,[z/y]\,\mathfrak{X}.$$

Demostración. Demostramos primero, como lema, que si y no se presenta en $\mathfrak{M}$ o x no se presenta en $\mathfrak{X}$, entonces

$$[\mathfrak{M}/x]\,[y]\,\mathfrak{X} = [y]\,[\mathfrak{M}/x]\,\mathfrak{X}. \tag{4}$$

En la teoría de la conversión λ, si el prefijo lambda se identifica con $[x]$, (4) es una parte de la definición, porque la lambda prefijada es un operador primitivo. Pero aquí es una aserción derivable que hay que demostrar por inducción estructural.

---

[10] Obsérvese que z se presenta en $[y]\mathfrak{X}$ si y sólo si se presenta en $\mathfrak{X}$ y es distinto de y. Esto es una consecuencia del teorema A1.

a) Sea $\mathfrak{X}$ un ob primitivo a distinto de x y de y. Entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^L &\equiv [\mathfrak{M}/x]\,\mathsf{K}a \equiv \mathsf{K}a, \\ \mathfrak{X}^R &\equiv [y]\,a \equiv \mathsf{K}a \equiv \mathfrak{X}^L. \end{aligned}$$

b) Sea $\mathfrak{X} \equiv x$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^L &\equiv [\mathfrak{M}/x]\,\mathsf{K}x \equiv \mathsf{K}\,\mathfrak{M}, \\ \mathfrak{X}^R &\equiv [y]\,\mathfrak{M}. \end{aligned}$$

Por tanto, (4) es verdadero en este caso si

$$[y]\,\mathfrak{M} = \mathsf{K}\mathfrak{M}.$$

Y esto es verdad (cfr. la derivación de § C(4)) si $\mathfrak{M}$ no contiene a y. Así, pues, necesitamos precisamente la restricción hecha en la teoría de la conversión λ.

c) Sea $\mathfrak{X} \equiv y$. Entonces

$$\begin{aligned} X^L &\equiv [\mathfrak{M}/x]\,\mathsf{I} \equiv \mathsf{I}. \\ \mathfrak{X}^R &\equiv [y]\,y \equiv \mathsf{I}. \end{aligned}$$

d) Sea $\mathfrak{X} \equiv \mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ y supongamos que (4) es verdadero para $\mathfrak{Y}$ y $\mathfrak{Z}$. Por hipótesis, o bien y no se presenta en $\mathfrak{M}$, o bien x no se presenta ni en $\mathfrak{Y}$ ni en $\mathfrak{Z}$. Entonces, por § A3 (f), (γ_3), y la hipétesis inductiva,

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^L &\equiv [\mathfrak{M}/x]\,.\,\mathsf{S}\,([y]\,\mathfrak{Y})([y]\,\mathfrak{Z}) \\ &\equiv \mathsf{S}\mathfrak{Y}^L\,\mathfrak{Z}^L \equiv \mathsf{S}\,\mathfrak{Y}^R\,\mathfrak{Z}^R \\ &\equiv [y]\,([\mathfrak{M}/x]\,\mathfrak{Y})\,([\mathfrak{M}/x]\,\mathfrak{Z}) \\ &\equiv \mathfrak{X}^R. \end{aligned}$$

Procedamos ahora a demostrar el teorema. Para un z que satisfaga la hipótesis, tenemos, por el teorema 3.

$$[y]\,\mathfrak{X} \equiv [z]\,[z/y]\,\mathfrak{X}.$$

De aquí, por (4),

$$\begin{aligned} [\mathfrak{M}/x]\,[y]\,\mathfrak{X} &\equiv [\mathfrak{M}/x]\,[z]\,[z/y]\,\mathfrak{X} \\ &\equiv [z]\,[\mathfrak{M}/x]\,[z/y]\,\mathfrak{X}. \end{aligned}$$

COROLARIO. 4.1. *Si y no se presenta en $\mathfrak{M}$,*

$$[\mathfrak{M}/x]\,[y]\,\mathfrak{X} \equiv [y]\,[\mathfrak{M}/x]\,\mathfrak{X}.$$

TEOREMA 5. *Si x e y son distintos, e y no se presenta en $\mathfrak{M}$ o x no se presenta en $\mathfrak{X}$, entonces*

$$[\mathfrak{M}/x]\,[\mathfrak{N}/y]\,\mathfrak{X} \equiv [\mathfrak{N}'/y]\,[\mathfrak{M}/x]\,\mathfrak{X},$$

con $\mathfrak{N}' \equiv [\mathfrak{M}/x]\,\mathfrak{N}$.

Demostración por inducción estructural:

a) Sea $\mathfrak{X} \equiv a$, siendo a un átomo distinto de x o y. Entonces

$$\mathfrak{X}^L \equiv a \equiv \mathfrak{X}^R.$$

b) Sea $\mathfrak{X} \equiv x$. Entonces y no se presenta en $\mathfrak{M}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^L &\equiv [\mathfrak{M}/x]\,x \equiv \mathfrak{M}, \\ \mathfrak{X}^R &\equiv [\mathfrak{N}'/y]\,\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{X}^R. \end{aligned}$$

c) Sea $\mathfrak{X} \equiv y$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^L &\equiv [\mathfrak{M}/x]\,\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}' \\ \mathfrak{X}^R &\equiv [\mathfrak{N}'/y]\,y \equiv \mathfrak{N}' \equiv \mathfrak{X}^L. \end{aligned}$$

d). Sea $\mathfrak{X} \equiv \mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ y supongamos que el teorema vale para $\mathfrak{Y}$ y $\mathfrak{Z}$. Entonces, por (γ_3) y la hipótesis inductiva,

$$\mathfrak{X}^L \equiv \mathfrak{Y}^L\,\mathfrak{Z}^L = \mathfrak{Y}^R\,\mathfrak{Z}^R = \mathfrak{X}^R. \tag{5}$$

TEOREMA 6. *Si* $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$, *entonces*

$$[\mathfrak{M}/x]\,\mathfrak{X} = [\mathfrak{N}/x]\,\mathfrak{X}.$$

Demostración. Procedemos por inducción estructural como antes.

a) $\mathfrak{X}$ es un átomo a distinto de x. Entonces

$$\mathfrak{X}^L = a = \mathfrak{X}^R.$$

b) $\mathfrak{X} \equiv x$. Entonces

$$\mathfrak{X}^L \equiv \mathfrak{M} = \mathfrak{N} \equiv \mathfrak{X}^R.$$

c) $\mathfrak{X} \equiv \mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}$ y el teorema vale para $\mathfrak{Y}$ y $\mathfrak{Z}$. Entonces (5) vale como en el teorema 5.

E. EQUIVALENCIA DE $\mathscr{H}$ Y CONVERSION LAMBDA

Vamos a establecer aquí una equivalencia entre los sistemas $\mathscr{H}$ y las correspondientes teorías de conversión λ. Llamaremos a estas últimas teorías $\mathscr{L}$. El resultado principal es el teorema 3. Este teorema podría demostrarse directamente; pero hemos preferido derivarlo del isomorfismo de los dos sistemas $\mathscr{J}$ y $\mathscr{M}$ que son extensiones definicionales (§ 2E1) de $\mathscr{H}$ y $\mathscr{L}$, respectivamente. Este procedimiento promete ser útil en otros contextos.

1. Preliminares

Vamos a formular cuatro tipos de sistemas, $\mathscr{H}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$. Cada uno de ellos puede tomarse en forma β o en forma η, que habrá que indicar mediante el subíndice adecuado a cada caso. Supondremos que estamos trabajando con una de esas formas sin especificar siempre de cuál se trata; por eso resultará correcto hablar, en general, del sistema $\mathscr{H}$, del sistema $\mathscr{L}$, etc. Nuestra discusión se aplica a todas las formas, excepto en los casos en que se indica explícitamente lo contrario.

El sistema $\mathscr{H}$ será el formulado en § C4, entendiéndose que $\mathscr{H}$ contiene tantas indeterminadas cuantas hagan falta para el contexto. El sistema $\mathscr{L}$ es el formulado en el capítulo **3**. Los sistemas $\mathscr{J}$, $\mathscr{M}$ son extensiones deficionales (§ **2E**) de $\mathscr{H}$ y $\mathscr{L}$, respectivamente. Para formar $\mathscr{J}$ añadimos a $\mathscr{H}$ una operación de abstracción funcional, con un algoritmo del § 3 como conjunto de axiomas definidores; para formar $\mathscr{M}$ añadimos a $\mathscr{L}$ las primitivas K y S, con los axiomas definidores

$$(1) \qquad \mathsf{K} = \lambda xy.x, \qquad\qquad \mathsf{S} = \lambda xyz.xz(yz).$$

Será conveniente usar la misma notación para obs, operaciones, predicados, etc., correspondientes de dos o más sistemas diferentes. Así, por ejemplo, usamos la notación λ de la abstracción funcional para todos los casos (a saber, $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$, $\mathscr{J}$) en los que se postula explícitamente como operación primitiva; mientras que $[x]\ \mathfrak{X}$ es siempre el ob de $\mathscr{H}$ construido a partir de K, S, y las constantes primitivas de $\mathfrak{X}$, según las especificaciones de § A. Análogamente usamos 'K', 'S' en todos los casos (a saber, $\mathscr{H}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{M}$) en los que K y S son obs primitivos, mientras que los obs-λ del lado derecho de (1) se llamarán 'K_λ' y 'S_λ', respectivamente. Algunos rasgos serán comunes a todos los sistemas; los formulamos bajo el rótulo de sistema $\mathscr{O}$.

Para evitar ambigüedad usamos algunas veces los subíndices 'H', 'J', 'L', 'M' con el fin de indicar que la noción simbolizada por la expresión afectada por dichos subíndices es relativa, respectivamente, al sistema $\mathscr{H}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$. Así, por ejemplo, $(\xi)_L$, es un postulado de $\mathscr{L}$; mientras que $(\xi)_H$ es la forma de (ξ) que se estableció como epiteorema de $\mathscr{H}$ en § C. Usaremos algunas veces 'cnv' para indicar '$=_L$'. Usaremos, además, variables U del modo siguiente:

obs- $\mathscr{H}$: X, Y, Z, U, V;
obs- $\mathscr{L}$: A, B, C, D, E;
sin especificar: L, M, N, P, Q.

Las formas góticas de esas letras se usarán en algunos contextos para indicar obs que pueden contener alguna(s) variable(s) específica(s) —generalmente— mientras que en el mismo contexto las letras latinas denotarán «constantes», es decir, obs sin la(s) variable(s) dicha(s).

Convenido esto, las especificaciones concretas de los varios sistemas son las siguientes:

$\mathscr{O}$. (Rasgos comunes a todos los sistemas.)

Atomos: variables.
Operación: aplicación.
Predicados: $=$.
Postulados: (ρ), (σ), (τ), (μ).

$\mathscr{H}$. (Teoría de combinadores.) Se añade a $\mathscr{O}$:

Atomos: K, S.
Postulados: (K), (S), (ω).

$\mathscr{L}$. (Teoría de la conversión λ.) Se añade a $\mathscr{O}$:

Operación: λx (x es cualquier variable).
Postulados: (ν) [11], (ξ), (α), (β); en el caso η, también (η).

$\mathscr{J}$. Se añade a $\mathscr{H}$:

Operaciones: λx (x es cualquier variable).
Postulados: (ξ) y los análogos de las cláusulas relevantes del algoritmo de § A3, del modo siguiente:

---

[11] Como AB cnv $(\lambda xy.yx)BA$, el postulado (ν) es redundante en $\mathscr{L}$. No volverá a mencionarse.

(2a) $\lambda x.X = \mathsf{K}X$,
(2b) $\lambda x.x = \mathsf{I}\ (\equiv \mathsf{SKK})$,
(2c) $\lambda x.Xx = X$,
(2f) $\lambda x.\ \mathfrak{Y}\mathfrak{Z} = \mathsf{S}(\lambda x.\mathfrak{Y})\ (\lambda x\ .\ \mathfrak{Z})$,

entendiéndose que X, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, con $\mathscr{H}$-obs, que X no contiene x, y que se mantienen las demás restricciones puestas al algoritmo relevante de § A3. En particular, (2c) vale sin restricción sólo en el caso η.

$\mathscr{M}$. Se añade a $\mathscr{L}$:

Atomos: K, S.
Postulados: (1).

Se sigue de esa presentación que los obs de $\mathscr{J}$ y $\mathscr{M}$ son los mismos y comprenden todos los obs de $\mathscr{H}$ y de $\mathscr{L}$ [12]. Llamamos «$\mathscr{J}$-$\mathscr{M}$-obs» a los de $\mathscr{J}$ y $\mathscr{M}$.

Ahora definimos dos transformaciones, llamadas la *H-transformación* y la λ-*transformación*, las cuales asocian a cada ob-$\mathscr{J}$-$\mathscr{M}$ M un ob-$\mathscr{H}$ M_H o un ob-λ M_λ respectivamente. Las dos transformaciones se definen por las convenciones siguientes, que deben entenderse como algoritmos [13]:

Transfornaciôm-H:

(3a) $(MN)_H \equiv M_H N_H$,
(3b) $(\lambda x.\ M)_H \equiv [x]M_H$,
(3c) $M_H \equiv M$.

transformación-λ:

(4a) $(MN)_\lambda \equiv M_\lambda N_\lambda$,
(4b) $(\lambda x.\mathfrak{M})_\lambda \equiv \lambda x.\mathfrak{M}_\lambda$,
(4c) $\mathsf{K}_\lambda \equiv \lambda xy.x$,
(4d) $\mathsf{S}_\lambda \equiv \lambda xyz.xz(yz)$,
(4e) $M_\lambda \equiv M$.

---

[12] Dicho más meticulosamente: si establecemos una correspondencia entre los J-obs y los M-obs haciendo que se correspondan obs del mismo nombre, entonces los obs de cualquiera de los dos sistemas forman una representación de los del otro; y los de $\mathscr{J}$ que corresponden a los $\mathscr{H}$ forman una representación de $\mathscr{H}$, etc.

[13] Esto quiere decir que hay que aplicar siempre la primera convención de cada lista que sea aplicable, procediendo de izquierda a derecha hasta que hayan desaparecido todas las instancias del sufijo 'H' o 'λ'. Así, por ejemplo, (3c) no es aplicable más que cuando M es un átomo, y (4e) es aplicable sólo cuando M es un átomo distinto de K y S.

OBSERVACIÓN 1. Si admitimos I como combinador primitivo, según se sugirió en § C4, observación 3, entonces tenemos que añadir a las especificaciones de la transformación-λ el siguiente caso:

$$\mathsf{I}_\lambda \equiv \lambda x.\, x. \tag{4f}$$

con precedencia algorítmica sobre (4e).

OBSERVACIÓN 2. La definición de una transformación supone una generalización de la teoría de § 2E, en el sentido de que estamos definiendo una operación de un sistema a otro, y no dentro de un sistema. No procederemos en detalle a la formulación de tales generalizaciones.

2. LAS PROPIEDADES DE $\mathscr{J}$ Y $\mathscr{M}$

Vamos a establecer aquí una equivalencia entre los sistemas $\mathscr{J}$ y $\mathscr{H}$, por una parte, y los sistemas $\mathscr{M}$ y $\mathscr{L}$, por otra, del modo siguiente:

TEOREMA 1. *Condición necesaria y suficiente de que*

$$M =_J N \qquad M =_M N \tag{5}$$

es que

$$M_H =_H N_H \qquad M_\lambda =_L N_\lambda; \tag{6}$$

además,

$$M =_J M_H \qquad M =_M M_\lambda. \tag{7}$$

Demostración. Empezaremos por observar que M_H es el definiens último de M si consideramos $\mathscr{J}$ como una extensión definicional de $\mathscr{H}$ con (2) como axiomas definidores de la nueva operación λ; análogamente, M_λ es el definiens último de M si $\mathscr{M}$ es una extensión definicional de $\mathscr{L}$ con (1) como axiomas definidores de K y S. Por tanto, (7) es una consecuencia de la teoría de la definición (§ 2E).

Luego vamos a derivar un resultado referente al prefijo de sustitución. Si consideramos $\mathscr{J}$ ($\mathscr{M}$) como la extensión definicional de $\mathscr{H}$ ($\mathscr{L}$) respecto de λ (K y S), entonces $[\mathfrak{N}/x]\,\mathfrak{M}$ está definido sólo para obs básicos del sistema original. Pero ahora vamos a extender la definición a obs-$\mathscr{J}$-$\mathscr{M}$ cualesquiera y a estudiar la relación creada entre la definición así ampliada y la original. La situación se describe en el siguiente

lema [14], cuya demostración no requiere de § 3E más que la parte (b) del teorema 3 E1.

LEMA 1. *Sea* $[\mathfrak{N}/x]\mathfrak{M}$ *definido para todo* ob-$\mathscr{J}$-$\mathscr{M}$ *por el procedimiento de añadir a la definición* 3E1 *el siguiente caso adicional:*

Caso 1c. *Si* $\mathfrak{M}$ *es* K *o* S, $[\mathfrak{N}/x]\ \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}$.

Entonces

$$(8) \qquad \begin{aligned} ([\mathfrak{N}/x]\ \mathfrak{M})_H &\equiv [\mathfrak{N}_H/x]\ \mathfrak{M}_H; \\ ([\mathfrak{N}/x]\mathfrak{M})_\lambda &\equiv [\mathfrak{N}_\lambda/x]\ \mathfrak{M}_\lambda. \end{aligned}$$

Demostración del lema 1. Está claro que las partes (a) y (b) del teorema 3E1 pueden ampliarse a las nuevas definiciones; también la noción de nivel definida en § 3E3. Llamaremos a las partes izquierda y derecha de la ecuación que hay que establecer, respectivamente, $\mathfrak{M}^L$ y $\mathfrak{M}^R$, y dividiremos el problema en casos del modo siguiente:

Caso 1a. $\mathfrak{M} \equiv x$. Entonces $\mathfrak{M}^L \equiv \mathfrak{N}_H \equiv \mathfrak{M}^R$.

Caso 1b. $\mathfrak{M} \equiv y \neq x$. Entonces $\mathfrak{M}^L \equiv \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}^R$.

Caso 1c. $\mathfrak{M} \equiv$ K o S. Entonces $\mathfrak{M}^L \equiv \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}^R$.

Caso 2. $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{P}\mathfrak{Q}$. Entonces $\mathfrak{M}^L \equiv \mathfrak{P}^L\,\mathfrak{Q}^L \equiv \mathfrak{P}^R\,\mathfrak{Q}^R \equiv \mathfrak{M}^R$.

Caso 3a. $\mathfrak{M} \equiv \lambda x.\mathfrak{P}$. Entonces $\mathfrak{M}^L \equiv [x]\ \mathfrak{P}_H \equiv \mathfrak{M}^R$.

Caso 3b. $\mathfrak{M} \equiv \lambda y.\ \mathfrak{P}$, $y \neq x$. Sea z como en la definición 3E1, $\mathfrak{P}' \equiv [z/y]\ \mathfrak{P}$. Entonces, puesto que $\mathfrak{P}'$ es de nivel menor que $\mathfrak{M}$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^L &\equiv (\lambda z.\ [\mathfrak{N}/x]\ \mathfrak{P}')_H, \\ &\equiv [z]\ ([\mathfrak{N}/x]\ \mathfrak{P}')_H && \text{por (3b)}, \\ &\equiv [z]\ [\mathfrak{N}_H/x]\ (\mathfrak{P}')_H && \text{por hip. ind.}, \\ &\equiv [z]\ [\mathfrak{N}_H/x]\ [z/y]\ \mathfrak{P}_H && \text{por hip. ind.} \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{N}_H$ y $\mathfrak{P}_H$ tienen, respectivamente, las mismas variables que $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{P}$, la parte derecha es $\mathfrak{M}^R$, por el teorema D4.

Esto completa la demostración de la primera mitad de (8). La prueba de la segunda línea es análoga. Basta con colocar en algunos casos el subíndice 'λ' en vez de 'H' (en el caso 1c el '$\mathfrak{M}$' del centro se convierte en '$\mathfrak{M}_\lambda$') y con referirse a § 3E en vez de a D.

Demostración del teorema 1. La suficiencia de (6) se sigue de (7) y del hecho de que toda ecuación válida en $\mathscr{H}$ ($\mathscr{L}$) es también válida en

---

[14] Podríamos proceder también sin el lema, usando definiciones restringidas que serían diferentes en $\mathscr{J}$ y $\mathscr{M}$; pero necesitaríamos en lo esencial la misma argumentación para establecer $(\alpha)_J$ y $(\beta)_J$ al final de § 2. El lema se usa dos veces: en la demostración de (9) y en § 2 *(loc. cit.)*.

$\mathscr{J}$ ($\mathscr{M}$). No queda por demostrar más que la necesidad. Consideraremos los dos casos por separado.

Un axioma de $\mathscr{J}$ será uno de (ρ), (K), (S), (ω), (2). La transformación-H de un axioma de $(\rho)_J$, $(K)_J$, $(S)_J$ será, respectivamente, una instancia de $(\rho)_H$, $(K)_H$, $(S)_H$. Una instancia de (ω) es ya válida en $\mathscr{H}$ y queda, por tanto, sin alterar por la transformación-H. La transformación-H de un caso de (2) se convierte en un caso de $(\rho)_H$. Portanto, (6_1) es verdadero siempre que (5_1) es un axioma de $\mathscr{J}$.

Las reglas de $\mathscr{J}$ son (σ), (τ), (μ), y (ξ). Las tres primeras son también reglas de $\mathscr{H}$; y la transformación-H convierte una inferencia válida que se haya obtenido en $\mathscr{J}$ mediante una de ellas en una inferencia válida en $\mathscr{H}$. Lo mismo puede decirse de (ξ); pues una inferencia

$$\mathfrak{M} =_J \mathfrak{N} \rightarrow \lambda x.\ \mathfrak{M} =_J \lambda x \mathfrak{N}$$

se convierte en

$$\mathfrak{M}_H =_H \mathfrak{N}_H \rightarrow [x]\ \mathfrak{M}_H =_H [x]\ \mathfrak{N}_H,$$

que es válida por § C.

Esto completa la demostración de la mitad izquierda del teorema, por inducción deductiva. Pasemos ahora a la mitad derecha.

Los axiomas de $\mathscr{M}$ son los esquemas (ρ), (α), (β), (η) y (1). La transformación-λ de un caso de $(\rho)_M$ o (1) es un caso de $(\rho)_L$; la de un caso de $(\eta)_M$ es un caso de $(\eta)_L$. Los esquemas (α) y (β) valen en $\mathscr{J}$ por virtud de (7) y (8_2). Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
(\lambda x\ \mathfrak{M})\ \mathfrak{N} &= ((\lambda x \mathfrak{M})\ \mathfrak{N})_\lambda && \text{por (7)},\\
&\equiv (\lambda x\ \mathfrak{M}_\lambda)\ \mathfrak{N}_\lambda && \text{por (4)},\\
&= [\mathfrak{N}_\lambda/x]\ \mathfrak{M}_\lambda && \text{por } (\beta)_L,\\
&\equiv ([\mathfrak{N}/x]\ \mathfrak{M})_\lambda && \text{por lema 1},\\
&= [\mathfrak{N}/x]\ \mathfrak{M} && \text{por (7)}. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Las reglas de $\mathscr{M}$ son $(\sigma)_M$; $(\tau)_M$ $(\mu)_M$; y $(\xi)_M$. Sometida a transformación-λ, una inferencia hecha con esas reglas en $\mathscr{M}$ se convierte en una inferencia hecha bajo las reglas correspondientes de $\mathscr{L}$. Por inducción deductiva (6_2) es entonces necesario para (5_2).

Esto completa la demostración.

COROLARIO 1.1. *Las reglas* (K), (S) *y* (*en el caso* η) (ζ) *son válidas en* $\mathscr{M}$.

Demostración. La argumentación para (K) y (S) es análoga a (9). Para (ζ) la argumentación es como sigue:

$$\begin{aligned} Mx =_M Nx &\to (Mx)_\lambda =_L (Nx)_\lambda && \text{por teor. 1,} \\ &\to M_\lambda x =_L N_\lambda x && \text{por (4),} \\ &\to M_\lambda =_L N_\lambda && \text{por } (\zeta)_L, \\ &\to M =_M N && \text{por teor. 1.} \end{aligned}$$

(Suponiendo, naturalmente, que x no está libre en M o N.)

COROLARIO 1.2. *Sea* $\geq_M$ *la relación cuasi-ordenadora monótona en* $\mathscr{M}_\beta$ *producida* por (α), (β), (K), (S), *y estén definidos los obs* O_1 *y los obs* O_1 *básicos para* $\mathscr{M}$ *como en la definición* C1, *excepto en que* $\lambda x. M$ *es un ob* O_1 *básico y la reducibilidad se toma en el sentido de* $\geq_M$. Entonces

$$M \geq_M N \to M_\lambda \text{ red } N_\lambda; \tag{10}$$

además, si M *y* N *son obs* O_1 *que no contienen* x,

$$Mx = Nx \to M = N \tag{11}$$

es válida para $\mathscr{M}_\beta$.

Demostración. (10) se infiere fácilmente por inducción deductiva. Si M es un ob O_1 básico, entonces M_λ es de orden positivo; por ejemplo, si $M \equiv SNP$ y x no se presenta libre en N o P,

$$\begin{aligned} M_\lambda &\equiv S_\lambda N_\lambda P_\lambda && \text{por (4),} \\ &\text{red } \lambda x. N_\lambda x(P_\lambda x) && \text{por (1) y } (\beta)_L. \end{aligned}$$

Todo ob O_1 tiene por (10) esta misma propiedad. Entonces se deriva (11) como en el corolario 1.1 utilizando (ζ') de § 3F.

3. EL ISOMORFISMO $\mathscr{J}$-$\mathscr{M}$.

Hemos visto que $\mathscr{J}$ y $\mathscr{M}$ tienen los mismos obs. Vamos a ver ahora que tienen también los mismos teoremas; dicho de otro modo, son isomórficos bajo la correspondencia que correlata unos a otros obs que tengan en nuestra presentación los mismos nombres.

TEOREMA 2. $M =_J N \rightleftarrows M =_M N$.

Demostración. Para demostrar la implicación de izquierda a derecha es suficiente mostrar que los postulados de $\mathscr{J}$ son válidos en $\mathscr{M}$. Esto está claro para los postulados que lo son también de $\mathscr{O}$. Para (K) y (S), ello se sigue del corolario 1.1. Para (ω) podemos examinar los axiomas uno por uno o bien utilizar una argumentación basada en § C3. En este

último caso, como los postulados de $\mathscr{H}_0$ han sido ya verificados, lo único que queda por mostrar en que (ζ) vale en el caso η y el (ζ') de § C3 vale en el caso β. Esto se ha hecho ya en los colorarios 1.1 y 1.2.

Quedan por verificar los postulados (2). Esto puede hacerse puesto que las dos partes de cada ecuación pueden transformarse por (7) y (4) en obs-λ que son convertibles en $\mathscr{L}$ (cfr. (9) y corolarios 1.1 y 1.2) del modo siguiente:

(a) $\lambda x.\, X = \lambda x.X_\lambda$ cnv $\mathsf{K}_\lambda X_\lambda = \mathsf{K}X$,
(b) $\lambda x.x$ cnv $\mathsf{S}_\lambda\mathsf{K}_\lambda\mathsf{K}_\lambda \equiv (\mathsf{SKK})_\lambda = \mathsf{SKK}$,
(c) $\lambda x.\, Xx = \lambda x.X_\lambda x$ cnv $X_\lambda = X$,
(f) $\lambda x.\, \mathfrak{Y}\mathfrak{Z} = \lambda x.\, \mathfrak{Y}_\lambda\mathfrak{Z}_\lambda$ cnv $\mathsf{S}_\lambda\,(\lambda x\mathfrak{Y}_\lambda)\,(\lambda x\mathfrak{Z}_\lambda) = \mathsf{S}(\lambda x.\,\mathfrak{Y})\,(\lambda x.\mathfrak{Z})$.

Se suponen, naturalmente, cumplidas las restriciones de (2).

Esto completa la demostración de la implicación de izquierda a derecha. Para demostrar la recíproca basta mostrar que (α), (β) y (cuando es relevante) (η) son válidos en $\mathscr{J}$. Para (η) esto se sigue de (7), (3) y § C. Para (α) y (β) se sigue por (7), (3), lema 1 de § 2 y teoremas D3 y D2.

El teorema 2 queda, por tanto, demostrado.

COROLARIO 2.1. *Para todos los obs-$\mathscr{J}$-$\mathscr{M}$*, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$,

$$[\mathfrak{N}/x]\,\mathfrak{M} = [\mathfrak{N}_H/x]\,\mathfrak{M}_H = [\mathfrak{N}_\lambda/x]\,\mathfrak{M}_\lambda. \tag{12}$$

Demostración. Eso se sigue por (7), lema 1 de § 2 y teorema 2. Obsérvese que no necesitamos distinguir entre los dos sentidos de la igualdad en $\mathscr{J}$ y en $\mathscr{M}$.

4. RELACIONES ENTRE $\mathscr{H}$ y $\mathscr{L}$

Combinando los teoremas 1 y 2 tenemos

TEOREMA 3. *Condición necesaria y suficiente de que*

$$X =_H Y \qquad A =_L B \tag{13}$$

es que

$$X_\lambda =_L Y_\lambda \qquad A_H =_H B_H; \tag{14}$$

además,

$$X =_H X_{\lambda H} \qquad A =_L A_{H\lambda}. \tag{15}$$

Demostración. Si establecemos la necesidad de ambos lados la suficiencia se seguirá de (15).

Para demostrar la necesidad supongamos (13). Entonces, puesto que $\mathscr{H}$ es parte de $\mathscr{J}$ ($\mathscr{L}$ parte de $\mathscr{M}$),

$$X =_J Y \qquad\qquad A =_M B.$$

Por el teorema 2,

$$X =_M Y \qquad\qquad A =_J B.$$

De aquí, por el teorema 1, tenemos (14).

Para demostrar (15) empezaremos con el siguiente caso especial de (7):

$$X =_M X_\lambda \qquad\qquad A =_J A_H.$$

Entonces, por el teorema 2,

$$X =_J X_\lambda \qquad\qquad A =_M A_H.$$

De aquí, por el teorema 1, puesto que $X_H \equiv X$, $A_\lambda \equiv$ A,

$$X =_H X_{\lambda H} \qquad\qquad A =_L A_{H\lambda}.$$

Esto completa la demostración. El teorema puede demostrarse también directamente, sin apelar a los teoremas 1 y 2, y sin hacer referencia a $\mathscr{J}$ ni a $\mathscr{M}$.

COROLARIO 3.1. *Si* $\mathfrak{X}$ *es un obs-*$\mathscr{H}$,

$$([x_1 \ldots, x_m] \,.\, \mathfrak{X})_\lambda =_L \lambda x_1 \ldots x_m \,.\, \mathfrak{X}_\lambda. \tag{16}$$

Demostración. Sea $M \equiv \lambda x_1 \ldots x_m \,.\, \mathfrak{X}$.

Entonces

$M_H \equiv [x_1 \ldots, x_M].\, \mathfrak{X}$	por (3).
$M_H = M$	por (7).
$M_{H\lambda} = M_\lambda$	por teor. 3.

Esto da (16) por (4).

COROLARIO 3.2. *Las tres condiciones siguientes puestas a un* $\mathscr{H}_\beta$*-ob* X *son equivalentes*: 1) X *es igual a un ob* O_m; 2) X_λ *es de orden* $\geq m$; 3)

$$X = [x_1 \ldots, x_m] \, X x_1 \, x_2 \ldots x_m. \tag{17}$$

Demostración. En § C3 mostramos que (17) se sigue de la condición 1); también vale la afirmación recíproca, puesto que la parte derecha de (17) es un O_m. De (17) y corolario 3.1 inferimos

$$X_\lambda =_L \lambda x_1 \dots x_m \,.\, X_\lambda\, x_1 \dots x_m, \tag{18}$$

siendo X_λ de orden $\geq m$ por § 3F. Recíprocamente, de (18), que vale cuando queda satisfecha la condición 2), inferimos (17) tomando la transformación-H de ambos lados.

5. Observaciones finales

Las observaciones siguientes son de carácter suplementario; algunas de ellas nos interesarán más tarde en concretos contextos. Las §§ a-c, e-f se refieren a la *reducción débil*, es decir, a la relación $\geq$ del capítulo 4 producida por (ρ), (τ), (μ), (ν), (K), (S). No es una análoga completa de la reducción ('red') del cálculo λ; el análogo completo de ésta es la reducción fuerte del § F. Pero la consideración de sus propiedades dará una base para tareas ulteriores. No intentamos dar ahora demostraciones completas.

a. Hemos visto en (10) que

$$X \geq Y \to X_\lambda \text{ red } Y_\lambda \tag{19}$$

se sigue por inducción deductiva. Pero no se cumple la propiedad recíproca; he aquí un contraejemplo:

$$X \equiv \mathsf{S(KK)I}, \qquad Y \equiv \mathsf{K}.$$

b. La propiedad (ξ) deja de darse en todo algoritmo de § A3 que use las cláusulas (a), (b), (c), (f). Pues si ponemos

$$X \equiv \mathsf{K}y(xy), \qquad Y \equiv y,$$

tendremos $X \geq Y$, pero no $[y]X \geq [y]Y$.

c. Si utilizamos el algoritmo (fab) de § A3, entonces $([x]X)$ es siempre irreducible en sentido débil; usando cualquier otro algoritmo con (a), (b), (c), (f), sigue valiendo lo mismo siempre que sean irreducibles de dicho modo los componentes constantes de X (cfr. § A3).

d. Si utilizamos combinaciones de (a), (b), (f), pero sin (c), entonces

(20) $$M_{H\lambda} \text{ red } M_{\lambda}.$$

Esto supone

(21) $$A_{H\lambda} \text{ red } A.$$

Si se admite (c) dejan de valer esas propiedades, como podemos comprobar tomando $A \equiv \lambda y.xy$.

e. Ni $X_{\lambda H} \geq X$ ni $X \geq X_{\lambda H}$ valen si no tenemos la cláusula (c) de § A3. Un contraejemplo es $X \equiv \mathsf{K}$. Por otro lado, si se admite (c) podemos reforzar (15) para conseguir

(22) $$X_{\lambda H} \equiv X.$$

que se sigue por inducción estructural.

f. La propiedad

(23) $$A \text{ red } B \rightarrow A_H \geq B_H$$

deja de cumplirse para cualquier algoritmo basado en (a), (b), (c), (f); he aquí un contraejemplo:

$$A \equiv \lambda y.\,(\lambda z.y)\,(xy), \qquad B \equiv \lambda y.y.$$

También deja de cumplirse la recíproca de (23) si se admite (c); efectivamente, para

$$A \equiv \lambda x.ux(vx), \qquad B \equiv \lambda x.(\lambda y.uy(vy))x$$

tenemos $A_H \equiv B_H$. Pero si no se admite (c) suponemos que la recíproca de (23) es verdadera.

g. Del teorema de equivalencia podemos derivar los teoremas de § 3E, con igualdad en el sentido de $=$, de los teoremas de § D. Cfr. lema 1 de § 2.

F. TEORIA DE LA REDUCCION FUERTE

Se ha observado ya (§ E6) que la reducción débil, simbolizada por '$\geq$', no es un análogo completo en $\mathscr{H}$ de la relación de reducción de $\mathscr{L}$, simbolizada por 'red'. Vamos a estudiar en esta sección una forma de reducción, llamada reducción fuerte y simbolizada por '$>\!\!-$', cuyas

analogías con la reducción-λ son mucho más intensas. La formulamos primero (en § 1) con una relación en $\mathscr{H}$ para la cual se postula $(\xi)_H$ además de los postulados de $\geq$; y mostramos que esta reducción tiene la propiedad de Church-Rosser. En § 2 mostramos que la relación puede formularse como relación en $\mathscr{J}$ producida por ciertas subrogaciones en una serie lineal. En § 3 estudiamos una especialización que es, para la reducción fuerte, el análogo de la reducción λ normal estudiada en § 4E1. Entonces es necesario mostrar (§ 4) que el término de una tal reducción normal no puede ser ulteriormente reducido en $\mathscr{H}$. La reducción fuerte ha sido descubierta muy recientemente, y están aún sin resolver varias cuestiones que la afectan; algunas de ellas se mencionan en § 5.

1. Preliminares

La diferencia principal entre la reducción del cálculo λ y la relación $\geq$ de reducción débil es que esta última no tiene la propiedad (ξ) (véase § E5b). En esta sección vamos a definir una relación $\succ$ de *reducción fuerte* que tiene las propiedades de la reducción débil y, además (ξ), a saber:

$$(\xi) \qquad \mathfrak{X} \succ \mathfrak{Y} \rightarrow . [x]\,\mathfrak{X} \succ [x]\,\mathfrak{Y}.$$

Tomaremos la expresión $[x]\mathfrak{X}$ como definida por el algoritmo (abcf) de § A3; algunas de nuestras consideraciones se aplicarán también a otros algoritmos. Llamamos *propiedades definidoras de la reducción fuerte* a las propiedades que acabamos de indicar, es decir, (ρ), (τ), (μ), (ν), (ξ), (K), (S). Antes de proceder a definir la reducción fuerte estableceremos algunas sencillas propiedades que se siguen abstractamente de las ya establecidas; al mismo tiempo introduciremos algunas modificaciones de poca entidad.

a. El teorema siguiente vale para cualquier definición de $[x]\mathfrak{X}$, siempre que entendamos que si '=' y 'red' se conciben en sentido η, entonces el (c) de § A3 vale incondicionalmente, mientras que si '=' y 'red' se conciben en sentido β, entonces (c) no puede aceptarse más que en la medida en que es compatible con esa restricción (cfr. la discusión que siguió al teorema 2).

Teorema 1. *Si valen las propiedades definidoras de la reducción fuerte, y si* '=' y 'red' *se entienden en el sentido adecuado, entonces tenemos*:

(I) $X \succ Y \to X = Y$.

(II) $X \geq Y \to X \succ Y$.

(III) *La reducción fuerte tiene las propiedades* $(\alpha)_H$, $(\beta)_H$, *y, en la medida en que vale* (c) *de* § A3, *tiene también la propiedad* $(\eta)_H$.

(IV) *Si A y B son obs-*λ, A red $B \to A_H \succ B_H$.

Demostración. La propiedad (I) se sigue por inducción deductiva, puesto que la igualdad tiene las propiedades definidoras de la reducción fuerte. Igualmente se sigue la propiedad (II), puesto que las propiedades definidoras de la reducción débil están incluidas entre las de la reducción fuerte. Del mismo modo se sigue (IV) de (III).

La propiedad $(\beta)_H$ de (III) se sigue de (II) y el teorema D2; del mismo modo $(\alpha)_H$ se sigue del teorema D3. Ambos teoremas, D2 y D3, pueden adaptarse a cualquier algoritmo de § A3. Por lo que hace a la propiedad $(\eta)_H$, está claro que si (c) vale se reduce a (ρ).

b. Vamos a estudiar ahora la relación de (ξ) con la propiedad

$$(\xi') \qquad Xx \succ \mathfrak{Y} \to X \succ [x]\,\mathfrak{Y}.$$

Por § A(10) derivamos (ξ) de (ξ') especializando X en $[x]\,\mathfrak{X}$. El recíproco se sigue fácilmente utilizando la cláusula (c) del algoritmo de § A3. Así, si (c) se acepta incondicionalmente, (ξ') equivale a (ξ) y cualquiera de las dos puede tomarse por la otra como propiedad definidora.

Pero no es necesario postular (ξ') en toda su generalidad. Es suficiente restringir el X de (ξ') de modo que sea un ob O_1 (§ C2). Supongamos, en efecto, que tengamos una reducción.

$$(1) \qquad Xx \succ \mathfrak{Y}.$$

Si esa reducción procede toda ella en el interior de X, arrastrando siempre a x como instancia irrelevante, entonces $\mathfrak{Y} \equiv Yx$, con

$$(2) \qquad X \succ Y.$$

Y como $Y \equiv [x]\,\mathfrak{Y}$, tenemos la conclusión de (ξ') sin necesidad de postularlo. Por otro lado, si la reducción (1) no tiene lugar enteramente dentro de X, tiene que haber un X' tal que

$$(3) \qquad X \succ X'$$

y

$$(4) \qquad X'x \succ \mathfrak{Y},$$

tal que el primer paso de (4) fuera imposible si no estuviera presente la x. Entonces X' tiene que ser un ob O_1; de (4) y el (ξ') restringido podemos inferir

$$X' \succ [x]\,\mathfrak{Y},$$

a partir de lo cual tenemos la conclusión de (ξ') por (3). (Cfr. § 2c.)

Esto basta para establecer el siguiente:

TEOREMA 2. *Respecto del algoritmo* (abcf) *de* § A3, *la propiedad* (ξ) *puede subrogarse, como propiedad definidora,* por (ξ') *con* X *restringido a la condición de ob* O_1, y sin *aumentar ni disminuir el número de casos en los que vale* (2).

El (ξ') restringido tiene la ventaja de ser aceptable desde el punto de vista β, mientras que (ξ') sin restringir no es aceptable más que desde el punto de vista η. Desde el primer punto de vista, $[x]\,\mathfrak{X}$ es siempre un ob O_1 (cfr. § C2), y, por tanto, es válida la derivación de (ξ) a partir de (ξ'). La derivación inversa exigiría la aceptación de una forma restringida de (c); en § A3 no se consideró una tal formulación, pero ella es, evidentemente, posible, teniendo en cuenta § C4, observación 2. De todos modos, no tendremos explícitamente en cuenta esta posibilidad, aunque, después del comienzo de § 2, supondremos tener el algoritmo (abcf).

c. Suponiendo formulada la reducción fuerte como en el teorema 2, tenemos la propiedad

$$X \succ X_{\lambda H}. \tag{4}$$

Si usamos el algoritmo (abcf), entonces (4) se reduce a (ρ) por § E(22). Por otro lado, independientemente del algoritmo que se use para la definición de $[x]\mathfrak{X}$, (4) se sigue del (ξ') restringido. Tenemos, en efecto,

$$\mathsf{K} \succ [x, y].\ x \equiv \mathsf{K}_{\lambda H},$$
$$\mathsf{S} \succ [x, y, z].\ xz(yz) \equiv \mathsf{S}_{\lambda H},$$

y el caso general de (4) se sigue entonces por inducción estructural y las definiciones de § E1.

d. Establecido eso, tenemos ya el siguiente:

TEOREMA 3. (Propiedad de Church-Rosser.) *Si*

$$X = Y;$$

entonces hay un Z *tal que*

$$X \succ Z, \qquad Y \succ Z. \tag{6}$$

Demostración. Por la hipótesis del teorema y § E

$$X_\lambda \text{ cnv } Y_\lambda.$$

Por tanto, por el teorema de Church-Rosser para el cálculo λ (teorema 4A1), hay un ob-λ A tal que

$$X_\lambda \text{ red } A, \qquad Y_\lambda \text{ red } A.$$

Por tanto, por el teorema 1 (IV),

$$X_{\lambda H} \succ A_H, \qquad Y_{\lambda H} \succ A_H.$$

Por (4) tenemos entonces (6) con $Z \equiv A_H$.

OBSERVACIÓN 1. La reducción fuerte no tiene la propiedad

$$X \succ Y \to X_\lambda \text{ red } X_\lambda. \tag{7}$$

Contraejemplo puede ser: $X \equiv \mathsf{SK}$, $Y \equiv \mathsf{KI}$. Tenemos, en efecto,

$$\begin{aligned} \mathsf{SK}xy &\geq y. \\ \mathsf{SK}x &\succ \mathsf{I} && \text{por } (\xi'). \\ \mathsf{SK} &\succ \mathsf{KI} && \text{por } (\xi'). \end{aligned}$$

En cambio, la reducción normal de $(\mathsf{SK})_\lambda$ es

$$\begin{aligned} (\mathsf{SK})_\lambda &\equiv (\lambda uxy.uy(xy))\,(\lambda vz.v) \\ &\text{red } \lambda xy.(\lambda vz.v)y(xy) \\ &\text{red } \lambda xy.y. \end{aligned}$$

Como en cada paso no es posible más que una contracción, los tres obs-λ de esa lista son los únicos a los que puede reducirse $(\mathsf{SK})_\lambda$. Ninguno de ellos es $(\mathsf{KI})_\lambda$.

e. Adoptaremos, además, la modificación que consiste en tomar a I como combinador primitivo independiente (cfr. § C4, observación 3, y § E1, observación 1). Si aceptáramos la definición $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}$, entonces, como $\mathsf{SK} \succ \mathsf{KI}$ (§ d, observación), tendríamos

$$\mathsf{I} \succ \mathsf{KIK} \succ \mathsf{K(KIK)K} \succ \mathsf{K(K(KIK)K)K} \succ \ldots$$

Esto provocaría grandes dificultades con el teorema de § 4.

Con todas las modificaciones indicadas las propiedades definidoras de $\succ$ son (ρ), (τ), (μ), (ν), (ξ′) (I), (K), (S). Los teoremas 1-3 siguen siendo válidos.

2. Formulación estricta

Vamos a formular ahora un método que permita presentar, efectivamente, una reducción fuerte (2) como una serie lineal del sistema $\mathscr{J}$.

a. Dada una reducción (2), habrá (cfr. § 2D) una serie de subrogaciones por las reglas (I), (K), (S) y (ξ′), tal que (2) puede inferirse de ellas por medio de (μ), (ν) y (τ). La corrección de una subrogación por (I), (K) o (S) puede comprobarse por mera inspección; pero la justificación de una subrogación de U por $[x]\mathfrak{B}$ exige que se presente una reducción de Ux a $\mathfrak{B}$. Para poder presentar, efectivamente, la reducción en su conjunto hay que dar explícitamente esta última justificación.

Podemos representar esas conexiones en forma de árbol genealógico describible como el correspondiente diagrama arborescente de un proceso deductivo [15], del modo siguiente. El árbol empieza con X en la cima de la rama principal y termina con Y en el extremo inferior; siempre que una subrogación por las reglas (I), (K) o (S) lleva de Z a Z' escribimos Z como única premisa de Z'; cuando la subrogación de U por $[x]\mathfrak{B}$ lleva de Z a Z' tomamos a Z y $\mathfrak{B}$, respectivamente, como premisas mayor y menor de Z', y entonces hay sobre $\mathfrak{B}$ un árbol colateral con U en la cima de su rama principal. De este modo se describe completamente la construcción del árbol. Es evidente que (2) vale si —y sólo si— existe un tal árbol.

Ahora vamos a modificar un árbol así del modo siguiente: Considérese el árbol colateral que está por encima de $\mathfrak{B}$, siendo $\mathfrak{B}$, como se ha descrito, la premisa menor de un paso que lleva de Z a Z'. Sea $\mathfrak{A}$ un nodo de la rama principal de este árbol colateral. Supóngase que subrogamos $\mathfrak{U}$ por $\lambda x\ \mathfrak{U}$. Esto explicitará el hecho de que x es una variable que desempeña un papel especial; el prefijo λ debe entenderse como primitivo, como en $\mathscr{J}$. Podemos conseguir un carácter aún más explícito escribiendo en el lugar de $\mathfrak{U}$ el resultado de subrogar a U la fórmula $\lambda x\mathfrak{U}$ en Z. En este caso, el $\mathfrak{B}$ situado al pie del árbol colateral es el resultado de subrogar a U $\lambda x\ \mathfrak{B}$ en Z. La transición desde esto a Z' consiste entonces simplemente en la subrogación de $\lambda x\mathfrak{B}$ por $[x]\mathfrak{B}$ según el algoritmo de § A3.

---

[15] Para cuestiones de terminología cfr. § 2B1-3.

Si realizamos esta transformación en todas las ramas del árbol y formamos luego la secuencia constructiva normal (§ 2B1) asociada con él, ésta será una secuencia de obs-$\mathscr{J}$ $M_0, M_1, \ldots, M_n$, tal que $M_0 \equiv X$, $M_n \equiv Y$, y todo M_{k+1} se obtiene a partir de M_k mediante un paso de uno de los tipos siguientes:

Tipo I. Subrogación según las reglas (I), (K) o (S) en $\mathscr{H}$.

Tipo II. Subrogación de un componente U, que es un ob O_1 en $\mathscr{H}$, por $\lambda x.Ux$, siendo x una variable que no se presenta más que así.

Tipo III. Subrogación de un componente $\lambda x.\mathfrak{B}$ por $V \equiv [x]\,\mathfrak{B}$, siendo $\mathfrak{B}$ un ob-$\mathscr{H}$ y definido $[x]\,\mathfrak{B}$ por el algoritmo de § A3.

Así puede convertirse toda reducción (2) en una secuencia $M_0, M_1, \ldots, M_n$. Además, dada la secuencia, podemos reconstruir el árbol original. Cuando tenemos un paso del tipo I, tenemos un modo con una sola rama; cuando tenemos uno del tipo II, estamos ante la premisa mayor de una bifurcación, y el nodo siguiente es la premisa principal de una reducción colateral que lleva a la premisa menor; cuando tenemos un paso del tipo III, hemos alcanzado el final de una reducción colateral que da la premisa menor para el nodo siguiente.

Las secuencias $M_0, M_1, \ldots, M_n$ formadas de este modo a partir de un árbol no son, sin embargo, las más generales que pueden formarse por subrogaciones de esos tipos. Pues en la reducción colateral que lleva de Ux a $\mathfrak{B}$ no se permiten más que subrogaciones interiores a $\mathfrak{U}$. Pero como subrogaciones que no se solapen pueden intercambiarse sin afectar al resultado, y como ninguna subrogación de un componente que contuviera a λxN como parte propia satisfaría las restricciones, esta mayor libertad no tiene contenido alguno.

b. Dados dos obs-$\mathscr{J}$ M y N, definimos la relación

$$M \succ N \tag{8}$$

como significativa de que hay una secuencia de obs-$\mathscr{J}$, $M_0, M_1, \ldots, M_n$ tal que $M_0 \equiv M$, $M_n \equiv N$, y M_k pasa a M_{k+1} por una subrogación de alguno de los tres tipos. De lo que acabamos de decir se sigue entonces que cuando $M \equiv X$ y $N \equiv Y$ la relación (8) se especializa en (2).

La relación 8 es, pues, una relación monótona en $\mathscr{J}$, producida por subrogaciones de los tres tipos; como tal es análoga a otros tipos de reducción, y en particular a la reducción λ del capítulo 4. Por eso podemos usar la misma terminología ya utilizada a propósito de esos otros tipos [16]. Así, llamaremos a M_k el *k-ésimo estadio*, al paso de M_{k-1}

[16] Cfr. § 4A4, § 4E1.

a M_k el *k-ésimo paso*; *extenso*, al componente eliminado por subrogación en cada caso, al paso mismo *contracción* de ese extenso, la cual consiste en la subrogación de ese extenso por su *contracto*, etc.

Llamamos *reducciones-I-II* a las reducciones en las que no se presentan más pasos de los tipos I y II, e indicamos que (8) es así mediante la notación

$$M \succ_{I,II} N.$$

Análogamente, si sólo se presentan pasos del tipo III, hablamos de *III-reducción* y la simbolizamos por

$$M \succ_{III} N.$$

Evidentemente, una reducción-III equivale a una transformación-H (§ E1).

Sea el siguiente estadio dado de una reducción:

$$\lambda x_1 \ldots x_m \, \mathfrak{M},$$

en el cual $\mathfrak{M}$ es un átomo o bien está formado por aplicación. Llamamos entonces a $\mathfrak{M}$ la *base* de este estadio, y a $\lambda x_1 \ldots x_m$ el *prefijo*. Supongamos, además,

$$\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}_0 \, \mathfrak{N}_1 \ldots \mathfrak{N}_p,$$

no siendo $\mathfrak{N}_0$ ulteriormente reducible (por lo cual es un átomo o es de la forma $\lambda y.\mathfrak{P}$). Entonces decimos (cfr. § 5C6) que $\mathfrak{N}_0, \ldots, \mathfrak{N}_p$ son los *componentes principales* de este estadio, que $\mathfrak{N}_0$ es el *componente rector* y que $\mathfrak{N}_k$ es el *componente principal de índice k*.

Sea un estadio de dicha forma. Entonces decimos que el paso siguiente es un *paso principal* precisamente si es de los tipos I o II con un extenso que incluya la totalidad de $\mathfrak{N}_0$, o de tipo III con un extenso $\lambda x_m . \mathfrak{M}$. Y decimos que es *un paso subordinado de índice k* precisamente cuando el extenso es parte de $\mathfrak{N}_k$ y no es principal [17]. Una *reducción subordinada de índice k* es una secuencia de pasos todos los cuales son pasos subordinados de índice *k*.

Vamos a definir también el *nivel* de un paso del modo siguiente: Un paso de nivel 0 es lo mismo que un paso principal. Sea el estadio dado como ha quedado descrito. Entonces decimos que el paso siguiente es de

---

[17] Un paso principal puede tener un extenso en $\mathfrak{N}_k$ sólo si $k = 0$, $\mathfrak{N}_0$ es K o S y el paso es de tipo II.

nivel $r+1$ si —y sólo si— es un paso subordinado de índice k y es de nivel r considerado como paso de la reducción de $\mathfrak{N}_k$. Decimos que una reducción es de nivel r si —y sólo si— contiene pasos de nivel r, pero ninguno de nivel $r+1$.

c. Vamos a considerar ahora algunas restricciones más especiales que es útil imponer a (8).

En § 1b mostramos que podríamos restringir (ξ') al caso en el cual X fuera un ob O_1. Pero la argumentción mostró, en realidad, más que eso. Con los símbolos de § 1b lo que mostramos fue que podríamos exigir que el primer paso de la reducción

$$X'x \succ \mathfrak{Y}$$

sea tal que no fuera posible sin la presencia de x. En la presente terminología un paso así no podría ser más que una contracción de tipo I o II y en la cual el extenso fuera la totalidad de $X'x$. Así podemos exigir que todo paso de tipo II sea inmediatamente seguido por un segundo paso de este tipo.

Si elaboramos consecuentemente esta idea podemos exigir que los pasos de tipo II se agrupen con otros pasos del modo que muestra la tabla 1. En la parte de esa tabla que se refiere al tipo II se enumeran en la columna «Extenso» las seis posibilidades de extensos de tipo II. En los casos IIa, IIb o IIc el paso siguiente tiene que ser una contracción del tipo I, y los dos pasos juntos dan el resultado que se encuentra en la columna «Contracto». En los casos IId y IIe tiene que haber un segundo paso de tipo II seguido por un paso de tipo I, y los tres pasos juntos dan el resultado que aparece en la columna «Contracto». Análogamente en el caso IIf, en el cual tiene que haber tres pasos de tipo II seguidos por uno de tipo I. Llamamos a estos grupos de pasos *pasos mayores* de la reducción de X, e incluiremos bajo este término a los pasos simples de los tipos I y III. Hay entonces diez tipos de pasos mayores; todos ellos aparecen en la tabla 1. Podemos también hablar de *extensos mayores y contractos mayores* en el sentido de esa tabla.

Ahora podemos volver a definir la relación (8) haciéndola significar que hay una secuencia de tales pasos mayores que lleva de M a N. Tenemos entonces:

Teorema 4. *Si* $M \equiv X$ *y* $N \equiv Y$, *la relación* (8) *equivale a* (2).

TABLA 1

Tipo	Extenso	Contracto
Ia	$\mathsf{K}U_1U_2$	U_1
Ib	$\mathsf{S}U_1U_2U_3$	$U_1U_3(U_2U_3)$
Ic	$\mathsf{I}U$	U
IIa	$\mathsf{K}U$	$\lambda x.U$
IIb	$\mathsf{S}UV$	$\lambda x.Ux(Vx)$
IIc	I	$\lambda x.x$
IId	K	$\lambda xy.x$
IIe	$\mathsf{S}U$	$\lambda xy.Uy(xy)$
IIf	S	$\lambda xyz.xz(yz)$
III	$\lambda x.\mathfrak{A}$	$[x].\mathfrak{A}.$

d. Terminaremos este artículo con un teorema referente a la relación (8) y que será útil como lema.

TEOREMA 5. *Si a es una indeterminada y*

$$M \equiv aN_1 N_2 \dots N_n, \tag{9}$$

y si

$$M \succ M'; \tag{10}$$

entonces existen unos $N_1', \dots, N_n'$ *tales que*

$$M' \equiv aN_1' \dots N_n', \tag{11}$$

y

$$N_i \succ N_i'.$$

Demostración. Ningún paso principal es aplicable a un estadio de la forma (11). Por tanto, si algún estadio de la reducción (10) es de la forma (11), el estadio siguiente será también de la forma (11). Como (9) es de la forma (11), el teorema se sigue por inducción sobre el número de estadios.

3. REDUCCIONES NORMALES

En ciertas circunstancias podemos imaginar que una reducción se lleva a cabo según el plan siguiente. Empezamos por hacer pasos principales de tipo I, continuando con pasos de ese tipo mientras sea posible. Si alcanzamos un estadio en el cual la base sea un ob O_1, realizamos

uno o más pasos principales de tipo II hasta que podamos hacer más pasos principales de tipo I. Así seguimos hasta alcanzar un estadio en el cual el componente rector no sea un combinador. Entonces empezamos la reducción subordinada de índice 1, realizando cuanto sea posible; luego empezamos la reducción subordinada de índice 2, y así sucesivamente. Llegaremos a un estadio en el cual no son ya posibles más pasos de las clases mencionadas. Entonces realizamos pasos principales de tipo III.

Llamamos *reducción normal* a una reducción realizada según ese plan. Puede también caracterizarse diciendo que es una reducción en la cual el extenso contraído en cada paso es el extenso primero —o con prioridad— del estadio anterior, determinándose la prioridad según las reglas siguientes:

N 1. Un extenso principal del tipo I o del tipo II es primero, o tiene prioridad, respecto de todo extenso subordinado.

N 2. Dados dos extensos principales del tipo I o II es primero el más comprensivo [18].

N 3. Un extenso subordinado tiene prioridad respecto de cualquier otro extenso subordinado de índice más alto.

N 4. Un extenso de tipo I o II, sea principal o subordinado, es primero que cualquier extenso principal de tipo III.

Estas reglas deben aplicarse no sólo a la reducción principal, sino también a reducciones subordinadas de todos los niveles.

Es evidente que una reducción normal es un algoritmo, en el sentido de que cada paso está unívocamente determinado por el estadio anterior. El proceso puede concluir o no concluir. Escribiremos

$$X \succ_N Y$$

para indicar que Y es un estadio de la reducción normal de X. Decimos que Y es una *forma normal* de X cuando la reducción normal de X termina en Y.

OBSERVACIÓN 1. La condición N 3 es relativamente trivial, puesto que dos pasos subordinados sucesivos de diferentes índices son intercambiables. Podría tomarse en vez de ella la condición de que todos los pasos de tipo III se hagan en último lugar. Esta alternativa es admisible y se usará algunas veces.

---

[18] Esta regla exige que un paso de tipo II sea máximo (cfr. la demostración del teorema 7). Un extenso de tipo II es una base entera o bien está en posición de argumento (§ 5C6).

TEOREMA 6. *Condición necesaria y suficiente de que X tenga una forma normal Y es que* X_λ *tenga una forma normal-*β *A y que* $Y \equiv A_H$.

Demostración. De acuerdo con la observación 1 podemos concebir la reducción normal de X como una reducción-I-II normal seguida por una reducción-III. En la primera, todo extenso está encabezado por un combinador, lo que en este contexto quiere decir por una instancia explícita de I, K o S; y en cada paso el extenso contraído es siempre el extenso encabezado por el combinador que en el estadio anterior se encontraba más a la izquierda. En cada paso mayor se elimina un combinador. La reducción-I-II tiene un final si —y sólo si— se alcanza un estadio que no contiene ningún combinador explícito; el estadio final es entonces un ob-λ A.

Supongamos ahora que al cabo de p pasos mayores en la reducción-I-II normal de X alcanzamos un estadio M. Sea R el extenso que tiene que contraerse en el próximo paso mayor. Supongamos que ningún componente de M de la forma $\lambda x.N$ se encuentra en posición funcional, y que todos los prefijos λ se encuentran a la izquierda de R. Supongamos, además, que hay una reducción correspondiente de X_λ a M_λ, y que esta reducción satisface las restricciones de la β-reducción normal. Habrá en M_λ, correspondiendo al R de M, un R_λ tal que R_λ está encabezado por un extenso β de M_λ. Si por un paso mayor R se reduce a Z, entonces R_λ se reduce por contracciones β a Z_λ. (Habrá tres de esas contracciones si R es del tipo Ib, dos si es de los tipos Ia, IIb, una si es de los tipos Ic, IIa o IIe, y ninguna si es de los tipos IIc, IId o IIf.) El extenso en cabeza de R_λ será el primer extenso β de M_λ (no hay en M ningún combinador a la izquierda de R, y todos los prefijos λ que están a la izquierda de R_λ se encuentran en componentes de la λxN en posición de argumento); además, las contracciones β, si las hay, de la reducción de R_λ a Z_λ serán necesariamente los próximos pasos de la reducción-β normal de X_λ. Si el paso mayor reduce M a M', entonces las contracciones β reducen M_λ a $(M')_\lambda$, y viceversa. Entonces M' satisface las hipótesis de M, y, por tanto, podemos iterar el proceso. Si las condiciones puestas a M quedan satisfechas para $p = 0$, tenemos una demostración inductiva de que lo que hemos supuesto para M es verdadero para todo estadio de la reducción-I-II normal de X. Si esta última reducción termina en A, entonces A será un λ-ob en forma normal-β, y la reducción normal de X_λ terminará en $A_\lambda \equiv A$. Entonces $Y \equiv A_H$ y la condición del teorema es necesaria.

Para demostrar la suficiencia basta con observar que un paso de la reducción-I-II de X sin un paso por lo menos de la reducción normal de X_λ sólo es posible si el R del párrafo anterior es de los tipos IIc,

IId o IIf, es decir, si es una subrogación de I, K, o S por I_λ, K_λ o S_λ. Sólo un número finito de tales pasos es posible desde cualquier estadio. Por tanto, si la segunda reducción tiene final, también lo tiene la primera. Esto completa la demostración.

OBSERVACIÓN 2. Si X_λ tiene una forma normal-$\beta\eta$ B, entonces A red_η B por § 4D2, y, naturalmente, $B_H \equiv A_H$.

4. EL TEOREMA DE LA FORMA NORMAL

Si decimos que X está en *forma normal* cuando —y sólo cuando— X es el término de una reducción normal, no resulta nada obvio que un X en forma normal no pueda ser ulteriormente reducido. Vamos a dedicar este artículo a demostrar que así es.

a. Para empezar será necesario estudiar un caso especial que formularemos como lema del modo siguiente:

LEMA 1. *Sea* $\mathfrak{X}$ *una combinación de* x *e indeterminadas, y sea*

$$X \equiv [x]\,\mathfrak{X}.$$

Supóngase, además, que

$$Xx \succ \mathfrak{M}. \tag{12}$$

Entonces tenemos:

$$[x]\,\mathfrak{M}_H \equiv X; \tag{i}$$

(II) $\mathfrak{M}$ *es una combinación de componentes de* $\mathfrak{X}$ *y componentes de la forma* Px, *existiendo, asociado a cada* P, *un componente* $\mathfrak{Z}$ *de* $\mathfrak{X}$ *tal que la subrogación de cada* Px *por su* $\mathfrak{Z}$ *asociado transforma a* $\mathfrak{M}$ *en* $\mathfrak{X}$, *y, para* $Z \equiv [x]\,\mathfrak{Z}$.

$$Z \succ P. \tag{13}$$

Demostración. Lo demostramos por inducción estructural sobre $\mathfrak{X}$. Como parte de la hipótesis de esta inducción se tendrá que si un $\mathfrak{Z}$ de (II) es un componente propio de $\mathfrak{X}$, entonces

$$P_H \equiv [x](Px)_H \equiv Z \equiv [x]\,\mathfrak{Z}. \tag{14}$$

Caso a. $\mathfrak{X} \equiv U$, que es una constante que no contiene x. Entonces

$$\begin{aligned} X &\equiv \mathsf{K}U, \\ Xx &\equiv \mathsf{K}Ux. \end{aligned} \tag{15}$$

Si esto se contrae como extenso del tipo Ia, el próximo estadio es U, que no contiene ningún extenso de ninguna clase, las propiedades (I) y (II) valen entonces evidentemente. Los demás casos posibles son que el primer paso sea de los tipos IIa o IId; entonces el primer estadio es, respectivamente,

$$(\lambda y.U)x \qquad\qquad (\lambda yz.y)Ux.$$

Las propiedades (I) y (II) valen para esos dos estadios. El próximo paso tiene que ser de tipo III, el cual nos lleva de nuevo al punto de partida. Para (15), de todos modos, (I) y (II) son obviamente verdaderas.

Caso b. $\mathfrak{X} \equiv x$. Entonces $X \equiv \mathsf{I}$, y el estadio inicial es

$$\mathfrak{M} \equiv Xx \equiv \mathsf{I}x.$$

Tanto (I) como (II) son claras en este caso. El paso siguiente puede ser de los tipos Ic o IIc. Si el primero, el próximo estadio es

$$\mathfrak{M} \equiv x.$$

si el segundo, tendremos

$$\mathfrak{M} \equiv (\lambda y, y)x.$$

En ambos casos (I) y (II) valen para $\mathfrak{M}$. En el primer caso no es posible reducción ulterior; en el segundo, el único caso aplicable es del tipo III, que vuelve a llevarnos al comienzo.

Caso c. $\mathfrak{X} \equiv Ux$. Entonces $X \equiv U$. El estadio inicial es

$$\mathfrak{M} \equiv Xx \equiv Ux,$$

y no es posible ulterior reducción. Está claro que valen (I) y (II).

Caso f. $\mathfrak{X} \equiv \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$. Entonces $X \equiv \mathsf{S}X_1X_2$, con $X_1 \equiv [x]\ \mathfrak{X}_1$, $X_2 \equiv [x]\ \mathfrak{X}_2$. El estadio inicial es

$$\mathfrak{M} \equiv Xx \equiv \mathsf{S}X_1X_2x.$$

Las propiedades (I) y (II) valen para ese estadio. El próximo paso puede ser del tipo Ib, IIb, IIe, IIf.

Si el primer paso es de tipo Ib, el estadio siguiente es

$$\mathfrak{M} \equiv X_1x(X_2x). \tag{16}$$

Se verifican las propiedades (I) y (II). Supongamos que después de p pasos de ulterior reducción alcanzamos un estadio

$$\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}_1\, \mathfrak{M}_2, \tag{17}$$

con

$$X_1 x \succ \mathfrak{M}_1, \qquad X_2 x \succ \mathfrak{M}_2.$$

Por la hipótesis inductiva

$$[x]\, \mathfrak{M}_{1H} \equiv X_1, \qquad [x]\, \mathfrak{M}_{2H} \equiv X_2,$$

y, por tanto,

$$[x]\, \mathfrak{M} \equiv \mathsf{S} X_1 X_2 \equiv X.$$

Además, cada uno de los $\mathfrak{M}_{1H}, \mathfrak{M}_{2H}$ satisface la condición análoga a (II). Consecuentemente, los únicos extensos que existen (ningún extenso puede empezar por un componente de $\mathfrak{X}$) son los componentes Zx, que son del tipo I, o bien extensos interiores a algún P. Así, el próximo estadio de la reducción de (17) es otro estadio de la misma forma. Por tanto, (I) y (II) valen para todos los estadios obtenidos a partir de (16).

Si el primer paso es de tipo IIb, el primer estadio es

$$(\lambda y.X_1 y(X_2 y))x. \tag{18}$$

Entonces (I) y (II) están claramente satisfechas. Supongamos que inmediatamente después tenemos una secuencia (vacía o no) de pasos interiores a $X_1 y(X_2 y)$. Podemos aplicar a esos pasos el mismo razonamiento que a (16). Si se reducen a

$$\mathfrak{M} \equiv (\lambda y.\, \mathfrak{N})x,$$

entonces

$$[x]\, \mathfrak{M}_H \equiv (\lambda y.\mathfrak{N})_H \equiv [y]\, \mathfrak{N}_H \equiv X.$$

Es, además, claro que vale (II). Por tanto, (I) y (II) son válidas mientras tengamos pasos de la clase descrita. Pero el único otro paso aplicable es uno de tipo III, el cual eliminaría la λ inicial. Y esto no es posible más que si $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}_H$, y lleva a

$$\mathfrak{M}_H \equiv ([y]\, \mathfrak{N}_H)x \equiv Xx,$$

con lo que volvemos al estadio inicial.

Si el primer paso es de tipo IIe o IIf el primer estadio será, respectivamente,

$$\mathfrak{M} \equiv (\lambda yz.\, X_1 z(yz))X_2 x, \qquad \mathfrak{M} \equiv (\lambda xyz.\, xz(yz))X_1 X_2 x.$$

También en estos casos se cumplen las condiciones (i) y (ii). Podemos suponer (cfr. observación 1 de § 3 y el comentario de § 2) que los pasos de índice 0, si los hay, son los primeros. En el caso de la derecha, la única posibilidad de un paso de índice 0 es un paso de tipo III, el cual nos vuelve a llevar al punto de partida. En el caso de la izquierda, argumentamos, como hicimos para (18), que $[x]\ \mathfrak{M}_H$ no queda afectado por pasos de índices 0. Todo otro paso subsiguiente dentro de (X_1 y) X_2 puede tratarse mediante la hipótesis inductiva.

Esto completa la demostración del lema 1.

b. Ahora podemos ya atender a nuestro teorema principal;

Teorema 7. *Si X es el término de una reducción normal y*

$$X \succ M, \tag{19}$$

entonces

$$M_H \equiv X. \tag{20}$$

Demostración. Por la hipótesis y el teorema 6 hay un ob-λ A en forma normal-β tal que

$$A_H \equiv X.$$

Procedemos por inducción estructural sobre A.

Caso 1. A es una combinación de indeterminadas. Entonces $X \equiv A$ y X no admite ningún paso reductivo de ninguna clase. El teorema vale, pues, de un modo trivial.

Caso 2. $A \equiv A_0 A_1 \ldots A_m$, con $m > 0$, siendo A_0 aplicacionalmente simple y valiendo el teorema para $A_1, \ldots, A_m$. Como A está en forma normal-β, A_0 es una indeterminada; llamémosla a. Entonces

$$X \equiv aX_1 X_2 \ldots X_m, \qquad X_i \equiv A_{iH}.$$

Por el teorema 5, (19) implica que hay unos $M_1 \ldots, M_m$ tales que

$$M \equiv aM_1 M_2 \ldots M_m,$$

y

$$X_i \succ M_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Por la hipótesis inductiva

$$(M_i)_H \equiv X_i.$$

Por tanto,

$$M_H \equiv aM_{1H} \ldots M_{mH} \equiv X.$$

Caso 3. $A \equiv \lambda x \mathfrak{A}$, y el teorema es válido para $\mathfrak{A}$. Sea

$$\mathfrak{Y} \equiv \mathfrak{A}_H.$$

Entonces se sigue que

$$X \equiv [x]\, \mathfrak{Y}.$$

En vez de (19) consideremos la reducción

$$Xx \succ \mathfrak{M}. \tag{21}$$

Entonces (19) es el caso especial $\mathfrak{M} \equiv Mx$. En vez de (20) mostramos que

$$[x]\, \mathfrak{M}_H \equiv X. \tag{22}$$

En el caso de que $\mathfrak{A}$ no contenga ningún prefijo λ, (22) se sigue del lema 1. Podemos, pues, aplicar una inducción sobre el número de prefijos en $\mathfrak{A}$. Con este fin emplearíamos como hipótesis inductiva

$$\mathfrak{Y} \succ \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}_H \equiv \mathfrak{Y}. \tag{23}$$

En la demostración habrá que suponer que las reducciones (19) y (21) están sometidas a la restricción de que cuando se introduce un prefijo λ todos los pasos situados dentro del alcance del prefijo siguen inmediatamente a su instrucción.

La discusión de § 2b (cfr. observación 1 de § 3) muestra que esa restricción no constituye una limitación esencial.

En §§ c-d se tratan diferentes fases de la demostración.

c. Supongamos que después de p pasos de la reducción (21) alcanzamos un estadio $\mathfrak{M}$ que es una combinación de ciertos componentes, llamados aquí elementos, los cuales son: o bien (a) componentes de algún $\mathfrak{N}$ tal que

$$\mathfrak{Y} \succ \mathfrak{N}; \tag{24}$$

o bien (b) de la forma Px, obteniéndose P de $Z \equiv [x]\, \mathfrak{Z}$ (y $\mathfrak{Z}$ es un componente de $\mathfrak{Y}$) por medio de reducciones internas (13) tales que vale

(14). Supongamos, además, que la subrogación de cada componente Px por el de $\mathfrak{Z}$ asociado transforma a $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{N}$. Entonces, por (24) y la hipótesis inductiva (23),

$$\mathfrak{N}_H \equiv \mathfrak{Y}.$$

Consecuentemente, por virtud de (14),

$$[x]\,\mathfrak{M}_H \equiv [x]\,\mathfrak{N}_H \equiv [x]\,\mathfrak{Y} \equiv X. \tag{25}$$

El teorema será, por tanto, válido para el estadio p-ésimo.

La situación recién descrita vale, evidentemente, también para $p = 0$. Si pudiéramos mostrar que el paso $(p + 1)$ la deja sin alterar, tendríamos el teorema. Diferimos a §d el caso en el cual el extenso contraído es interior a algún P, y consideramos juntos los demás casos. Basta, evidentemente, con considerar pasos de los tipos I y II, pues para un paso de tipo III la invariancia de la propiedad es obvia.

Supongamos primero que el paso $(p + 1)$ es la contracción de un extenso cuya cabeza es un elemento que pertenece a $\mathfrak{N}$. Habrá entonces un extenso correspondiente en $\mathfrak{N}$; la cabeza es la misma por hipótesis, y las subrogaciones indicadas transformarán el extenso en otro extenso con la misma cabeza y el mismo número de argumentos. Supongamos que la contracción del extenso dado convierte a $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{M}'$, y que la contracción del extenso imagen convierte a $\mathfrak{N}$ en $\mathfrak{N}'$. Entonces $\mathfrak{M}'$ y $\mathfrak{N}'$ se relacionan del mismo modo que $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$.

Supongamos luego que la cabeza del extenso contraído está en algún Px, y que el extenso contiene también el x de Px. Entonces el extenso tiene que contener a Px entero. Como los constitutivos de un extenso tienen que ser $\mathscr{H}$-obs, P tiene que ser Z y la cabeza del extenso es el combinador rector de Z. Si esta cabeza es originaria, tenemos el caso del párrafo anterior. Si es adventicia, entonces Zx forma un extenso de tipo I; por tanto, no es parte de ningún extenso mayor, y el extenso contraído es precisamente la totalidad de Zx. El contracto será una combinación de nuevos elementos Zx y tal vez nuevos elementos que sean componentes del $\mathfrak{Z}$ original. Por la argumentación del lema 1 —la situación es aquí más sencilla, puesto que no tenemos más que un solo paso del tipo I— vemos que $[x]\mathfrak{M}$ quedará sin alterar; y como la subrogación de cada nuevo componente Zx por su $\mathfrak{Z}$ asociado transformará el contracto en el $\mathfrak{Z}$ original, la propiedad asociada a (25) seguirá siendo válida.

d. Vamos a considerar ahora el difícil caso en el cual el paso $(p+1)$ es interior a algún P. Llamamos interno a un tal paso, y reducción inter-

na a una serie de pasos todos internos al mismo Z. Tratamos la situación mostrando que (14) vale para cualquier reducción interna que parta de un $\mathfrak{M}$ que sea el estadio p-ésimo o un estadio anterior de (21). Asociamos a este $\mathfrak{M}$ un $\mathfrak{N}$ tal que (25) y las propiedades asociadas con ella al principio de § c son válidas. Es irrelevante cuáles son los pasos externos que intervienen entre los pasos internos de Z. Procedemos por inducción sobre la estructura del $\mathfrak{Z}$ asociado.

Si $\mathfrak{Z} \equiv U$, siendo U un componente constante de $\mathfrak{Y}$, entonces $Z \equiv \mathsf{K}U$. Las únicas posibilidades de P son

$$\mathsf{K}P', \qquad \lambda y.P', \qquad (\lambda xy.x)P', \tag{26}$$

en las cuales y no está libre en U y

$$U \succ P'. \tag{27}$$

Por definición de $\mathfrak{N}$ hay un componente U de $\mathfrak{N}$ que es homólogo de $\mathsf{K}Ux$ en $\mathfrak{M}$. Supongamos que la reducción (27), aplicada a este componente, reduce $\mathfrak{N}$ a $\mathfrak{N}'$. Entonces, por (23), $(\mathfrak{N}')_H \equiv \mathfrak{Y}$. Como, por la definición de la H-transformación en § E(3), $(\mathfrak{N}')_H$ difiere de $\mathfrak{N}_H \equiv \mathfrak{Y}$ sólo por la subrogación de U por $(\mathrm{P}')_H$, resulta que $(P')_H \equiv U$. De esto se sigue (14) para cualquiera de las formas (26).

Si $\mathfrak{Z} \equiv x$, $Z \equiv \mathsf{I}$. Las únicas posibilidades para P son I y $\lambda y.y$. En cualquier caso tenemos (14).

Si $\mathfrak{Z} \equiv Ux$, siendo U un componente constante de $\mathfrak{Y}$, entonces $Z \equiv U$. La situación queda cubierta por el primero de los dos casos tratados en § c.

Supongamos, por último, que $\mathfrak{Z} \equiv \mathfrak{Z}_1\,\mathfrak{Z}_2$, $Z \equiv \mathsf{S}Z_1Z_2$. Utilizamos una inducción sobre el número de operaciones S adventicias usadas para formar Z a partir de los componentes de $\mathfrak{Y}$. Llamamos orden de Z al número de tales operaciones S. Entonces la anterior discusión muestra que (14) vale si Z es de orden 0. Supongamos que (14) vale para todos los Z de orden $\leq s$. Completamos la demostración del teorema mostrando que, bajo la hipótesis inductiva recién dicha, (14) vale para un Z de orden $s + 1$.

Supongamos, para empezar, que la reducción (13) es interior a Z_1 y Z_2. Entonces $\mathrm{P} \equiv \mathsf{S}P_1P_2$, con $Z_1 \succ P_1$ y $Z_2 \succ P_2$. Por la hipótesis inductiva $P_{1H} \equiv Z_1$ y $P_{2H} \equiv Z_2$. Por tanto,

$$P_H \equiv \mathsf{S}P_{1H}P_{2H} \equiv \mathsf{S}Z_1Z_2 \equiv Z.$$

Podemos ahora suponer que la reducción (13) empieza con una contracción respecto del S inicial de SZ_1Z_2. (Si la reducción empieza con pasos de la clase considerada en el párrafo anterior, no podrán darse pasos tales más que hasta que un paso de tipo III nos vuelva a la Z inicial.) Hay tres posibilidades para el primer estadio, a saber:

$$\begin{array}{ll} & \lambda y.\ Z_1y(Z_2y), \\ (28) & (\lambda y_1y_2\ .\ Z_1y_2(y_1y_2))Z_2, \\ & (\lambda y_1y_2y_3\ .\ y_1y_3(y_2y_3))Z_1Z_2. \end{array}$$

Trataremos por separado esas tres posibilidades. Observaremos que en los casos segundo y tercero basta con considerar los pasos de orden 0, puesto que (14) vale para reducciones interiores a Z_1 o Z_2.

La tercera posibilidad de (28) es trivial, a causa de que el único paso posible de orden 0 es un paso de tipo III que nos lleva de nuevo a Z.

Para tratar la primera posibilidad de (28) supongamos que

$$Z_1y(Z_2y) \succ \mathfrak{P}. \tag{29}$$

Entonces

$$P_H \equiv [y]\,\mathfrak{P}_H.$$

Pero si empezamos por la contracción de Zx por un paso de tipo Ib y luego realizamos los pasos de (29) con y sustituida por x, llegamos a $[x/y]\,\mathfrak{P}$. Sea $\mathfrak{M}'$ el mismo ob que $\mathfrak{Y}$, excepto en que el Zx concreto por el que nos estamos interesando se deja sin alterar, y supongamos que la reducción de Zx a $[x/y]\mathfrak{P}$ reduce $\mathfrak{M}'$ a $\mathfrak{M}''$. Entonces hay una reducción de Xx a $\mathfrak{M}''$ que no supone ningún paso interno de orden mayor que s; por tanto, por nuestra hipótesis inductiva,

$$[x](\mathfrak{M}'')_H \equiv [x]\,(\mathfrak{M}')_H \equiv X.$$

Pero $(\mathfrak{M}'')_H$ se obtiene a partir de $(\mathfrak{M}')_H$ poniendo $([x/y]\ \mathfrak{P})$ en lugar de Zx. Se sigue por § E(3) y § A3 que

$$[x]\,([x/y]\ \mathfrak{P})_H \equiv [x]\,[x/y]\ \mathfrak{P}_H \equiv Z.$$

Por tanto, por el teorema D3,

$$P_H \equiv [y]\ \mathfrak{P}_H \equiv [x]\,[x/y]\ \mathfrak{P}_H \equiv Z.$$

Por tanto, (14) vale en este caso.

No queda por considerar más que la segunda de las posibilidades de (28). Supongamos que los pasos de orden 0 dan

$$Z_1 y_2 (y_1 y_2) \succ \mathfrak{P}.$$

Entonces los mismos pasos darán la reducción

$$Z_1 y_2 (Z_2 y_2) \succ \mathfrak{Q} \equiv [Z_2/y_1]\, \mathfrak{P}$$

en la cual Z_2 se trata como indeterminada. Por el párrafo anterior

(30) $$[y_2]\, \mathfrak{Q}_H \equiv Z \equiv \mathsf{S} Z_1 Z_2.$$

Por § E(3),

$$\mathfrak{Q}_H \equiv [Z_2/y_1]\, \mathfrak{P}_H,$$

y, por tanto, puesto que las variables han sido elegidas adecuadamente,

$$[y_2]\, \mathfrak{Q}_H \equiv [y_2]\, [Z_2/y_1]\, \mathfrak{P}_H \equiv [Z_2/y_1]\, [y_2]\, \mathfrak{P}_H.$$

En la medida en que esto vale para un Z_2 cualquiera, tenemos, por (30)

$$[y_2]\, \mathfrak{P}_H \equiv \mathsf{S} Z_1 y_1.$$

Por tanto,

$$P_H \equiv ([y_1]\, [y_2]\, \mathfrak{P}_H)\, Z_2 \equiv \mathsf{S} Z_1 Z_2 \equiv Z.$$

Esto completa la demostración del teorema 7.

e. Vamos a deducir ahora algunos corolarios del teorema 7.

COROLARIO 7.1. *Si X está en forma normal y $X \succ Y$, entonces $X \equiv Y$.*

COROLARIO 7.2. *Si X está en forma normal y $X = Y$, entonces $Y \succ X$.*

Demostración. Por la propiedad de Church-Rosser, hay un Z tal que $X \succ Z$ e $Y \succ Z$. De la primera de esas dos afirmaciones inferimos $Z \equiv X$ por el corolario 7.1.

COROLARIO 7.3. *Condición necesaria y suficiente de que X esté en forma normal es que*

$$X \succ_N X.$$

Demostración. La condición es claramente suficiente. Por otro lado, sea un Y tal que $Y \succ_N X$. Entonces Y_λ cnv X_λ (Teorema 1 (I) y teorema E3) Y_λ tiene una forma normal-β (teorema 6), y, por tanto,

una forma normal-βη (§ 4D2). Entonces X_λ tiene una forma normal-β. Por tanto (teorema 6), hay un Z tal que $X \succ_N Z$. Por el corolario 7.1 $Z \equiv X$.

COROLARIO 7.4. *Esté X en forma normal, y sea A la forma normal-β de X_λ. Entonces A está en forma normal-βη.*

Demostración. Por el teorema 6 y el corolario 7.3, $X \equiv A_H$. Supongamos que A tiene un componente B de la forma $\lambda x.Cx$. Entonces $B_H \equiv C_H$. Sea una reducción-β de X_λ a A, formada, como en § 3, a partir de una reducción-I-II que parte de X y empieza eliminando todos los combinadores adventicios debidos a prefijos λ situadas a la izquierda de B y que es normal a partir de ellos. Entonces se formará B_H ($\equiv C_H$) y luego se le tratará como un todo hasta que le llegue la vez de ser reducido. Como en § b, caso 2, C_H empezará por una indeterminada. Ulteriores reducciones reducirán B_H a C, no a B. Por tanto, no puede haber tal componente B, q. e. d.

5. PROBLEMAS IRRESUELTOS

Hay varias cuestiones respecto de la reducción fuerte cuyas soluciones no se conocen aún. Enumeraremos algunas de ellas.

a. ¿Qué efecto tendrá una generalización de las especificaciones de los tipos I y II de modo que se admita obs-$\mathscr{J}$ que no sean necesariamente obs-$\mathscr{H}$?

b. Supongamos que definimos una reducción típica eliminando la condición N2 de las reducciones normales. Esto permite «congelar» ciertos combinadores o extensos II; no tenemos entonces un algoritmo único, pero sí que tenemos que proceder de un modo análogo al del procedimiento del § 4E1. ¿Es verdad, con una tal definición, que siempre que vale (2) hay una reducción típica de X a Y? En caso negativo, ¿es siempre posible encontrar un Z tal que $Y \succ Z$ y que haya una reducción típica de X a Z?

c. ¿Es posible demostrar directamente la propiedad de Church-Rosser para la reducción fuerte sin recurrir a transformaciones entre esta teoría y la de la conversión λ? Si lo es, ¿puede esa transformación aprovecharse para dar una demostración independiente del teorema de Church-Rosser en el cálculo λ?

d. ¿Puede axiomatizarse la teoría como hicimos con la de la igualdad en § C?

S. TEMAS SUPLEMENTARIOS

1. Comentario histórico

Como hicimos notar ya en la introducción (§ 0D), la primera teoría sintética de combinadores se dio en [GKL]. Era una formulación de $\mathscr{H}_\eta$, aunque que consideraba también una reducción a forma logística (cfr. capítulo 7). Los combinadores primitivos eran B, C, W y K. No se usaba ningún concepto de la conversión lambda. La idea básica era la correspondencia entre un combinador U y una combinación $\mathfrak{U}$ definida por § A (1). Se mostraba entonces que la igualdad de dos combinadores correspondientes a la misma combinación podía derivarse de los axiomas. El sistema se perfeccionó en algunos asuntos de detalle en [ATC]. Las variables aparentes se introdujeron por vez primera en [AVS]. En este caso,

$$[x_1, \ldots, x_n]\ \mathfrak{X}$$

se definía de una vez para un n cualquiera, de modo que la definición recursiva de § A (4) era derivable como teorema.

El estadio siguiente en el desarrollo de esta temática fue la tesis de Rosser, [MLV]. El problema principal de Rosser consistía en poner la teoría de combinadores en línea con la teoría de Church. Esta última era una teoría de βI-conversión. Por tanto, Rosser tenía que formular un sistema que, en primer lugar, era un sistema β y, en segundo lugar, carecía del combinador K. Pero, además de hacer eso, Rosser introdujo algunas otras innovaciones de considerable importancia. Usó como combinadores primitivos I y el J considerado en § 5B3. Al establecer los teoremas fundamentales de completud Rosser siguió [GKL]; pero como ya existía la teoría de la conversión lambda, Rosser pudo ir más allá y demostrar la equivalencia de su sistema con la teoría de la conversión lambda según líneas que son la base de nuestra sección § E.

Algunos de los perfeccionamientos debidos a Rosser pueden, sin duda, aplicarse a teorías de combinadores que no supongan las restricciones que él tuvo que imponerse para que la teoría se conformara al cálculo de Church. Esta idea se desarrolló en [RFR] y [CCT], sólo el segundo de los cuales tiene referencia con este capítulo.

Ninguno de esos tratamientos utilizó el operador de Schönfinkel S, ni se notó por entonces cómo puede usarse ese combinador para conseguir definiciones por inducción estructural, como se ha hecho aquí en § A. De todos modos, Rosser usó en su tesis un tipo de razonamiento parecido, y en su trabajo [NSP], de 1941, mostró cómo este principio de inducción estructural puede utilizarse para definir $[x]\ \mathfrak{X}$ de tal modo que los teoremas de completud resulten casi inmediatamente derivables, como en § E. Se trataba también, en este caso, de una teoría para el sistema β sin combinador K. Al final de su trabajo Rosser indicaba una formulación para el sistema con K, declarando que podía usarse análogamente para la fundamentación de aquella teoría.

La formulación de Rosser [NSP] para el sistema K contenía un error (cfr. [res. R]). En [STC] [19] se elaboró una formulación revisada; Rosenbloom publicó, con entera independencia, otra en su [EML]. Rosser ha publicado recientemente una revisión en su [DEL]; nos ha llegado demasiado tarde para poder influir esencialmente en nuestro tratamiento.

---

[19] El texto de [STC], que se publicó sin que el autor tuviera oportunidad de leer las galeradas, contiene numerosos errores, los más serios de los cuales son:

1) La formulación de (f), pág. 395, debe decir: Si $X = Y$, entonces $XZ = YZ$.

2) En la introducción a § 3, en vez de 'implicará la igualdad' debe decir 'será implicado por la igualdad'.

3) En la formulación del Ax. K, B^2IK debe ser B^3IK. De todos modos, el axioma allí propuesto debe sustituirse por el considerado en § C.

El tratamiento de § C del presente capítulo es esencialmente el de [STC]; hemos hecho algunas mejoras por lo que respecta al sistema β, que en [STC] se trató brevemente y a título de ensayo. El contenido de § D se presentó en forma esencialmente idéntica a un seminario que dirigimos en la Universidad de Lovaina en 1950-51. Lo mismo puede decirse por lo que hace a § E, excepto en que no se formularon aún explícitamente los sistemas $\mathscr{J}$ y $\mathscr{M}$; pero las ideas fundamentales de § E deben atribuirse, como hemos dicho, a Rosser, y su [DEL] da un elegante tratamiento directo del tema. Por lo que hace a § F, es materia nueva, y nuestros resultados siguen siendo incompletos, pero suficientes para el capítulo **10**.

2. Representación normal de una combinación

Aunque los métodos ofrecidos en el texto superan a los de [GKL] y los de Rosser [MLV] para el objetivo de formar una base para la equivalencia del § E, de todos modos los métodos antiguos siguen teniendo algún interés. Por de pronto, permiten escribir explícitamente un combinador U que representa una combinación $\mathfrak{U}$, como en § A (1), de un modo sistemático y mucho más cómodamente que mediante el uso de los algoritmos de § A3, por lo menos, que los que no contienen cláusula (c). Por esta razón vamos a dar un resumen de ese método. Las cuestiones de detalle deberán verse en los citados trabajos originales.

El primer paso consiste en definir una representación normal, U, de una combinación dada, $\mathfrak{U}$. Esto se hace en tres estadios, del modo siguiente:

1) Reducción al caso en que $\mathfrak{U}$ es una combinación pura. Supongamos que $\mathfrak{U}$ contiene las constantes primitivas (átomos) $a_1, \ldots, a_p$, y que $\mathfrak{U}'$ se obtiene por sustitución de $v_1, \ldots, v_p$ por las variables $a_1, \ldots, a_p$, respectivamente. (Consideramos obvio el sentido de la operación que consiste en sustituir un átomo por una variable.) Pongamos que U' representa a $\mathfrak{U}'$ como función de $v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_n$; entonces $U'a_1 \ldots a_p$ representará a $\mathfrak{U}$ como función de $u_1, \ldots, u_n$.

2) Reducción a combinaciones regulares. Toda combinación pura U es de la forma

$$v\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2 \ldots \mathfrak{U}_m,$$

siendo v una variable. Si v no se presenta en $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_m$, la combinación se llama regular. Si $\mathfrak{U}$ no es regular, sea w una variable que no aparezca en $\mathfrak{U}$, y sea

$$\mathfrak{U}' = wv\ \mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2 \ldots \mathfrak{U}_m.$$

Entonces $\mathfrak{U}'$ es regular. Si U' representa a $\mathfrak{U}'$, entonces U'I representará a $\mathfrak{U}$.

3) Análisis de una combinación regular. Si $\mathfrak{U}$ es regular, entonces U es un combinador regular por definición. Para presentar U en cierta forma normal, observaremos que podemos convertir la secuencia $u_0, u_1, \ldots, u_n$ en la combinación $\mathfrak{U}$ por medio de una secuencia de cuatro pasos, del modo siguiente:

a) Cancelación de las u_i que no se presentan en $\mathfrak{U}$.

b) Repetición de los u_i restantes, sin alterar su orden, hasta que cada u_i aparezca en la secuencia exactamente tantas veces cuantas sean sus instancias en $\mathfrak{U}$.

c) Disposición de las variables precisamente en el mismo orden en que aparecen en $\mathfrak{U}$ (no es necesario permutar entre ellas instancias diferentes de una misma variable).

d) Inserción de paréntesis.

De lo que hemos visto sobre combinadores regulares en § 5D se sigue que estas cua-

---

[20] Para $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{W}$ y $\mathfrak{B}$ la regla es que factores de k mayor están a la izquierda de los que la tienen menor; para $\mathfrak{C}$ la forma normal es más compleja (cfr. [ATC]) y está sujeta a la restricción de que instancias diversas de la misma variable no se permutan. Tiene que haber, naturalmente, algún orden típico de las $a_1, \ldots, a_p$.

tro transformaciones pueden efectuarse por la regla de reducción de un combinador regular de la forma

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{W} \cdot \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{B},$$

siendo $\mathfrak{A}$ un producto de los K_k, $\mathfrak{W}$ de los W_k, $\mathfrak{C}$ de los C_k y $\mathfrak{B}$ de combinadores B^kB^j. Si el combinador así obtenido no es de orden suficientemente alto (como puede ocurrir cuando haya variables vacías al final de $\mathfrak{U}$), podemos alcanzar dicho orden prefijando un factor de la forma B^kI.

Dadas ciertas restricciones [20], el combinador U está determinado unívocamente; podemos entonces llamar a *U representante normal* de $\mathfrak{U}$.

En [GKL] se encontraron axiomas suficientes para conseguir que todo U representante de $\mathfrak{U}$ pueda transformarse en el representante normal de $\mathfrak{U}$. Esto equivale a establecer (3). Rosser [MLV] mostró cómo pueden modificarse esos axiomas para aceptar las restricciones de la teoría βI. Como la presente demostración es mucho más sencilla y los axiomas no son esencialmente más complicados, las viejas teorías axiomáticas tienen escaso interés.

3. Semigrupos combinatorios

La idea de representación normal subraya la noción de combinador regular y la de producto compuesto. Efectivamente, los combinadores regulares forman un semigrupo respecto del producto compuesto, y los axiomas de [GKL] y Rosser [MLV] se transforman fácilmente en un conjunto (infinito) de relaciones productoras del mismo.

Church [CLS] mostró que los combinadores en general forman un semigrupo con cuatro generadores (a saber, C_*I, C_*J, B, C_*).

Fundamentos logísticos

Vamos a ocuparnos ahora del problema de la construcción de la estructura primitiva de un sistema logístico de carácter muy sencillo que nos sirva como fundamentación última. En la primera sección consideraremos algunos rasgos generales del problema; su solución detallada nos ocupará en las siguientes secciones.

En este capítulo hemos tenido la colaboración de W. Craig, que ha puesto a nuestra disposición trabajo sin publicar, resultados obtenidos cuando trabajaba para este proyecto en el verano de 1954. Sus nuevos resultados están expuestos por él mismo en § E; pero algunas de sus indicaciones por lo que hace a la exposición y a la motivación están recogidas en el resto del texto.

A. PRELIMINARES

1. Especificaciones generales para el sistema básico

La estructura primitiva que buscamos tendrá el sencillo carácter siguiente:

a) El sistema es de forma logística, es decir, no tiene más que un predicado, la aserción, indicado por el prefijo '$\vdash$'. Las proposiciones elementales son de la forma

$$\vdash X, \tag{1}$$

siendo X un ob.

b) El sistema es aplicacional, es decir, la aplicación es la única operación del sistema.

c) El sistema es completamente formal (§ 1E5). Hay una única categoría de obs, y la aplicación de un ob a otro es siempre un ob. En particular, no hay distinción entre fórmulas y ob básicos, como resulta fre-

cuentemente necesario cuando un sistema no-logístico se convierte a forma logística (cfr. § 1E2) [1].

d) No hay más que un número finito de átomos.

e) No hay más que un número finito de axiomas. No existe ningún esquema axiomático que contenga infinitos axiomas.

f) No hay más que un número finito de reglas, cada una de ellas con una o dos premisas, y tal que la conclusión está unívocamente determinada si las premisas están dadas. Llamamos *determinísticas* a las reglas de este carácter [2].

2. Reglas E

Tenemos aún otra particularidad en el sistema aquí presentado. Tendremos un ob **E**, no necesariamente primitivo, tal que

$$(2) \qquad \vdash \mathsf{E}X$$

es válida para todo ob X. Para tener esto en combinación con las condiciones ya dichas hay que postular (2) para todos los átomos, y hay que postular también la siguiente regla:

Regla E. $\quad \vdash \mathsf{E}X \,\&\, \vdash \mathsf{E}Y \rightarrow \vdash \mathsf{E}(XY).$

En este caso, cuando formamos una extensión de nuestro sistema añadiéndole indeterminadas, hay que entender que (2) queda postulado también para dichas indeterminadas. E es, pues, una categoría universal en el sentido de § 2C3. La presencia de E tiene como consecuencia el que la proposición

$$X \text{ es un ob}$$

sea siempre expresable como proposición elemental de la teoría propia. Todas las extensiones se convierten en extensiones mediante axiomas. Y el sistema resulta así completamente formal en un sentido muy fuerte.

Por medio de E podemos convertir en reglas determinísticas algunas que no lo son. Pues si la conclusión de la regla menciona un ob X res-

---

[1] Este punto se elabora en § E.

[2] Rosser [MLV] subrayó lo deseable que es no tener más que reglas determinísticas. Entonces la inferencia en cada paso puede describirse unívocamente con sólo especificar las premisas y la regla que hay que aplicar. Sigue habiendo, sin duda, cierta libertad de elección por lo que hace al último punto; si no la hubiera, estaríamos (esencialmente) en presencia de un algoritmo (Markov [TAl]).

pecto del cual no se especifica nada en las premisas podemos añadir la premisa $\vdash \mathsf{E}X$ para eliminar esta particular indeterminación. De este modo pueden reducirse a reglas determinísticas incluso esquemas axiomáticos [3].

En las teorías de Church y Rosser 'E' se usaba para indicar una categoría de obs más restringida. En vez de la regla E sus teorías contenían una regla que, en nuestra notación, sería

$$XY \vdash \mathsf{E}Y. \tag{3}$$

No está completamente claro cuáles son las propiedades de un tal E, ni si su introducción tiene alguna utilidad [4]. Construiremos nuestra teoría de tal modo que la posibilidad de usar un tal E restringido sea admisible hasta cierto punto; pero no dedicaremos mucha atención al estudio de un tal E.

3. Igualdad

En un sistema logístico la ecuación $X = Y$ tiene que expresarse en la forma

$$\vdash \mathsf{Q}XY, \tag{4}$$

siendo Q un ob. Por otro lado, la igualdad tiene que ser equivalente a la relación (para la notación, cfr. § 2B5),

$$\text{para todo ob } Z, \vdash ZX \rightarrow \vdash ZY, \tag{5}$$

que expresa como principio la definición de igualdad de Leibniz. Siguiendo a Rosser [MLV] hallaremos unas reglas para que la relación (5) tenga las propiedades de la igualdad en el sistema $\mathscr{H}$, y luego definiremos Q de tal modo que (4) equivalga a (5). El trabajo tiene, pues, dos partes, que corresponden sucesivamente a los §§ B y C.

---

[3] En sistemas no-logísticos el papel de $\vdash \mathsf{E}X$ puede ser desempeñado por otras formas de predicado universal, como $X = X$.

[4] Church y Rosser objetan por principio a la presencia de una categoría universal en el sistema. Esto se relaciona probablemente con la insistencia de Church por poseer una forma normal como criterio de significación. Para ulterior discusión cfr. § 0D, especialmente la nota 22; también § S1, § 3S3.

B. LAS REGLAS COMBINATORIAS

La relación de igualdad en el sistema $\mathscr{H}$ está definida por las propiedades (ρ), (σ), (τ), (μ), (ν), (K), (S) y, en el caso de $\mathscr{H}_\beta$ y $\mathscr{H}_\eta$, los axiomas combinatorios $(\omega)_\beta$ y $(\omega)_\eta$. De esas propiedades (ρ), (σ), (K) y (S) son esquemas axiomáticos, mientras que (σ), (μ), (ν) y (τ) son reglas de inferencia. Vamos a mostrar en esta sección que reforzando los esquemas axiomáticos podemos eliminar (σ), (μ) y (ν) —igual que eliminamos (ν) en § 6B—, de tal modo que podamos derivar esas propiedades de los esquemas axiomáticos y (τ).

Como nuestra discusión se aplicará a más de una relación, desarrollaremos la teoría en términos de una relación no especificada, $\boldsymbol{R}$ (véase § 2D). Postulamos simplemente un sistema aplicacional, $\mathfrak{S}$, que contenga los combinadores K y S, y que $\boldsymbol{R}$ sea una relación, elemental o epiteorética, entre los obs de $\mathfrak{S}$.

Nuestra discusión se aplicará, en particular, a la relación epiteorética § A (5) en un sistema logístico. Especializada $\boldsymbol{R}$ de este modo, las propiedades (ρ) y (τ) son obvias. Por tanto, nuestra teoría puede basarse en los esquemas axiomáticos para esta $\boldsymbol{R}$. Interpretados en el sistema logístico, se convierten en reglas de una premisa. Cuando el sistema $\mathscr{H}$ es $\mathscr{H}_0$, las reglas así obtenidas se llaman *reglas combinatorias.*

1. Propiedades de relaciones

Puesto que la propiedad (μ) nos permite inferir de

$$X\,\boldsymbol{R}\,Y$$

que, para todo Z,

$$ZX\,\boldsymbol{R}\,ZY,$$

será conveniente definir la relación $[\boldsymbol{R}]$ tal que

(1) $\qquad X\,[\boldsymbol{R}]\,Y \rightleftarrows ZX\,\boldsymbol{R}\,ZY$ para todo ob Z.

Podemos aplicar esta notación, en particular, a la relación $\vdash$ tal como quedó definida en § 2B (5); la relación resultante $[\vdash]$ es precisamente la relación § A(5). Usaremos, además, la notación '$\boldsymbol{R}^C$' para denotar la recíproca de $\boldsymbol{R}$, de tal modo que

(2) $\qquad X\,\boldsymbol{R}^C\,Y \rightleftarrows Y\,\boldsymbol{R}\,X.$

En esta notación las propiedades de la igualdad para sistemas $\mathscr{H}$, formuladas para una relación $\boldsymbol{R}$ sin especificar, son como sigue:

$$(\rho) \qquad X\ \boldsymbol{R}\ X,$$
$$(\sigma) \qquad X\ \boldsymbol{R}\ Y \rightarrow X\ \boldsymbol{R}^{C}\ Y,$$
$$(\tau) \qquad X\ \boldsymbol{R}\ Y\ \&\ Y\ \boldsymbol{R}\ Z \rightarrow X\ \boldsymbol{R}\ Z,$$
$$(\mu) \qquad X\ \boldsymbol{R}\ Y \rightarrow X\ [\boldsymbol{R}]\ Y,$$
$$(\nu) \qquad X\ \boldsymbol{R}\ Y \rightarrow XZ\ \boldsymbol{R}\ YZ,$$
$$(\mathsf{S}) \qquad \mathsf{S}XYZ\ \boldsymbol{R}\ XZ(YZ),$$
$$(\mathsf{K}) \qquad \mathsf{K}XY\ \boldsymbol{R}\ X.$$

En relación con sistemas logísticos necesitaremos también las propiedades

$$(\theta) \qquad X\ \boldsymbol{R}\ Y \rightarrow X \vdash Y,$$
$$(\varphi) \qquad X\ \boldsymbol{R}\ Y \rightarrow X\ [\vdash]\ Y,$$
$$(\Psi) \qquad X\ [\vdash]\ Y \rightarrow X\ \boldsymbol{R}\ Y.$$

Usaremos esas mismas letras entre corchetes como nombres de las correspondientes propiedades de $[\boldsymbol{R}]$; así, $[\mathsf{K}]$[5] es la propiedad

$$Z(\mathsf{K}XY)\ \boldsymbol{R}\ ZX \text{ para todo ob } Z.$$

Análogamente, el índice C indicará propiedades de la relación recíproca, de tal modo que $(\mathsf{K})^{C}$, por ejemplo, es

$$X\ \boldsymbol{R}\ \mathsf{K}XY.$$

El hecho de que una relación $\boldsymbol{R}$ tiene una determinada propiedad puede indicarse también afijando la letra griega denotadora de la propiedad a '$\boldsymbol{R}$' como índice o exponente. Así, '$\boldsymbol{R}^{\theta}$' indica que $\boldsymbol{R}$ tiene la propiedad (θ). En tales indicaciones puede ponerse en vez de '$\boldsymbol{R}$' también '$[\boldsymbol{R}]$', '$\vdash$', '$[\vdash]$', '$\boldsymbol{Q}$', etc. La conjunción de propiedades se indica yuxtaponiendo los índices; así, '$\boldsymbol{R}^{\sigma\tau}$' indica que $\boldsymbol{R}$ es simétrica y transitiva.

Decimos que $\boldsymbol{R}$ tiene las *propiedades de la igualdad* si —y sólo si— $\boldsymbol{R}$ obedece a (ρ), (σ), (τ), (μ), (ν), (S), (K) y (θ). Las reglas (I), (φ) y (Ψ) se siguen entonces como consecuencias (en el caso de que $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}$; en otro caso añadimos (I)).

---

[5] Esta es una convención ocasional y no excluye el uso de '[K]' para otros fines en otros contextos.

2. Interrelaciones de las propiedades

Podemos eliminar la propiedad (σ) como regla primitiva por el simple expediente de establecer los postulados para $\boldsymbol{R}$ a pares, derivando cada postulado del par de su pareja por el intercambio de $\boldsymbol{R}$ con $\boldsymbol{R}^C$. Entonces se sigue por inducción deductiva que vale (σ).

El principio que subyace a la eliminación de (μ), que se debe a Rosser [MLV], es el siguiente: para evitar la necesidad de aplicar (μ) a un axioma adoptamos en lugar de ese axioma el axioma correspondiente para $[\boldsymbol{R}]$. $[\boldsymbol{R}]$ es transitiva si lo es $\boldsymbol{R}$; si podemos, además, mostrar que vale $[\boldsymbol{R}]^{\mu}$, entonces podemos derivar para $[\boldsymbol{R}]$ el análogo del teorema original para $\boldsymbol{R}$. Luego podemos volver al teorema original usando la recíproca de (μ), la cual es, a su vez, una consecuencia del par (I), $(\mathsf{I})^C$ (lema 1). Queda, pues, por mostrarse que $[\boldsymbol{R}]^{\mu}$ se sigue de los esquemas axiomáticos modificados y de (τ). Esto se realiza en el lema 4.

Lema 1. *Si* (τ), (I), $(\mathsf{I})^C$; *entonces* (ρ) *y*

$$X\ [\boldsymbol{R}]\ Y \rightarrow X\ \boldsymbol{R}\ Y. \tag{3}$$

Demostración.

$$\mathsf{I}X\ \boldsymbol{R}\ X \qquad \text{por (I).} \tag{4}$$
$$X\ \boldsymbol{R}\ \mathsf{I}X \qquad \text{por } (\mathsf{I})^C. \tag{5}$$

Por tanto, $X\ \boldsymbol{R}\ X$, que es (ρ), se sigue por (τ).

Para demostrar (3), supongamos la hipótesis $X\ [\boldsymbol{R}]\ Y$. Entonces

$$\mathsf{I}X\ \boldsymbol{R}\ \mathsf{I}Y \qquad \text{por (1).} \tag{6}$$
$$\mathsf{I}Y\ \boldsymbol{R}\ Y \qquad \text{por (4).} \tag{7}$$

De aquí, por (5), (6), (7) y (τ),

$$X\ \boldsymbol{R}\ Y, \qquad \text{q. e. d.}$$

Lema 2. *Si* (τ), (K), (S), [K], $(\mathsf{K})^C$, $(\mathsf{S})^C$, $[\mathsf{K}]^C$, entonces

$$X\ [\boldsymbol{R}]\ Y \rightarrow XZ\ \boldsymbol{R}\ YZ \tag{8}$$

para todo ob $\boldsymbol{Z}$.

Demostración. En la demostración del teorema **6**B1 derivamos la conclusión de (8) a partir de la premisa $X\ \boldsymbol{R}\ Y$ utilizando las reglas (τ), (μ), (K), (S), $(\mathsf{K})^C$, $(\mathsf{S})^C$. Pero (μ) no se usó en aquella demostración más que para derivar las líneas (1) y (2) de la misma. Si hubiéramos partido ya con $X\ [\boldsymbol{R}]\ Y$, entonces § **6**B(1) se habría seguido inmediatamente de la definición de $[\boldsymbol{R}]$. En el caso de § **6**B(2) podríamos sustituir el uso de (K) y (μ) por el uso de [K]; la relación recíproca requiere, además, $[\mathsf{K}]^C$. Por tanto, con las reglas supuestas en este lema podemos derivar la misma conclusión que entonces, ahora a partir de $X\ [\boldsymbol{R}]\ Y$; es decir, podemos derivar (8).

LEMA 3. *Si* (τ), [K], (S), $[\mathsf{K}]^C$ $(\mathsf{S})^C$ *y* (8), *entonces* [μ].

Demostración. Supongamos $X\ [\boldsymbol{R}]\ Y$. Entonces, para un U cualquiera,

(9) $$UX\ \boldsymbol{R}\ UY.$$

Pongamos aquí $U \equiv \mathsf{S}(\mathsf{K}V)Z$. Entonces, por (S),

$$UY\boldsymbol{R}\ \mathsf{K}VY(ZY).$$

Pero

$$\mathsf{K}VY\ [\boldsymbol{R}]\ V \qquad \text{por [K].}$$
$$\mathsf{K}VY(ZY)\ \boldsymbol{R}\ V(ZY) \qquad \text{por (8).}$$

De aquí, por (τ),

(10) $$UY\ \boldsymbol{R}\ V(ZY).$$

Análogamente, por las reglas de $\boldsymbol{R}^C$,

(11) $$V(ZX)\ \boldsymbol{R}\ UX.$$
$$V(ZX)\ \boldsymbol{R}\ V(ZY) \qquad \text{por (11), (9), (10), (τ).}$$

Por tanto, por (1) $$ZX\ [\boldsymbol{R}]\ ZY, \qquad \text{q. e. d.}$$

LEMA 4. *Si* $\boldsymbol{R}$ *tiene la propiedad* (τ), *y si* $\boldsymbol{R}$ *y* $\boldsymbol{R}^C$ tienen ambas [S], [K] *e* (I), *entonces* $\boldsymbol{R}$ *tiene las dos propiedades* (μ) *y* (ν).

Demostración. Supongamos satisfecha la hipótesis. Entonces tenemos (3) por el lema 1. Las reglas (K) y (S) se siguen de [K] y [S] por (3). Por tanto, tenemos (8) por el lema 2, y (μ) por el lema 3. Por último, tenemos (ν) por el teorema **6**B1, puesto que [τ] no es **más que un caso** especial de (τ).

3. Propiedades de $[\vdash]$

Si $\boldsymbol{R}$ es $\vdash$, las propiedades (ρ) y (τ) son claras. Por otra parte, (θ) vale de modo trivial para $\vdash$ y también, por tanto, para $[\vdash]$ si tenemos (3). Consecuentemente, tendremos todas las propiedades deseadas para $[\vdash]$ si postulamos (I), [K], [S] y sus recíprocas para $\vdash$. Esto nos lleva a la forma de reglas combinatorias de Rosser, que son del modo siguiente (si hay que tomar a I como primitiva, añadiremos [I] e $[\mathrm{I}]^C$:

Regla I_1.	$\mathrm{I}X \vdash X.$
Regla I_2.	$X \vdash \mathrm{I}X.$
Regla K_1.	$Z(\mathrm{K}XY) \vdash ZX.$
Regla K_2.	$ZX \,\&\, \mathrm{E}Y \vdash Z(\mathrm{K}XY).$
Regla S_1.	$U(\mathrm{S}XYZ) \vdash U(XZ(YZ)).$
Regla S_2.	$U(XZ(YZ)) \vdash U(\mathrm{S}XYZ).$

Nuestra discusión ha justificado el siguiente:

Teorema 1. *Las reglas* I_1, I_2, K_1, K_2, S_1, S_2 *implican que* $[\vdash]$ *tiene todas las propiedades de la igualdad.*

Observación 1. Este teorema equivale a mostrar que la igualdad en el sistema $\mathscr{H}_0$ tiene la interpretación $[\vdash]$ si valen las reglas combinatorias. Si se aplica el mismo procedimiento a $\mathscr{H}_\beta$ (o $\mathscr{H}_\eta$), cada uno de los axiomas (ω_β) (o (ω_η)) se convierte en un par de reglas de una premisa. Una tal formulación ha sido de alguna importancia en la obra de Church [6].

C. LOS SISTEMAS $\mathscr{Q}$

Consideremos ahora una igualdad definida en términos de un ob Q, del modo siguiente:

$$X = Y \rightleftarrows \vdash \mathrm{Q}XY. \tag{1}$$

Llamaremos relación Q a la relación así formada. Nos preguntamos ahora qué postulados nos garantizarán que la relación $\boldsymbol{Q}$ tiene todas las propiedades de la igualdad. No nos sorprenderá hallar en el § 1 que las propie-

---

[6] Cfr., por ejemplo, su [CLC] § 15. Cfr. algunas generalizaciones en § E.

dades esenciales son $Q^{\rho\varphi}$. Sometida a interpretación, Q^{φ} es la propiedad de Leibniz de la igualdad, y $Q^{\rho\varphi}$ son, por ejemplo, las propiedades tomadas como básicas por [HB] [7]. En §§ 2-3 consideraremos otras propiedades de la relación Q, y la formulación del sistema $\mathcal{Z}_0$.

1. Teoremas preliminares

Empezaremos por demostrar unos sencillos lemas.

Lema 1. *Si* $R^{\theta\mu}$, *entonces* R^{φ}.
Demostración. Clara.
Lema 2. *Si* Q^{ρ}, R^{θ}, *entonces* $X\ [R]\ Y \rightarrow X = Y$.
Demostración. Supongamos que $X\ [R]\ Y$.

Entonces	$QXX\ R\ QXY$	por def. de $[R]$.
Por tanto,	$QXX \vdash QXY$	por R^{θ}.
Y, consiguientemente,	$\vdash QXY$	por Q^{ρ}, q. e. d.

Lema 3. *Si* Q^{ρ}, *entonces* Q^{ψ}.
Demostración. Este es el caso especial $R \equiv \vdash$ del lema 2.
Lema 4. *Si* $Q^{\rho\varphi}$, *entonces* $X = Y \rightleftarrows X\ [\vdash]\ Y$.
Demostración. En este caso tenemos $Q^{\varphi\psi}$.
Teorema 1. *Si valen las reglas combinatorias y si* $Q^{\rho\varphi}$, *entonces* Q *tiene todas las propiedades de la igualdad.*

Llamaremos sistema $\mathcal{Z}$ a un sistema logístico aplicacional con los obs Q, S, K, en el cual valen las reglas combinatorias de § B, las reglas E de § A, las reglas $Q^{\rho\varphi}$ y algún conjunto de axiomas (ω), definiéndose por (1) la igualdad en estos últimos. Un subíndice puesto a '$\mathcal{Z}$' indicará el conjunto (ω) que se toma en cada caso; si el subíndice es 0 no se toma ningún conjunto de axiomas (ω). Puede formarse, naturalmente, un sistema $\mathcal{Z}_\beta$ $(\mathcal{Z}_\eta)$ añadiendo (ω_β) $((\omega_\eta))$ a $\mathcal{Z}_0$.

A cada uno de estos sistemas $\mathcal{Z}$ asociamos el sistema $\mathcal{H}$ con los mismos axiomas (ω). Se sobreentiende obviamente que Q aparece en $\mathcal{H}$ como indeterminada [8] —es decir, que tenemos una extensión de los obs del sistema $\mathcal{H}$ de § 6C, la cual contiene precisamente los átomos que se presentan en $\mathcal{Z}$.

Nuestra discusión establece por inducción deductiva el siguiente

---

[7] Vol. 1, pág. 165; cfr. Tarski [ILM], § 17.
[8] Si Q está definida en términos de otros átomos, aquellos de éstos que no son combinadores se suponen indeterminados en $\mathcal{H}$.

TEOREMA 2. *Si $X = Y$ vale en un sistema $\mathscr{H}$, entonces vale también en el sistema asociado $\mathscr{Q}$.*

El recíproco de este teorema, que es la consistencia de $\mathscr{Q}$ respecto de $\mathscr{H}$, nos ocupará en § D2.

2. PROPIEDADES EN BASE A LA DEDUCIBILIDAD FUERTE

Aunque la relación $\boldsymbol{Q}$ en un sistema $\mathscr{Q}$ tiene todas las propiedades de la igualdad, sin embargo, para algunas de ellas esto ha quedado sólo demostrado en un sentido débil. Así, por ejemplo, lo que hemos mostrado para $\boldsymbol{Q}^{\sigma}$ es que, dada una demostración de $X = Y$, podemos construir partiendo de esto una demostración de $Y = X$, a saber, usando las reglas de $\boldsymbol{R}^{C}$ en lugar de las de $\boldsymbol{R}$. Pero la propiedad $\boldsymbol{Q}^{\sigma}$ vale en el sentido más fuerte de que podemos deducir $Y = X$ a partir de $X = Y$ utilizando simplemente las reglas de procedimiento; dicho de otro modo, interpretando como '$\Rightarrow$' el signo de implicación '$\rightarrow$'. Cuando una regla vale con el signo de implicación interpretado en este sentido diremos que vale en *sentido fuerte*. Suponemos que $\boldsymbol{Q}^{\rho}$ y $\boldsymbol{Q}^{\varphi}$ valen en sentido fuerte. Entonces tenemos:

TEOREMA 3. *En un sistema $\mathscr{Q}$ las reglas $\boldsymbol{Q}^{\tau\sigma\mu SK}$ valen en sentido fuerte.*

Demostración de $\boldsymbol{Q}^{\tau}$. Supongamos que $Y = Z$.

Entonces $\quad Y\ [\vdash]\ Z \qquad$ por $\boldsymbol{Q}^{\varphi}$.

$\mathsf{Q}XY \vdash \mathsf{Q}XZ \qquad$ por def. de $[\vdash]$.

Por tanto, si $X = Y$, $\quad X = Z \qquad$ q. e. d.

Demostración de $\boldsymbol{Q}^{\sigma}$. Supongamos que $X = Y$.

Entonces $\quad X\ [\vdash]\ Y \qquad$ por $\boldsymbol{Q}^{\varphi}$.

De aquí, por la definición de $[\vdash]$,

(2) $\qquad \mathsf{SQ}(\mathsf{K}X)X \vdash \mathsf{SQ}(\mathsf{K}X)Y.$

Ahora bien, $\qquad \mathsf{SQ}(\mathsf{K}X)Y \vdash \mathsf{Q}Y(\mathsf{K}XY) \qquad$ por $(\vdash)^{S}$.

Por tanto, por las reglas K_1 y (τ),

(3) $\qquad \mathsf{SQ}(\mathsf{K}X)Y \vdash \mathsf{Q}YX.$

Análogamente, utilizando las reglas recíprocas,

(4) $\qquad \mathsf{Q}XX \vdash \mathsf{SQ}(\mathsf{K}X)X.$

De aquí, por (2), (3), (4), $\mathsf{Q}XX \vdash \mathsf{Q}YX$.

Por tanto, por $\boldsymbol{Q}^{\rho}$, $\vdash \mathsf{Q}YX$, q. e. d.

Demostración de $\boldsymbol{Q}^{\mu}$. Supongamos que $X = Y$.

Entonces	X	$[\vdash]$ Y	por $\boldsymbol{Q}^{\varphi}$.
De aquí	ZX	$[\vdash]$ ZY	por $[\vdash]^{\mu}$.
Por tanto,	$\mathsf{Q}(ZX)(ZX)$	$\vdash \mathsf{Q}(ZX)\,(ZY)$	por def. de $[\vdash]$.
Por último,		$\vdash \mathsf{Q}(ZX)(ZY)$	por $\boldsymbol{Q}^{\rho}$, q. e. d.

Demostración de $\boldsymbol{Q}^{S}$. Por $\boldsymbol{Q}^{0}$, $\vdash \mathsf{Q}(\mathsf{S}XYZ)\,(\mathsf{S}XYZ)$.

Por tanto, por la regla S_1, $\vdash \mathsf{Q}(\mathsf{S}XYZ)(XZ(YZ))$, q. e. d.

La demostración de $\boldsymbol{Q}^{K}$ es análoga. $\boldsymbol{Q}^{\nu}$ vale por el teorema **6B1**.

3. Formulación de $\mathscr{Q}_0$

Para formular el sistema $\mathscr{Q}_0$ basta con añadir al sistema de § B el ob primitivo Q y las reglas $\boldsymbol{Q}^{\rho\varphi}$. La regla $\boldsymbol{Q}^{\varphi}$ puede formularse en la forma

Regla Q^{φ}. *Si* $X = Y$ *y* $\vdash ZX$, *entonces* $\vdash ZY$.

La regla Q^{ρ} exige, en cambio, alguna consideración.

Un modo de formular Q^{ρ} es definir

(5) $$\mathsf{E} \equiv \mathsf{WQ}\,(\mathsf{o}\ \mathsf{SQI}),$$

y luego tomar las reglas y axiomas de E descritos en § A2. En este caso esas reglas y axiomas se convertirán en

Ax. [SQ].	$\mathsf{S} = \mathsf{S}$.
Ax. [KQ].	$\mathsf{K} = \mathsf{K}$.
Ax. [QQ].	$\mathsf{Q} = \mathsf{Q}$.

La regla sería

Regla Q_0. *Si* $X = X$ *e* $Y = Y$, *entonces* $XY = XY$.

Si se deseara tomar E como una nueva primitiva, entonces $\boldsymbol{Q}^{\rho}$ podría postularse del modo siguiente:

Regla (QE). *Si* $\vdash \mathsf{E}X$, *entonces* $X = X$.

El postular E como ob primitivo tiene la ventaja de que desde ciertos puntos de vista interpretativos puede considerarse como dotado de sig-

nificación independiente. Tal es, particularmente, el caso si sus reglas se modifican como en la regla § A(3) de Rosser. Pero incluso en este caso (5) puede ser aceptable como definición.

Si no se toma Q^{ρ} con absoluta generalidad, entonces los teoremas serán verdaderos para ciertas subclases de obs, a los que podemos llamar obs propios, y que serían aquellos para los cuales vale $X = X$. Si las reglas combinatorias valen con generalidad sin restringir, y si el Z de Q^{φ} tampoco tiene restricciones, entonces $[\vdash]$ será una relación más débil que Q. Así, en la anterior formulación puede prescindirse del axioma [QQ], y entonces los obs propios serían los combinadores [9].

Otra posibilidad consiste en adoptar la regla

REGLA Q_1. *Si* $X = Y$ *y* $U = V$, *entonces* $XU = YV$.

Esto implica la regla Q_0 y da, por tanto, Q^{ρ} junto con los anteriores axiomas. En combinación con Q^{ρ} da $Q^{\mu\nu}$ inmediatamente, y, consecuentemente, Q^{φ} puede sustituirse por Q^{θ}. Como Q^{θ} no desempeña ningún papel directo esencial en la teoría de combinadores, sino que se usa, principalmente, para derivar Q^{σ} y Q^{τ}, la adición de $Q^{\sigma\tau}$ a la regla Q_1 daría una formulación suficiente para formar una fundamentación de $\mathscr{H}$. Incluso Q^{σ} puede incluirse en la regla Q_1 si intercambiamos los dos lados de la conclusión.

D. LOS SISTEMAS $\mathscr{K}$

En los sistemas lógicos ordinarios de igualdad se define frecuentemente a base de otras nociones por medio de algo que es esencialmente la propiedad Q^{φ}. Esta idea puede utilizarse también en lógica combinatoria. Las otras nociones lógicas pertenecen propiamente a la lógica combinatoria ilativa; pero como esas nociones tienen que introducirse en algún estadio de esta obra, tiene algún interés mostrar que Q puede definirse en términos de las mismas.

En § 1 mostraremos que un sistema $\mathscr{Q}$ puede ser interpretado así en términos de un sistema correspondiente $\mathscr{K}$ basado en un ob ilativo Z, que representa la implicación o inclusión formal, y en E. En § 2 consideraremos la consistencia de $\mathscr{K}$ respecto de $\mathscr{H}$. Teniendo en cuenta § 1, esto implica la consistencia de $\mathscr{Q}$ respecto de $\mathscr{H}$.

---

[9] Algo análogo a esto se tendría aplicando a $\mathscr{H}$ los procesos de § 1E2. Los combinadores serían entonces los obs básicos, y las fórmulas serían obs de la forma QXY, siendo X e Y combinadores.

1. Formulación

Sea ξ un ob cuya interpretación es la implicación formal o inclusión. La propiedad característica de este ob se expresa por la regla siguiente:

Regla ξ. $\qquad \xi XY, XZ \vdash YZ.$

Definamos Q del modo siguiente:

(1) $\qquad \mathsf{Q} \equiv \Psi \xi \mathsf{C}_*.$

Podemos entonces mostrar que Q^{φ} es una consecuencia. Efectivamente, si adoptamos (1), se sigue por el capítulo **5** que

$$\mathsf{Q}XY \geq \xi (\mathsf{C}_* X) (\mathsf{C}_* Y);$$

de aquí, si valen las reglas combinatorias [10], tenemos

(2) $\qquad \mathsf{Q}XY \vdash \xi (\mathsf{C}_* X) (\mathsf{C}_* Y).$

De nuevo por el capítulo **5**, $\mathsf{C}_* XZ \geq ZX$. Por tanto, por el teorema Bl,

(3) $\qquad ZX \vdash \mathsf{C}_* XZ.$

De (2) y (3) obtenemos

$$\begin{aligned} \vdash \mathsf{Q}XY \;\&\; \vdash ZX &\Rightarrow \vdash \xi (\mathsf{C}_* X) (\mathsf{C}_* Y) \;\&\; \vdash \mathsf{C}_* XZ, \\ &\Rightarrow \vdash \mathsf{C}_* YZ \qquad \text{por regla } \xi, \\ &\Rightarrow \vdash ZY \qquad \text{por } (\mathsf{C}_*). \end{aligned}$$

Para lograr una fundamentación suficiente para un sistema $\mathfrak{L}$ añadimos una formulación de Q^{ρ}. Puede ser de cualquiera de las formas mencionadas en § C. Si tomamos E como ob primitivo, entonces la regla (QE) puede formularse como axioma, a saber,

Ax. [QE]. $\qquad \vdash \xi \mathsf{E}(\mathsf{WQ}).$

---

[10] Obsérvese que si $U \geq V$, entonces $U = V$ vale en $\mathscr{H}_0$, y, por tanto, $U \vdash V$ se sigue por el teorema Bl y $[\vdash]^{\theta}$.

Llamaremos *sistema* $\mathscr{K}$—con subíndices como en el caso de $\mathscr{Q}$— a un sistema formulado mediante el añadido al sistema de § B3 del ob ξ más la regla ξ y alguna formulación de Q^{p} en términos de (1). Tenemos entonces:

TEOREMA 1. *Si*

$$\vdash X \tag{4}$$

es válido en un sistema $\mathscr{Q}$ *y* Q *está definida por* (1), *entonces* (4) *vale también en el correspondiente sistema* $\mathscr{K}$.

2. CONSISTENCIA DE $\mathscr{K}$

La consistencia de $\mathscr{K}$, en el sentido de que

$$\vdash \mathsf{Q}XY$$

es derivable en $\mathscr{K}$ sólo si

$$X = Y$$

vale en $\mathscr{H}$, fue derivada en [CCT] a partir del teorema de Church-Rosser. No reproduciremos aquí la demostración porque ello no es necesario. En § **10**A2 mostraremos que $\mathscr{K}$ puede interpretarse en un sistema ilativo $\mathscr{F}_1^{\,f}$ (I) y demostraremos en § **10**A4 que este sistema es consistente; esto implica, evidentemente, la consistencia de $\mathscr{Q}$ y $\mathscr{K}$. Otra demostración de consistencia, debida a Craig, se encuentra en § E.

E. MODIFICACIONES Y GENERALIZACIONES [11]

Esta sección se dedica a temas que suplementan de diversos modos el anterior tratamiento. El objeto principal consiste en hacer tan visible y manejable como sea posible la transición de sistemas no-logísticos a sistemas logísticos. En § 1 se sienta explícitamente que el método de § B puede generalizarse. En § 2 se sugiere una modificación de la regla K_2 que es monádica y tiene carácter determinístico sin necesidad de usar una categoría universal. En § 3 se consideran varias cuestiones que surgen cuando un sistema relacional se transforma en otro logístico, con especiales aplicaciones al caso en el cual el primer sistema es $\mathscr{H}$.

---

[11] Esta sección se debe a William Craig.

En § 4 se discute una forma modificada de $\mathfrak{Q}$, llamada $\mathfrak{Q}'$, en la cual los axiomas están sustituidos por reglas de una premisa y, consecuentemente, $\boldsymbol{Q}^{\varphi}$ es redundante; se discute su relación con $\mathscr{H}$. Por último, en § 5 se muestra que en el sistema $\mathscr{K}$ podemos sustituir ξ por Q, a partir de lo cual se sigue fácilmente la consistencia de $\mathscr{K}$. En las demostraciones se utiliza un lema de § 8EA.

1. Los sistemas $[\mathscr{H}]$

La discusión de § B, aplicada a la relación $\boldsymbol{R}$ de igualdad en cualquiera de los sistemas $\mathscr{H}$, establece el siguiente

Teorema 1. *Sea* $[\mathscr{H}]$ *el sistema obtenido a partir de* $\mathscr{H}$ *del modo siguiente: se suprimen todas las reglas de inferencia excepto* (τ); *se suprimen los axiomas* (ρ); *en lugar de cada uno de los demás axiomas de* $\boldsymbol{R}$ *se adoptan los axiomas correspondientes de* $[\boldsymbol{R}]$ *y* $[\boldsymbol{R}]^C$; *por último, se adoptan los axiomas* (I) *y* $(\mathrm{I})^C$. *Entonces* $X = Y$ *valen en* $\mathscr{H}$ *si —y sólo si— vale en* $[\mathscr{H}]$.

Los sistemas $[\mathscr{H}]$ tienen sobre los correspondientes sistemas $\mathscr{H}$ la ventaja de que la estructura de las derivaciones es en $[\mathscr{H}]$ más sencilla en cierto sentido. Pues por inducción deductiva $X = Y$ es derivable en $[\mathscr{H}]$ si —y sólo si— existe una secuencia $X \equiv Z_1, Z_2, \ldots, Z_n \equiv Y$ tal que para todo $i < n$, $Z_i = Z_{i+1}$ es una instancia de un esquema axiomático de $[\mathscr{H}]$. Por eso una derivación en $[\mathscr{H}]$ puede concebirse como un proceso lineal, y los esquemas axiomáticos pueden concebirse como reglas de transformación [12].

2. Modificación de la regla K_2

Considerado como regla de transformación, cada esquema axiomático de $[\mathscr{H}]$ es de un solo valor —es decir, para cada Z_i da a lo sumo un Z_{i+1}—, excepto por lo que hace al esquema axiomático que postula $[\mathsf{K}]^C$, $UX\ \boldsymbol{R}\ U(KXV)$. Mostraremos ahora que $[\mathsf{K}]^C$ puede sustituirse por esquemas axiomáticos que, considerados como reglas de transformación, son también de un solo valor. Sean $[\mathsf{KK}]^C$, $[\mathsf{KS}]^C$ y $[\mathsf{K}']^C$ las propiedades siguientes:

---

[12] Cfr. también Rosser [MLV], sección H. Los esquemas axiomáticos de aquí corresponden a las reglas de procedimiento de [MLV], y la regla (τ) a aplicaciones sucesivas de dichas reglas.

$[\mathsf{KK}]^C$ $\quad UX \; \boldsymbol{R} \; U(\mathsf{K}XK)$,
$[\mathsf{KS}]^C$ $\quad UX \; \boldsymbol{R} \; U(\mathsf{K}XS)$,
$[\mathsf{K}']^C$ $\quad U(\mathsf{K}(\mathsf{K}XY)Z)\boldsymbol{R}U(\mathsf{K}X(YZ))$.

Entonces la relación $\boldsymbol{R}$ de igualdad en $[\mathscr{H}]$ tiene esas tres propiedades. Recíprocamente tenemos:

TEOREMA 2. *Si* S *y* K *son los únicos obs primitivos, y si* $\boldsymbol{R}$ *tiene las propiedades* (τ), $[\mathsf{KK}]^C$, $[\mathsf{KS}]^C$ y $[\mathsf{K}']^C$ *entonces tiene la propiedad* $[\mathsf{K}]^C$.

Demostración por inducción estructural sobre V. Si $V \equiv \mathsf{K}$ o $V \equiv \mathsf{S}$, entonces $[\mathsf{KK}]^C$ o $[\mathsf{KS}]^C$, respectivamente, dan $[\mathsf{K}]^C$. Sea $V \equiv YZ$ y admitimos como hipótesis inductiva que

(1) $\quad UX \; \boldsymbol{R} \; U(\mathsf{K}XY)$, y
(2) $\quad UV' \boldsymbol{R} \; U(\mathsf{K}V'Z)$, para todo V'.

Entonces

(3)	$U(\mathsf{K}XY) \; \boldsymbol{R} \; U(\mathsf{K}(\mathsf{K}XY)Z)$	por (2), con $V' \equiv \mathsf{K}XY$;
(4)	$UX \; \boldsymbol{R} \; U(\mathsf{K}(\mathsf{K}XY)Z)$	por (1), (3) y (τ);
(5)	$U(\mathsf{K}(\mathsf{K}XY)Z) \; \boldsymbol{R} \; U(\mathsf{K}X(YZ))$	por $[\mathsf{K}']^C$;
(6)	$UX \; \boldsymbol{R} \; U(\mathsf{K}X(YZ))$	por (4), (5) y (τ);
	$\therefore UX \; \boldsymbol{R} \; U(\mathsf{K}XV)$	puesto que $V \equiv YZ$.

Si hay otros obs primitivos además de S y K, entonces hay que postular para cada uno de ellos una propiedad análoga a $[\mathsf{KK}]^C$ o a $[\mathsf{KS}]^C$. Si se desea restaurar la simetría de la formulación de los esquemas axiomáticos se puede sustituir análogamente el esquema axiomático que postula [K].

3. TRANSICIÓN A UN SISTEMA LOGÍSTICO

El cambio de un sistema no-logístico, $\mathfrak{S}_R$, a otro logístico, $\mathfrak{S}_L$, supone, en general, algo más que una mera reformulación de las proposiciones de $\mathfrak{S}_R$. Mientras que a cada proposición de $\mathfrak{S}_R$ corresponde otra de $\mathfrak{S}^L$ la afirmación recíproca no es verdadera si $\mathfrak{S}^L$ es completamente formal (§ 1E5). Pues entonces, dicho groseramente, pueden aplicarse predicados y operaciones también a predicados y operaciones, mientras que en $\mathfrak{S}_R$ no pueden aplicarse más que a otros obs. Por ejemplo, si $\mathfrak{S}_R$ es $\mathscr{H}$, si $\mathfrak{S}_L$ es completamente formal y si Q es el ob de $\mathfrak{S}_L$ que ocupa

el lugar de la igualdad en $\mathfrak{S}_R$, entonces las siguientes proposiciones de $\mathfrak{S}_L$ no tienen análogos en $\mathfrak{S}_R$:

(1) $\vdash$ QQQ,
(2) $\vdash$ Q(QSK) (QKS),
(3) $\vdash$ SQQK.

La diferencia entre $\mathfrak{S}_R$ y $\mathfrak{S}_L$ se hace aún más pronunciada cuando hay combinadores. Pues los combinadores no pueden afectar a relaciones como $=$ o enunciados como K $=$ QK, mientras que pueden afectar a obs y secuencias de obs como Q y QQK. Al pasar a un sistema logístico completamente formal y aplicacional, el objetivo principal que se busca es hacer que todo (excepto $\vdash$) sea accesible a la manipulación por combinadores.

Uno de los problemas que ofrece el paso a un sistema logístico cuando hay combinadores en el sistema inicial puede ilustrarse del modo siguiente: Sea $\mathfrak{S}_R$ cualquiera de los sistemas $\mathscr{H}$, con Q como indeterminada, y sea $\mathfrak{S}_L$ el sistema cuyos axiomas y reglas son los de $\mathfrak{S}_R$ traducidos a forma logística, con Q subrogada a la igualdad. Entonces no pueden demostrarse en $\mathfrak{S}_L$ más que proposiciones de la forma $\vdash$ QXY. Por tanto, ninguna proposición de $\mathfrak{S}_L$ de la forma $\vdash$ WQX es demostrable en $\mathfrak{S}_L$, mientras que, en cambio, la proposición correspondiente $\vdash$ QXX es demostrable.

Vamos a definir ahora el deseable rasgo de que carece $\mathfrak{S}_L$ en el ejemplo recién descrito. Supondremos en esta discusión que *el sistema* $\mathfrak{S}_L$ *dado contiene* S y K, *y que el sistema* $\mathscr{H}$ *dado contiene como indeterminadas precisamente los demás obs primitivos de* $\mathfrak{S}_L$. Supuesto esto, llamaremos a $\mathfrak{S}_L$ *invariante respecto de* $\mathscr{H}$ si —y sólo si— dos obs de $\mathfrak{S}_L$ son intercambiables (§ 2D7) siempre que su igualdad pueda demostrarse en $\mathscr{H}$.

TEOREMA 3. *Un sistema logístico aplicacional,* $\mathfrak{S}_L$, *es invariante respecto de* $\mathscr{H}$ *siempre que* $V \vdash W$ *para cada axioma* $V = W$ *del sistema* $[\mathscr{H}]$ (cfr. teorema 1).

Demostración. Supongamos que $X = Y$ es demostrable en $\mathscr{H}$. Entonces también $UX = UY$ es demostrable en $[\mathscr{H}]$. Como (τ) es la única regla deductiva de $[\mathscr{H}]$, existe una secuencia $UX \equiv Z_1, Z_2, \ldots, Z_n \equiv UY$ tal que, para todo $i < n$, $Z_i = Z_{i+1}$ es un axioma de $[\mathscr{H}]$. Pero entonces también se dará $Z_i \vdash Z_{i+1}$ en $\mathfrak{S}_L$, y, por tanto, también $UX \vdash UY$, y, consiguientemente, X [$\vdash$] Y. Entonces, por la discusión de § B (cfr. teorema 3 y corolario 3.1 de § 2D7) X e Y son intercambiables en $\mathfrak{S}_L$.

Si $\mathfrak{S}_L$ es invariante respecto de cualquiera de los sistemas $\mathscr{H}$, entonces, por el teorema 1 de § 6A, $\mathfrak{S}_L$ es *combinatoriamente completo* en

el sentido siguiente: para todo ob $\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{S}_L$ que sea una combinación de S, K, y otros obs primitivos $x_1, \ldots, x_n$, podemos construir una combinación X de S y K tal que $\mathfrak{X}$ y $Xx_1 \ldots x_n$ son intercambiables en $\mathfrak{S}_L$.

El teorema 3, junto con esta consecuencia, parece ser la razón básica por la cual, al pasar a un sistema logístico, cambiamos axiomas por reglas.

La noción de invariancia puede considerarse también del modo siguiente: respecto de un sistema $\mathscr{H}$, hay dos sentidos de *traducción* de $\mathfrak{S}_R$ a $\mathfrak{S}_L$. En sentido *estricto*, traducción es traducción literal. En sentido *amplio*, traducción es un proceso que, además de la traducción literal, permite el ulterior expediente de subrogar obs X por obs Y siempre que $X = Y$ sea demostrable en $\mathscr{H}$. Entonces la invariancia de $\mathfrak{S}_L$ respecto de $\mathscr{H}$ implica que obs afirmados en dos proposiciones de $\mathfrak{S}_L$ son intercambiables siempre que sean traducciones en sentido amplio de la misma proposición de $\mathfrak{S}_R$.

Cuando resulta deseable la invariancia de $\mathfrak{S}_L$ respecto de un sistema $\mathscr{H}$ entonces la *consistencia* de $\mathfrak{S}_L$ respecto de $\mathfrak{S}_R$ es deseable sólo en la medida en que no interfiera con dicha invariancia. Así, en general, la consistencia de $\mathfrak{S}_L$ respecto de $\mathfrak{S}_R$ es deseable a lo sumo en esta medida: todo teorema de $\mathfrak{S}_L$ es una traducción en sentido amplio (respecto de $\mathscr{H}$) de un teorema de $\mathfrak{S}_R$.

4. Cambio de $\mathscr{H}$ a un sistema logístico $\mathscr{L}'$

Es conveniente distinguir entre cambios que parecen esenciales a la transición de un sistema $\mathscr{H}$ a un sistema logístico y aquellos otros cambios que tal vez sea conveniente hacer una vez efectuada la transición. Vamos a construir ahora para cada $\mathscr{H}$ un sistema logístico $\mathscr{L}'$ con un mínimo de cambios.

La mera traducción de los axiomas y reglas de $\mathscr{H}$ es inviable, porque el sistema resultante no sería invariante. En vez de eso adoptaremos en $\mathscr{L}'$ las reglas sugeridas por el teorema 3. Volveremos a usar Q en lugar de la igualdad y supondremos que *el sistema dado $\mathscr{H}$ contiene* Q *como indeterminada.*

Teorema 4. *Dado un sistema $\mathscr{H}$, sea $\mathscr{L}'$ el sistema logístico cuyas únicas reglas son $V \vdash W$ siempre que $V = W$ sea un axioma del sistema* [$\mathscr{H}$] (cfr. teorema 1), *y cuyos únicos axiomas son* (ρ), *es decir,* QXX, *siendo X un ob de $\mathscr{H}$. Entonces los teoremas de $\mathscr{L}'$ son exactamente las proposiciones traducciones en sentido amplio (respecto de $\mathscr{H}$) de teoremas de $\mathscr{H}$. Además, si $\vdash QUV$ es un teorema de $\mathscr{L}'$, entonces $U = V$ es un teorema de $\mathscr{H}$.*

Demostración a. Supongamos que $\vdash Y$ es la traducción en sentido amplio de un teorema de $\mathscr{H}$. Entonces hay un Y' tal que $\vdash Y'$ es una traducción literal de un teorema de $\mathscr{H}$, e Y se obtiene de Y' subrogando obs Z' por obs Z, siendo $Z' = Z$ un teorema de $\mathscr{H}$. Sea $\vdash Y'$ una traducción de $U = V$, de tal modo que $Y' \equiv \mathsf{Q}UV$. Por el teorema 3, puesto que $\vdash \mathsf{Q}UU$ es un teorema de $\mathscr{2}'$, también lo será $\vdash \mathsf{Q}VU$. Entonces, por el teorema 3, puesto que Y se obtiene de $\mathsf{Q}UV$ subrogando obs Z' por Z tal que $Z' = Z$ es un teorema de $\mathscr{H}$, se tendrá que $\vdash Y$ es un teorema de $\mathscr{2}'$.

b. Supongamos que $\vdash Y$ es un teorema de $\mathscr{2}'$. Entonces existe una secuencia $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n \equiv Y$ tal que, para todo $i < n$, $Z_i = Z_{i+1}$ es un axioma de $[\mathscr{H}]$, y tal que $Z_1 \equiv \mathsf{Q}XX$ para algún X. Entonces $Z_1 = Z_n$ es un teorema de $\mathscr{H}$, y, por tanto, $\vdash Y$ es una traducción en sentido amplio de $X = X$.

En particular, sea $Y \equiv \mathsf{Q}UV$. Entonces $\mathsf{Q}XX = \mathsf{Q}UV$ es un teorema de $\mathscr{H}$. Entonces, por un lema de § 8E4, infra, $X = U$ y $X = V$ son teoremas de $\mathscr{H}$. Lo mismo ocurrirá entonces con $U = V$.

TEOREMA 5. *Supongamos que $\mathscr{2}'$ se ha obtenido de $\mathscr{H}$ como en el teorema* 4, *y que $\mathscr{2}$ se ha obtenido como en* § C, *con* $\mathsf{E} \equiv \mathsf{WQ}$. *Entonces $\mathscr{2}'$ y $\mathscr{2}$ tienen los mismos teoremas. Además, la regla $\boldsymbol{Q}^{\varphi}$ vale en $\mathscr{2}'$ el siguiente sentido: Si* $\vdash \mathsf{Q}XY$, *entonces* $UX \vdash UY$.

Demostración. Supongamos que $\vdash \mathsf{Q}XY$ es un teorema de $\mathscr{2}'$. Entonces, por el teorema 4, $X = Y$ es un teorema de $\mathscr{H}$. Por tanto, por el teorema 3, $UX \vdash UY$. Puede verse ahora que todos los axiomas y reglas de $\mathscr{2}$ valen en $\mathscr{2}'$. Para los axiomas (ω) esto se sigue de (ρ) y la invariancia de $\mathscr{2}$ respecto de $\mathscr{H}$. Para las reglas E necesitamos, además, la definición $\mathsf{E} \equiv \mathsf{WQ}$. Recíprocamente, toda regla de $\mathscr{2}'$ correspondiente a un axioma (ω) puede derivarse en $\mathscr{2}$ de ese axioma (ω) mediante $\boldsymbol{Q}^{\varphi}$. Todas las demás reglas de $\mathscr{2}'$ son también reglas de $\mathscr{2}$, excepto la regla, primitiva o derivada, que postula $[\mathsf{K}]^C$ para $\vdash$. Esta regla puede derivarse de la regla $[\mathsf{K}_2]$ de $\mathscr{2}$ y la demostrabilidad de $\vdash \mathsf{WQ}Y$ en $\mathscr{2}$. Por último, todo axioma de $\mathscr{2}'$ es un teorema de $\mathscr{2}$.

Puede observarse incidentalmente que la parte b del teorema 4 y la regla $\boldsymbol{Q}^{\varphi}$ para $\mathscr{2}'$ no valen siempre si se añaden más axiomas a $\mathscr{2}'$. Una ventaja incidental de $\mathscr{2}'$ es que la referencia a Q no se presenta más que en la formulación de (ρ), y no en la de las reglas. Esto puede facilitar la comparación con sistemas en los cuales Q no es un ob primitivo.

OBSERVACIÓN. Este teorema muestra que en $\mathscr{2}$ no se necesita $\boldsymbol{Q}^{\varphi}$ más que cuando su premisa es uno de los axiomas (ω). La aplicación de $\boldsymbol{Q}^{\varphi}$ da la regla correspondiente a $\mathscr{2}'$.

5. Notas sobre los sistemas $\mathscr{K}$

Vamos a considerar los sistemas $\mathscr{K}$ de § D. *Suponemos que los sistemas $\mathscr{K}$ correspondientes contienen* ξ *como indeterminada.*

Teorema 6. *Todo teorema de $\mathscr{K}$, cuando se sustituye* ξ *por* Q, *da un teorema de $\mathscr{L}$. Por tanto,* $\vdash \xi XY$ *es un teorema de $\mathscr{K}$ sólo si* $X = Y$ *es un teorema de $\mathscr{H}$.*

Demostración por inducción deductiva. La sustitución en cualquier axioma de $\mathscr{K}$ da una proposición demostrable $\vdash \Psi\, \mathsf{Q}(\mathsf{CI})XX$ de $\mathscr{L}$. Supongamos ahora como hipótesis inductiva que la sustitución de ξ por Q en $\vdash \xi XY$ y $\vdash XZ$ da un teorema de $\mathscr{L}$. Entonces ocurrirá lo mismo con la sustitución en $\vdash YZ$. Todas las reglas de $\mathscr{K}$ distintas de la regla ξ tienen análogos en $\mathscr{L}$.

Además de las traducciones literales de $\mathscr{H}$ a $\mathscr{K}$, con $\Psi\, \xi\, (\mathsf{CI})$ en lugar de la igualdad, tenemos traducciones en sentido *amplio* (respecto de $\mathscr{H}$) que nos permiten, además de la traducción literal, el proceso ulterior de sustituir X por Y siempre que $X = Y$ sea un teorema de $\mathscr{H}$.

Teorema 7. *Sea $\mathscr{K}'$ como el sistema $\mathscr{L}'$ del teorema 4, excepto en que* ξ, *y no* Q, *es un ob primitivo, y* $\mathsf{Q} \equiv \Psi\, \xi\, (\mathsf{CI})$. *Entonces los teoremas de $\mathscr{K}'$ son exactamente las proposiciones que son traducciones en sentido amplio (respecto de $\mathscr{H}$) de teoremas de $\mathscr{H}$. Además, si* $\vdash \mathsf{Q}UV$ *es un teorema de $\mathscr{K}'$, entonces $U = V$ es un teorema de $\mathscr{H}$.*

Demostración. La primera parte del teorema se demuestra como en el teorema 4. Supongamos ahora que $\vdash \mathsf{Q}UV$ —es decir, $\Psi\xi\, (\mathsf{CI})UV$— es un teorema de $\mathscr{K}'$. Entonces, por la primera parte del teorema, también lo será $\xi\, (\mathsf{CI}U)\, (\mathsf{CI}V)$. Por el teorema 6, $\mathsf{CI}U = \mathsf{CI}V$ es un teorema de $\mathscr{H}$. También lo es entonces $\mathsf{CI}Ux = \mathsf{CI}Vx$, y, por tanto, también $xU = xV$. Por un lema de § 8E4, también lo es $U = V$.

Teorema 8. *El sistema $\mathscr{K}'$ del teorema 7 tiene los mismos teoremas que $\mathscr{K}$, siempre que* $\mathsf{E} \equiv \mathsf{WQ}$.

Demostración por inducción deductiva. Supongamos que $\vdash \xi XY$ y $\vdash XZ$ son teoremas de $\mathscr{K}$ y que $\vdash XZ$ es también un teorema de $\mathscr{K}'$. Entonces, por el teorema 6, $X = Y$ es un teorema de $\mathscr{H}$. Por el teorema 7, $\vdash YZ$ es entonces un teorema de $\mathscr{K}'$. El resto de la demostracción es como la del teorema 5.

S. TEMAS SUPLEMENTARIOS

1. Comentario histórico

El sistema original de [GKL] contenía un tratamiento de las «propiedades de la igualdad» en el cual las primitivas ilativas eran $\mathbf{Q}$[13] y un cuantificador universal *II*. Había un axioma que expresaba Q^{ρ}, reglas para expresar Q^{θ} y Q^{μ}, y esquemas axiomáticos para expresar las reglas de reducción de los combinadores primitivos **B**, **C**, **W**, **K**. Estos esquemas se consideraban como reglas con premisas de la forma «*X* es un ob» («*X* ist ein Etwas»), y se clasificaban, por tanto, como reglas.

La teoría fue muy perfeccionada por Rosser en su [MLV]. El introdujo el procedimiento de expresar las reglas en términos de $[\vdash]$, subrayó la conveniencia de las reglas determinísticas y definió explícitamente a $\mathbf{Q}$ en términos de ξ. Sus reglas combinatorias eran esencialmente las del § B2, con la diferencia de que incluían otros combinadores primitivos. La teoría tenía ciertas peculiaridades, porque Rosser no deseaba tener en el sistema ni **K** ni ninguna clase de categoría universal. En esto seguía la línea de Church [SPF]. Su **E** ha sido comentado ya en § A2 (estaba definido en términos de un cuantificador existencial Σ). Este **E** debía, evidentemente, excluir del sistema obs «sin sentido». Complica considerablemente el sistema e introduce problemas que siguen sin resolver. Por ejemplo, seguimos sin saber si excluye obs que no tengan forma normal (Rosser [NSP], página 19) [14].

Las reglas de Rosser fueron reelaboradas en [RFR] con la intención de adaptarlas a otros conjuntos de combinadores primitivos y liberarlas de la anterior restricción. Las demostraciones que hemos dado aquí proceden de las dadas por Rosser.

Por lo que hace a consistencia, aunque [GKL] daba una demostración directa de la consistencia de la formulación allí dada para $\mathscr{H}$, no se intentaba extenderla al sistema subyacente análogo a $\mathscr{K}$. Rosser fue el primero en dar una tal extensión (en T 18 de su [MLV]). La demostración de [CCT] § 4 era muy parecida a la de Rosser. Esas demostraciones pueden considerarse superadas por la de § E o § **10A**.

---

[13] Designada por '*Q*'. En la discusión presente traducimos toda la notación de trabajos anteriores a la de este libro.

[14] Cfr. también § **8B**.

CAPITULO OCTAVO

Introducción a la lógica combinatoria ilativa

En la primera fase de la lógica combinatoria hemos estudiado los métodos de combinación de obs que ordinariamente se indican mediante el uso de variables libres o ligadas. Hemos tratado esos modos de combinación como tales, en sí mismos, completamente aparte de cualquier consideración acerca de los tipos de entidades combinadas. En la segunda fase tendremos, en cambio, en cuenta la clasificación de las entidades en especies —en categorías sintácticas o semánticas, si se desea usar este modo de expresión—, así como las reglas que determinan los modos según los cuales pueden clasificarse los resultados de un proceso combinatorio una vez conocida la clasificación de sus constituyentes.

Es evidente que esto equivale a preguntar cuándo un ob formado de un determinado modo es significante. Pues ¿qué otra cosa quiere decir significancia sino pertenencia a una de las categorías semánticas? Así, pues, la segunda fase de la lógica combinatoria difiere principalmente de la primera por el hecho de tomar en cuenta condiciones de significancia o significatividad.

Este capítulo se dedica a ciertos temas que se refieren al programa tomado en su conjunto. En § A analizaremos la paradoja de Russell para mostrar la necesidad de un tratamiento de las categorías y para explicitar ciertas condiciones que hay que cumplir. En § B se discutirán algunas otras explicaciones posibles. En § C introduciremos la noción de funcionalidad; el tema concreto consistirá en explicar la significación del nuevo ob F que se introducirá en ese momento. En § D discutiremos la relación de este F con nociones como la implicación, la implicación formal y la cuantificación universal. Allí definiremos, de un modo preliminar y a título de ensayo, las teorías de la funcionalidad, de la generalidad restringida (o inclusión) y de la generalidad universal, que estudiaremos en posteriores capítulos. Hasta ese momento procederemos intuitivamente y con la tarea de explicar las interpretaciones que damos a las diversas nociones. En § E iniciaremos los desarrollos ya formales

discutiendo algunas cuestiones preliminares, algunas de ellas notacionales, que son necesarias para fundamentar sólidamente lo que sigue.

La segunda fase de la lógica combinatoria se llamará *ilativa* porque en ella tendremos que estudiar conceptos tales como los de cuantificación, implicación y categorías que son característicos de la lógica en sentido corriente, y existe ya algún precedente en este uso de 'ilación' en relación con la deducción lógica. La palabra procede del participio pasado del verbo latino 'inferre'; la palabra 'inferiencial', que ha ido tomando un sentido algo diverso, procede del participio de presente del mismo verbo latino.

A. LA PARADOJA DE RUSSELL

Empezaremos nuestra discusión con un estudio de la paradoja de Russell. Esta paradoja muestra la naturaleza de las dificultades que surgen cuando se admiten obs que representen nociones lógicas tales como la negación y la implicación, y muestra también por qué es necesario entonces formular ciertas categorías.

La paradoja ha sido ya considerada en § **0B** y § **5G**. Hemos visto allí que si N indica negación, entonces $\mathbf{Y}N$ es un ob igual a su propia negación. Hemos visto también que esto no significa que tengamos que excluir a $\mathbf{Y}N$ de toda consideración. Un tal procedimiento sería, en efecto, incompatible con la exigencia fundamental de completud combinatoria. Pero está claro que no podemos atribuir a $\mathbf{Y}N$ propiedades características de proposiciones; y que podemos evitar la paradoja formulando la categoría de las proposiciones de tal modo que $\mathbf{Y}N$ quede excluida de ellas.

Esta afirmación puede precisarse considerando la siguiente modificación de la paradoja [1]. Añadamos a la teoría de combinadores —formulada, por ejemplo, como sistema $\mathscr{H}$— un ob P, que ocupa el lugar de la implicación. Postulemos para P la regla:

REGLA P. *Si* $\vdash \mathsf{P}XY$ y $\vdash X$, *entonces* $\vdash Y$.

Para recoger la notación ordinaria introducimos la abreviación

$$X \supset Y \equiv \mathsf{P}XY;$$

entonces la regla P es lo mismo que la regla ordinaria de *modus ponens*.

---

[1] Tomado de [IFL]. [Con $N = \mathsf{SP}(\mathsf{CP}X)$ podemos derivar (3) de (2) sin (1).]

Supongamos ahora que tomamos la regla P y los siguientes esquemas axiomáticos sobre P sin restricción sobre los obs X, Y:

(1) $\vdash X \supset X,$

(2) $\vdash X \supset . X \supset Y : \supset : \supset Y.$

Vamos a mostrar que el sistema será entonces inconsistente, en el sentido de que para todo ob X será demostrable la proposición

(3) $\vdash X.$

Sea, en efecto, X un ob dado, y definamos

(4) $N \equiv [y].\ y \supset X\ (\equiv [y].\ \mathsf{P}yX), \quad Y \equiv \mathsf{P}N,$

definiéndose Y como en § 5G. Entonces se sigue por § 5G que

$$Y = NY,$$

es decir,

(5) $$Y = Y \supset X.$$

Argumentamos entonces del modo siguiente:

$\vdash Y \supset Y$	por (1).
$\vdash Y \supset . Y \supset X$	por (5),
$\vdash Y \supset X$	por (2), regla P.
$\vdash Y$	por (5).
$\vdash X$	por regla P.

Esta paradoja muestra que la regla P y las propiedades (1), (2) no pueden adoptarse para cualesquiera obs sin restricción. Son propiedades características de proposiciones, categoría de obs que, consiguientemente, hay que formular en la teoría.

Tres observaciones más se siguen de esa formulación de la paradoja.

En primer lugar, no tiene nada que ver con el principio de tercio excluso ni con ninguna otra propiedad de la negación. La anterior formulación no depende de ninguna fórmula del álgebra proposicional que no sea aceptable incluso desde el punto de vista intuicionista. Si se insiste en considerar a N como una especie de negación habrá que reconocer que es una negación mínima.

En segundo lugar, nuestra formulación muestra que un sistema consistente y combinatoriamente completo no puede tener el tipo de completud que se asocia con el teorema de deducción. Llamemos a esta clase de completud *completitud deductiva*. Ella significa que tenemos un tipo de implicación que satisface la regla P, y tal que siempre que de una premisa

(6) $$\vdash X$$

y tal vez otras, podemos derivar

$$\vdash Z,$$

entonces podemos derivar también

$$\vdash X \supset Z$$

partiendo de esas otras premisas exclusivamente. Gentzen[2] ha mostrado, en efecto, que la completitud deductiva supone toda la teoría intuicionista de la implicación y, por tanto, en particular, las propiedades (1) y (2). Se sigue de esto que la completitud deductiva sin restricciones y la completitud combinatoria, son incompatibles. Pero esto no es un argumento contra la completitud combinatoria, sino que muestra más bien que sólo podemos tener completitud deductiva con una restricción, a saber, que X, Z, y los obs afirmados en las demás premisas sean todos proposiciones. Con lo que volvemos a tocar la necesidad de definir la noción de proposición.

La tercera observación es que la paradoja no supone ninguna definición sin legitimar, ni tampoco abreviaciones que no puedan eliminarse. Por tanto, la explicación de Behmann [WLM] no es aplicable[3]. Todo lector con la suficiente paciencia podrá explicitar por sí mismo las definiciones de Y, N —y, por tanto, de Y— como funciones de X a base de las primitivas S, K y P.

---

[2] En su [ULS]; cfr. la demostración en [TDF].

[3] Esa explicación es, en efecto, incompatible con la completitud combinatoria. Obsérvese, con todo, la relación entre la teoría de Behmann y la de Ackermann citada más abajo. Las observaciones de Behmann pueden, además, interpretarse de tal modo que lo que vamos a decir aquí tal vez resulte una defensa más que una refutación de sus ideas.

B. OTRAS EXPLICACIONES POSIBLES DE LA PARADOJA

Hemos visto que la paradoja es probablemente evitable formulando varias categorías semánticas, en particular la de proposición. Pero la formulación de la paradoja sugiere ciertas otras posibilidades. Vamos a examinar aquí algunas de ellas y ver qué podemos aprender de las mismas.

Una de las otras explicaciones posibles parte de la observación de que el Y definido por § A(4) no tiene forma normal. Esto suscita la idea de que la posesión de forma normal fuera una condición necesaria de la significancia. Esta tesis parece ser la opinión de Church, pues algunas anomalías de su sistema se explican por la misma [4]. Pero desde el punto de vista de la presente teoría la tesis es inaceptable. Pues si Y está dado por § A(4), la proposición

$$\vdash \mathsf{Q}Y(NY)$$

es válida; por tanto, el ob $\mathsf{Q}Y(NY)$, aunque no tiene forma normal, no sólo es significante, sino que, interpretado, es una proposición verdadera. Cierto que si la noción de igualdad ha sido previamente restringida, como ocurre, por ejemplo, en las reglas E restringidas de Rosser (§ 7A2) o al interpretar la igualdad como la δ de Church ($\equiv \delta_1$ de § 3D6), no se sigue nuestra conclusión [5]; pero ninguno de esos subterfugios altera el hecho de que se trata de proposiciones verdaderas de la teoría de combinadores que serían eliminadas, como sin-sentido, por un tal criterio. Desde nuestro punto de vista todo ob es significante en el más amplio sentido de ser un objeto de pensamiento; la significancia en un sentido más estricto debe significar, en realidad, pertenencia a alguna categoría semántica. Nos parece, además, poco probable —aunque, sin

---

[4] Por ejemplo, la exclusión del combinador K. Así, si Y está dado por § A(4) $\mathsf{K}\mathsf{I}Y$ es convertible con I, que tiene forma normal, aunque $\mathsf{K}\mathsf{I}Y$ contiene un componente Y sin forma normal. Hay algo anómalo en la solución de considerar significante un ob que tiene un componente no significante. Por tanto, la presencia de K hace de la significancia una propiedad que no es invariante respecto de la conversión. La restricción de las reglas E hecha por Rosser (siguiendo a Church [SPFI.]) y la introducción de la δ-conversión son otros ejemplos más. Cfr. § 3S3.

[5] La teoría de Church con la igualdad restringida puede considerarse del modo siguiente. La relación de convertibilidad resulta una relación metateorética, es decir, una relación entre expresiones del lenguaje A como tal, sin tener en cuenta los objetos que denotan. Sólo algunas de esas expresiones denotan, efectivamente, objetos, a saber, las que tienen forma normal; y entre éstas la relación de igualdad se indica por δ_1 (§ 3D6, la δ de Church). Si se adopta este modo de considerar el sistema, la teoría no es estrictamente formal y los objetos en cuestión no son obs.

duda, no completamente imposible— el que para los fines de la lógica baste con una sola categoría de obs significantes; más bien sospechamos que debe haber toda una jerarquía de ellos [6]. Vamos a considerar más abajo métodos para producir una tal jerarquía. Pero, de todos modos, hay que decir que a propósito de la relación entre la posesión de una forma normal y la pertenencia a una categoría de una tal jerarquía se suscitan muchos problemas cuyas soluciones desconocemos aún [7].

Otra posibilidad de solución consiste en procurarse una implicación debilitada para la que no valga alguna de las propiedades (1) o (2) o regla P. Existen ya tales formas debilitadas de la implicación. Los sistemas de Ackermann y de Fitch se han mostrado consistentes [8]. En el sistema de Ackermann la propiedad § A(2) cede su lugar a

$$\vdash X \supset . X \supset Y : \supset : \Gamma \supset . X \supset Y,$$

siendo Γ un determinado ob afirmado. El sistema es, empero, muy débil, y seguramente tendrá que complementarse con algún tipo de formulación de proposiciones para que de verdad resulte adecuado a la matemática [9]. En el sistema de Fitch la regla P está sometida a una restricción compleja y *ad hoc* [10] añadida al sistema. Por otro lado, la artificial naturaleza de su restricción muestra que con ella Fitch evita el problema fundamental, más que resolverlo; y el sistema no parece tampoco muy adecuado para fundamentar la teoría de combinadores.

La mera existencia de esos sistemas tiene una consecuencia importante para la teoría que estamos estudiando. Para formular reglas de clasificación de obs en categorías fundamentales debemos contar como base con alguna teoría por la cual puedan obtenerse inferencias para obs esencialmente sin restringir. Es deseable que una tal teoría básica satisfaga todas las restricciones de finitud de la teoría de combinadores, y que sea demostrable su consistencia. La existencia de los sistemas de implicación debilitada muestra que la búsqueda de un tal sistema no

---

[6] Queremos decir que dudamos de la posibilidad de construir un sistema útil de lógica con una sola categoría. Es obvio que algunos sistemas, como la teoría de los tipos, requieren una jerarquía.

[7] La relación entre posesión de una forma normal y pertenencia a la categoría E de la teoría de Rosser se desconoce también por ahora. Cfr. § 7S1.

[8] Cfr. Ackermann [WFL] (reseñas de Rosser [res. A] y Curry [res. A]) y Fitch [SLg]. El sistema de Ackermann se remonta a su primer sistema [STF], el cual a su vez desarrolla ideas de Behmann [WLM]. Se continúa en [WFT].

[9] Cfr. la reseña de Rosser citada.

[10] Es compleja en el sentido de que el criterio de aplicabilidad de la regla P no depende sólo de las premisas, sino, además, de su relación con el conjunto de la demostración que precede.

está condenada al fracaso. Entre los sistemas considerados más tarde se encontrarán, efectivamente, varios que se acercan a esos requerimientos. Desde el punto de vista de la lógica combinatoria creemos que son más naturales que los de Ackermann y Fitch.

C. LA NOCION DE FUNCIONALIDAD

Vamos a desarrollar ahora un procedimiento para la clasificación de obs en categorías. Necesitaremos cuatro clases de nociones primitivas del modo siguiente:

(a) Ciertas categorías primitivas.
(b) Medios para construir categorías compuestas a partir de la primitivas.
(c) Axiomas que asignen átomos[11] (o ciertos obs tomados como tales) a ciertas categorías.
(d) Reglas para inferir la categoría de un ob compuesto cuando se, conocen las de sus componentes.

Es claro que las nociones (a) y (c) de esta lista variarán considerablemente de un tipo de teoría a otro; por otro lado, las nociones (b) y (d) tienen un carácter combinatorio, y podrán ser probablemente las mismas en toda una extensa clase de sistemas. Como el objetivo de la lógica combinatoria no es tanto desarrollar un sistema de lógica como analizar los fundamentos de todos esos sistemas (o de una extensa clase de ellos), dejaremos por el momento sin especificar las condiciones (a) y (c) y atenderemos a (b) y (d).

En la medida en que postulamos un sistema aplicacional todo lo que necesitamos es tener los medios suficientes para inferir que

(1) $$fX$$

pertenece a una cierta categoría determinada por las categorías de f y X. Intuitivamente éste será el caso si f es una función. Si α y β son categorías [12], las funciones que proyectan α sobre β (o una parte de β) —en la terminología de E. H. Moore, las funciones sobre α a β, de α

---

[11] Es decir, átomos que no sean combinadores. Los combinadores se consideran como partes del procedimiento de construcción de los obs; por tanto, es más natural incluir sus propiedades en (d).

[12] Usamos letras griegas minúsculas para las categorías en esta discusión intuitiva. Esto está de acuerdo con el uso adoptado en § E1.

a β—, forman también, dicho intuitivamente, una categoría. Designemos esta categoría por

$$\mathsf{F}\,\alpha\,\beta, \tag{2}$$

siendo F, por el momento, un nuevo ob primitivo. Entonces la regla intuitiva para la clasificación de (1) podría expresarse así: «Si f está en F y X está en α, entonces fX está en β».

Todo esto puede formalizarse. De acuerdo con nuestra decisión de dejar (a) y (c) sin especificar, postulamos ciertos obs primitivos

$$\theta_1, \theta_2, \ldots$$

sin postular nada sobre ellos, ni siquiera si son en número finito o infinito. Definimos inductivamente la noción formal de *F-ob*:

(I) Los obs θ_1, θ_2, ... son F-obs.
(II) Si α y β son obs-F, entonces Fαβ es un F-obs.

A continuación interpretamos la proposición

$$\vdash \alpha\, X,$$

siendo α un ob-F, como significativa de que el ob X pertenece a α. Luego adoptamos la regla siguiente (cuya interpretación es la regla intuitiva antes mencionada):

REGLA F. *Si* $\vdash \mathsf{F}XYZ$ *y* $\vdash XU$,

entonces $\vdash Y(ZU)$.

Evidentemente, los combinadores, que son, esencialmente, medios para formar combinaciones distintas de las conseguidas por aplicación directa, tendrán especiales propiedades intuitivas respecto de un tal k. Estas propiedades pueden expresarse a veces en la forma

$$\vdash \xi\, X, \tag{3}$$

siendo X el combinador en cuestión y ξ un ob-F que incluye ciertas indeterminadas sustituibles por obs-F cualesquiera. En tal caso diremos que X tiene el *carácter funcional* ξ, y designaremos el esquema proposicional (3) por (FX). Ilustraremos este concepto con dos ejemplos.

Empecemos por considerar K. Puesto que $Kxy = x$, Kxy pertenecerá a la misma categoría que x cualquiera que sea y. Si x pertenece a α e y pertenece a β, entonces Kx pertenecerá a $F\beta\alpha$; y como esto vale para todo x de α, K pertenecerá a $F\alpha\ (F\beta\alpha)$. Tenemos, pues, intuitivamente,

(FK) $$\vdash F\alpha\ (F\beta\alpha)\ K,$$

afirmación que asigna a K el carácter funcional $F\alpha\ (F\beta\alpha)$.

Consideremos ahora S. Tenemos $Sxyz = xz(yz)$. Esto pertenecerá a una categoría γ si xz está en $F\beta\gamma$ e yz está en β. Por otro lado, xz estará en $F\beta\gamma$ si x está en $F\alpha\ (F\beta\gamma)$ y z está en α; mientras que yz estará en β si y está en $F\alpha\beta$ y z está en α. Así, pues, $xz(yz)$ estará en γ si x está en $F\alpha\ (F\beta\gamma)$, y en $F\alpha\beta$ y z en α. Supongamos satisfechas esas condiciones puestas a x, y, z. Entonces $Sxyz$ está en γ si Sxy está en $F\alpha\gamma$; esto a su vez será verdad si Sx está en $F(F\alpha\beta)\ (F\alpha\gamma)$; y, por último, esto será verdad si S tiene el carácter funcional expresado por

(FS) $$\vdash F(F\alpha\ (F\beta\gamma))\ (F(F\alpha\beta)\ (F\alpha\gamma))S.$$

Del modo ilustrado por esos ejemplos podemos encontrar caracteres funcionales de varios combinadores. He aquí una breve lista [13].

(FI) $$\vdash F\alpha\alpha\ I.$$
(FB) $$\vdash F(F\beta\gamma)\ (F(F\alpha\beta)\ (F\alpha\gamma))B.$$
(FC) $$\vdash F(F\alpha\ (F\beta\gamma))\ (F\beta\ (F\alpha\gamma))C.$$
(FW) $$\vdash F(F\alpha(F\alpha\beta))\ (F\alpha\beta)W.$$

En todas esas formulaciones 'α', 'β', 'γ' denotan obs-F cualesquiera. Obsérvese que, según la interpretación, $F\alpha\ (F\beta\gamma)$ es la categoría de las funciones f tales que, para todo X en α, fX es una función de β a γ; dicho de otro modo, f es una función de dos argumentos tal que, para X en α e Y en β, fXY está en γ.

El estudio de propiedades como ésas, basadas en F como idea primitiva, se llamará *teoría de la funcionalidad*. Diremos que F indica la noción de funcionalidad y la llamaremos la *primitiva de funcionalidad*. Si los obs-F se restringen como se ha hecho aquí y se mantienen ciertas restricciones técnicas, hablaremos de la teoría *básica* de la funcionalidad; si, en cambio, se permite que los θ sean obs con otras propiedades, y

---

[13] En § 9D4 se da una lista más extensa.

sujetos a ciertas otras restricciones, estaremos en el caso de la teoría *restringida*; por último, si los θ no sufren restricción alguna se tratará de la teoría *libre* [14]. Una teoría en la que se usen nociones de funcionalidad en combinación con otras nociones o postulados primitivos se llamará teoría *ampliada*. Así, una teoría que contenga especificaciones pertinentes a (a) y (c) de la tabla anterior será una teoría ampliada.

Estas nociones se aprovecharán y desarrollarán en los capítulos **9** y **10**. Aquí nuestro objetivo es explicar la significación intuitiva de F. Con este objeto consideraremos algunos ejemplos de categorías definidas en términos de dos primitivas, J y H, que representan, respectivamente, las categorías de los individuos y las proposiciones. En los ejemplos concebiremos a los individuos como números naturales. Entonces algunas de las categorías serían interpretables del modo siguiente:

FJJ: funciones descriptivas de un individuo, como el cuadrado, el factor primo mínimo, el factorial.

FJH: propiedades de clases de individuos, como la de ser primo, impar, cuadrado.

FHH: conectivas proposicionales monádicas, como la negación.

FJ(FJJ): funciones descriptivas de dos individuos, como la suma, el producto, la potencia, etc.

FJ(FJH): relaciones entre individuos, como la igualdad, el orden, la divisibilidad.

FH(FHH): conectivas proposicionales binarias, como la implicación o la conjunción.

F(FJJ)J: funciones descriptivas de funciones descriptivas, como el valor máximo o mínimo, o el valor de la función para un argumento determinado. (También puede ser un ejemplo la integral definida para límites fijos.

F(FJJ)H: propiedades de funciones descriptivas, como la monotonía.

F(FJH)J: funciones descriptivas de una clase, como el elemento mayor o menor, el número cardinal (en una interpretación).

F(FJH)H: propiedades de propiedades, como la finitud, el número cardinal (considerado como una propiedad), los cuantificadores.

F(FJJ)(FJJ): operaciones que convierten una función descriptiva en otra, como la diferencia finita.

FJ(F(FJJ)H): relaciones de un individuo a una función, como el ser uno de sus valores.

F(FJJ)(F(FJJ)H): relaciones entre funciones, como la dominancia.

---

[14] Llamada «teoría plena» [«full theory»] en [IFT].

FJ(F(FJH)H): relaciones entre un individuo y una propiedad, como la posesión de la propiedad (es decir, la pertenencia a una clase).
F(FJH)(F(FJH)H): relaciones entre propiedades, como la inclusión.
F(FJ(FJH))H: propiedades de relaciones, como la simetría.
F(FJ(FJH))(F(FJ(FJH))H: relaciones entre relaciones, como el ser la recíproca de.
F(F(FJH)H)H: propiedades de familias de conjuntos, como el ser bien ordenado respecto de la inclusión.

Esos ejemplos ilustran la jerarquía que puede construirse a base de F, J y H. Basta para definir las categorías de muchos sistemas lógicos. En algunos sistemas, desde luego, no se usan todas las categorías. Así, por ejemplo, existe un conocido teorema según el cual es posible prescindir, en ciertas circunstancias, de funciones descriptivas; otro, que elimina las relaciones. En la teoría simplificada de los tipos, sin relaciones ni funciones descriptivas, las categorías ('tipos') serían simplemente

$$J,\ \mathsf{F}JH,\ \mathsf{F}(\mathsf{F}JH)H,\ \mathsf{F}(\mathsf{F}(\mathsf{F}JH)H)H,\ \ldots$$

En la teoría abstracta de conjuntos, si interpretamos J como la categoría de los conjuntos, necesitamos la categoría FJ (FJJ) (para suma, par ordenado, etc.). La categoría FJH corresponde más o menos a lo que algunos autores llaman «clase». Como ya se ha dicho (§ 0D), gran parte de las más recientes teorías de conjuntos abstractos es de carácter combinatorio; esta porción combinatoria está, evidentemente, muy relacionada con la teoría de la funcionalidad. La relación entre los dos campos ha sido estudiada por Cogan [FTS].

En la teoría libre de la funcionalidad puede introducirse I como categoría. Su interpretación como tal es, evidentemente, la categoría de las proposiciones verdaderas. Con I pueden definirse categorías tales como
FJI: las propiedades universales.
FH(FHI): tautologías de dos argumentos.

La teoría de la funcionalidad puede, pues, interpretarse en términos de gramática. Pero como esto supone algunos puntos técnicos que no son estrictamente necesarios para lo que sigue, pospondremos su consideración hasta § S2.

D. RELACIONES CON OTROS CONCEPTOS ILATIVOS

La noción F introducida en la sección anterior no es una idea intuitivamente sencilla. Más bien es posible considerarla como un compuesto de

otras ideas lógicas, como la generalidad y la implicación. Vamos a introducir aquí los obs ξ (generalidad restringida) y Π (generalidad universal), así como P (implicación), ya introducida en § A, y a considerar sus relaciones mutuas y con F.

El ob ξ debe interpretarse como implicación formal (en el sentido de Russell y Peano) entre propiedades, o como inclusión entre clases o categorías. Según esta interpretación, estaría asociado con la regla

REGLA ξ. *Si* $\vdash \xi XY$ *y* $\vdash XU$,

entonces $\vdash YU$.

X e Y son aquí obs que, por el momento al menos, consideramos sin restricción.

El ob Π debe interpretarse como cuantificación universal. Según esto, debemos poder inferir de $\vdash \Pi X$ la afirmación $\vdash XU$ para cualquier ob U. Pero esta regla incluiría una variable intuitiva, a saber, 'U', en la conclusión sin que esté presente en la premisa. Esto conculcaría el criterio determinístico de Rosser ((f) de § 7A1). Para evitarlo introducimos la premisa adicional $\vdash \mathsf{E}U$ (cfr. § 7A2) y formulamos la regla del modo siguiente:

REGLA Π. *Si* $\vdash \Pi X$ *y* $\vdash \mathsf{E}U$,

entonces $\vdash XU$.

Tampoco aquí impondremos por ahora restricciones a X.

Si comparamos ahora las reglas F y ξ observaremos que la conclusión de la regla F puede derivarse de la de la regla ξ poniendo $\mathsf{B}YZ$ en lugar de Y. Por tanto, la regla F sería una consecuencia de la regla ξ si introdujéramos la definición

(1) $$\mathsf{F} \equiv [x, y, z] \,.\, \xi\, x(\mathsf{B}yz),$$

o, si se prefiere una forma sin variables ligadas,

$$\mathsf{F} \equiv \Phi\, \mathsf{B}^2\, \xi\, (\mathsf{KB}).$$

Análogamente, con Π y P podemos definir ξ del modo siguiente:

(2) $$\xi \equiv [x, y] \,.\, \Pi\, ([z] \,.\, \mathsf{P}(xz)\, (yz)),$$

o, lo que equivale a los mismo,

$$\xi \equiv \mathsf{B}^2\,\Pi\,(\Phi\,\mathsf{P}).$$

Así, pues, F puede definirse en términos de ξ, y ξ a su vez en términos de Π y P.

Este proceso de definición da, sin embargo, también resultado en sentido inverso. Pues teniendo ξ podemos definir Π y P del modo siguiente:

(3) $$\Pi \equiv \xi\mathsf{E},$$

(4) $$\mathsf{P} \equiv [x, y]\,\xi\,(\mathsf{K}x)\,(\mathsf{K}y) \equiv \Psi\,\xi\,\mathsf{K}\ ^{15}.$$

Por otro lado, si tenemos F y si X e Y de la regla F son obs sin restringir, entonces cualquiera de los obs

(5) $$\xi' \equiv [x,y]\ \mathsf{F}xy\mathsf{I},$$

(6) $$\xi'' \equiv [x]\ \mathsf{F}x\mathsf{I},$$

nos dará un ξ tal que la regla ξ es válida.

Esta discusión tiene que modificarse algo tal vez si se introducen restricciones sobre las variables intuitivas en las reglas F, ξ, Π, P, Si despreciamos tales restricciones es irrelevante qué primitivas tomamos: F, ξ o el par Π, P. Filosóficamente tal vez sea preferible el último par; pero la discusión de § A, que ha mostrado la peligrosa naturaleza de la implicación, suscita alguna duda. Mostraremos, en efecto, que hay motivos suficientes para adoptar otra solución.

Con este fin observaremos que si tomamos F como primitiva, entonces ξ' y ξ'', tal como quedan definidos en (5) y (6), respectivamente, son obs distintos en el sentido de que no son convertibles el uno en el otro. Debe suponerse que esa diferencia se mantendrá si los axiomas postulados para F se eligen adecuadamente. Supongamos, por otro lado, que F está definido por (1). Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\xi'\,xy = \mathsf{F}xy\mathsf{I} &= \xi\,x(\mathsf{B}y\mathsf{I}) && \text{por (1), (5),}\\
&= \xi\,x(\mathsf{B}\mathsf{I}y) && \text{por teor. 5D2,}\\
&= \mathsf{F}x\mathsf{I}y = \xi''xy && \text{por (1), (6),}\\
&= \xi\,xy && \text{por Ax. } [\mathsf{I}_1].
\end{aligned}$$

---

[15] En § S1 se encontrarán referencias sobre precursores de esta definición.

Por tanto, por (3) (con la igualdad en el sentido de $\mathscr{H}_\eta$),

$$\xi = \xi' = \xi''. \tag{7}$$

Esto vale sin consideración de los axiomas de F, e incluso en el caso de que no haya tales axiomas. De aquí podemos inferir que, *en principio, la teoría de la funcionalidad es más débil que una teoría con los mismos axiomas formulada en términos de* ξ.

No está, en cambio, todavía clara la situación por lo que hace a la relación entre los sistemas basados en ξ y los basados en Π y P. Pero es muy posible que la relación entre las dos clases de sistemas sea análoga a la que existe entre los basados en F y los basados en ξ.

Así tenemos tres sistemas de fuerza creciente a los que llamaremos, respectivamente, $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$, $\mathscr{F}_3$.

$\mathscr{F}_1$: la teoría de la funcionalidad, que usa a F como primitiva.

$\mathscr{F}_2$: la teoría de la generalidad restringida, que usa a ξ como primitiva.

$\mathscr{F}_3$: la teoría de la generalidad universal, basada en Π y P.

Cada una de estas tres teorías se formulará como un sistema deductivo con postulados que hay que añadir a la teoría de combinadores. La teoría $\mathscr{F}_1$ se estudiará en los capítulos **9** y **10**; las demás teorías se dejan para el segundo volumen [16].

E. PRELIMINARES FORMALES

Hasta el momento hemos discutido las significaciones intuitivas de las diversas nociones, eliminando en lo posible el aparato formal. Vamos a atender ahora a este aparato, considerando en esta sección algunos detalles que podemos esperar análogos en todas las teorías.

1. Convenciones simbólicas

Usaremos letras griegas minúsculas como variables intuitivas para obs sometidos a limitaciones que variarán algo de sistema a sistema y de contexto a contexto. En la teoría de la funcionalidad serán los F-obs descritos en § C. Las restricciones puestas a esos obs se formularán al

---

[16] Pueden verse sumarios del estado actual de estos temas en [ACT] y Cogan [FTS].

principio de los capítulos o secciones y seguirán vigentes mientras no se haga otra especificación diversa.

Este uso de las minúsculas griegas está en conflicto con el uso de 'λ' para indicar la abstracción funcional y con el uso de otras minúsculas griegas para indicar postulados. Pero el contexto, junto con los paréntesis, corchetes, etc., usados en relación con la notación de los postulados, bastará para eliminar toda posibilidad de confusión.

Reservamos la letra '$\mathfrak{T}$' para indicar proposiciones elementales indeterminadas, y 'T' para indicar un uso especial en relación con tales proposiciones, del modo siguiente: si $\mathfrak{T}$ es la proposición elemental

$$(1) \qquad \vdash T,$$

decimos que T es el ob afirmado en $\mathfrak{T}$. Adoptamos para siempre la convención de que si usamos '$\mathfrak{T}$' con subíndices u otros signos diacríticos para designar alguna proposición elemental de la forma (1), entonces 'T' con los mismos subíndices, etc., designará el ob afirmado en aquella proposición, y viceversa.

El símbolo '$\vdash$' se usa tal como se expuso en § 2B5c. A base del mismo las reglas de § D, por ejemplo, pueden escribirse del modo siguiente:

REGLA F. $\quad \mathsf{F}XYZ, XU \vdash Y(ZU),$

REGLA ξ. $\quad \xi XY, XU \vdash YU,$

REGLA Π. $\quad \Pi X, \mathsf{E}U \vdash XU.$

Por lo que hace a deducciones recordamos las convenciones sentadas en § 2B. Reservamos la letra '$\mathfrak{D}$' para designar una deducción y '$\mathfrak{B}$' para la base de una deducción.

2. Estipulaciones básicas

Postulamos un sistema subyacente $\mathscr{F}_0$ a partir del cual se forman otros sistemas ilativos añadiendo primitivas y supuestos adicionales. Este tendrá las siguientes características:

(a) Es aplicacional y logístico.

(b) Contiene un ob E, tal que

$$(2) \qquad \vdash \mathsf{E}X$$

vale para todo ob X. Se tendrá esto, como en § 7A, si afirmamos (2) para todo átomo y postulamos la regla:

REGLA E. $\qquad \mathsf{E}X, \mathsf{E}Y \vdash \mathsf{E}(XY).$

Si se añaden nuevos átomos a $\mathscr{F}_0$ se entiende que (2) vale también para ellos.

(c) Contiene un conjunto de combinadores primitivos, y, consiguientemente, todos los combinadores formados a partir de esos primitivos. Si contiene K y S [17], lo que quiere decir que contiene todos los combinadores, diremos que $\mathscr{F}_0$ y las teorías basadas en él son *plenos*; si no contiene más que algún subconjunto propio de todos los combinadores diremos que esas teorías son *parciales*.

(d) La relación de igualdad de alguna teoría de combinadores puede formularse en $\mathscr{F}_0$ y constituye una equivalencia monótona. Formularemos esta condición en § 3, llamándola regla Eq.

3. IGUALDAD

A partir de ahora usamos la notación

(3) $\qquad X = Y$

para indicar que la igualdad de X e Y vale en la extensión de los obs de algún sistema $\mathscr{H}$ que incluya todos los átomos del sistema que estemos discutiendo. Si no se dice lo contrario, debe entenderse que se trata del sistema $\mathscr{H}_\eta$. Postulamos ahora, como se ha indicado en (d) de § 2, la regla:

REGLA Eq. $\qquad$ *Si* $X = Y$, *entonces* $X \vdash Y$.

Si (en el sistema que se considera) hay un Q tal que la relación

(4) $\qquad \vdash \mathsf{Q}XY$

tiene las propiedades Q^{pq} (§ 7C), entonces la regla Eq equivale a la afirmación de que el sistema es un sistema $\mathscr{Q}$ (§ 7C) respecto de la relación (4). Supongamos, en efecto, que vale la última condición.

---

[17] Sea como átomos o de otro modo.

Entonces para todo X e Y tales que (3), tenemos (4) por § 7C; por tanto, por Q^{θ}, tenemos

$$X \vdash Y,$$

de modo que se verifica la regla Eq. Recíprocamente, supongamos que valen la regla Eq, $Q^{\rho\varphi}$ y las reglas E. Como cada una de las reglas combinatorias (§ 7B) es un caso especial de la regla Eq, estas reglas son todas válidas. Sea

$$\vdash QUV$$

uno de los axiomas combinatorios (ω). Como $U = V$, el axioma se sigue de

$$\vdash QUU$$

por la regla Eq. Pero esto último vale ya por Q^{ρ}. Se sigue de aquí que los axiomas combinatorios valen también para (4) como relación de igualdad. El sistema es, por tanto, un sistema $\mathfrak{L}$ por definición (§ 7C).

Observaremos que en cualquier caso (4) se sigue de (3). Pero la recíproca de esto es una propiedad cuya demostración para cualquier sistema dado implica la consistencia de dicho sistema. Llamaremos a esta propiedad *consistencia*-Q. Es, evidentemente, una propiedad más fuerte que la consistencia, pues puede no darse aunque haya consistencia plena; pero es casi tan esencial como la consistencia desde el punto de vista de la aceptabilidad. En casos tales tenemos que distinguir entre (3) y (4).

En general, no consideramos igualdades más débiles que $\mathscr{H}_{\eta}$. Es seguro que muchas ecuaciones valen en el sentido de $\mathscr{H}_{\beta}$ siempre que añadamos axiomas de la forma (para I_{η} cfr. § 6C2):

$$\begin{aligned} \mathsf{B}^2\mathsf{I}_{\eta}\mathsf{F} &= \mathsf{F}, \\ \mathsf{B}\mathsf{I}_{\eta}\Xi &= \Xi, \\ \mathsf{B}\mathsf{I}_{\eta}\mathsf{P} &= \mathsf{P}, \\ \mathsf{I}_{\eta}\Pi &= \Pi, \end{aligned}$$

junto con medios suficientes para inferir de $\vdash \mathsf{F}\alpha\beta f$ que

$$\mathsf{I}_{\eta} f = f$$

etcétera. En estas circunstancias será, probablemente, excepcional que las ecuaciones no valgan en $\mathscr{H}_{\beta}$. De todos modos, estando como está hoy la lógica combinatoria ilativa en un estadio inicial, estos refina-

mientos son de secundaria importancia. En unas cuantas ocasiones en que el tema parece de especial interés usamos 'β' como subíndice para indicar que la igualdad es la de $\mathscr{H}_\beta$.

4. Reducciones

Con fines de referencia enumeramos las siguientes propiedades de una relación de reducción $\boldsymbol{R}$ sin más especificación.

R1. Las propiedades (ρ), (τ), (μ), (ν), (K), (S), (I) valen todas.

R2. Si $X \boldsymbol{R} Y$, entonces $X = Y$.

R3. Si a es un ob primitivo que no sea un combinador y si

$$aX_1X_2 \ldots X_m \boldsymbol{R} Y,$$

entonces existen $Y_1, Y_2 \ldots, Y_m$ tales que

$$X_i \boldsymbol{R} Y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

y

$$Y \equiv aY_1 \ldots Y_m.$$

R4. (Propiedad de Church-Rosser). Si $X = Y$, entonces hay un $\boldsymbol{Z}$ tal que

$$X \boldsymbol{R} Z \quad \text{e} \quad Y \boldsymbol{R} Z.$$

Designaremos por

$$X \geq Y \tag{5}$$

una reducción que satisfaga los postulados R1, R2 y R3. La reducción así designada en el capítulo 5 —a saber, la relación monótona ordenadora parcial engendrada por (K) y (S)— es una relalización de una reducción de este tipo. Cuando deseemos ser concretos esta reducción se simbolizará con la notación

$$X \geq_\beta Y; \tag{6}$$

pero, en general, se omitirá el subíndice y (5) se interpretará como (6), salvo que el contexto indique otra cosa.

Para una reducción que satisfaga las propiedades R1, R2, R3 y R4 usamos la notación

$$X \succ Y.$$

La reducción fuerte introducida en § **6F** es una realización de este tipo de reducción. Así se ha mostrado en § **6F1** para R1, R2 y R4; y para R3 en el teorema **6F5**.

En varios lugares del texto siguiente es importante saber que la igualdad tiene una propiedad parecida a R3. Con fines también de referencia vamos a demostrarlo como lema:

LEMA. *Sean X e Y obs de las formas*

$$X \equiv aX_1 \dots X_m,$$
$$X \equiv bY_1 \dots Y_n,$$

siendo a y b constantes primitivas que no son combinadores, y tales que

$$X = Y.$$

Entonces $a \equiv b$, $m = n$, *y*

$$X_i = Y_i \qquad i = 1, 2, \dots, m.$$

Demostración. Por § **6E**,

$$X_\lambda \text{ cnv } Y_\lambda.$$

Por tanto, por el teorema de Church-Rosser, hay un ob-λ A, tal que

$$X_\lambda \text{ red } A, \qquad Y_\lambda \text{ red } A.$$

Como la relación «red» tiene la propiedad R3, existen una constante c y obs-λ $A_1 \dots, A_m$ tales que $m = n$ y

$$A \equiv cA_1 \dots A_m,$$

con

$$a \equiv b \equiv c, \quad (X_i)_\lambda \text{ red } A_i, \quad (Y_i)_\lambda \text{ red } A_i.$$

Por tanto,

$$(X_i)_\lambda \text{ cnv } (Y_i)_\lambda.$$

De aquí, por § **6E**

$$X_i = Y_i, \text{ q. e. d.}$$

5. CONVENCIONES SOBRE PROPOSICIONES E INFERENCIAS

Una proposición elemental $\mathfrak{T}$ será, generalmente, tal que existen un ξ y un X tales que $T \equiv \xi X$. Tales ξ y X están, en realidad, unívocamente definidos por $\mathfrak{T}$, excepto por lo que hace a la posibilidad de que T sea un

ob primitivo. Aunque esta posibilidad no puede, sin duda, excluirse *a priori*, algunas de las reglas son tales que esa posibilidad no puede realizarse en las premisas o no puede realizarse en la conclusión: consecuentemente, no puede presentarse en ninguna argumentación que use sólo esas reglas. Cuando existen ξ y X, llamamos a ξ el *predicado* de $\mathfrak{T}$ (y también de T, por tanto), y a X el *sujeto*.

Una inferencia por la regla Eq se llamará *conversión*. Si en la inferencia X se reduce a Y en algunos de los sentidos de § 4, la inferencia se llamará *reducción*; lo recíproco de una reducción se llamará *expansión*. Una conversión (reducción, expansión) puede afectar sólo al sujeto o sólo al predicado; en el primer caso hablaremos de *conversión (reducción, expansión) de sujeto;* en el segundo caso, de *conversión (reducción, expansión) de predicado*. A menos de precisión en contrario, admitiremos la posibilidad de que una conversión (reducción, expansión) sea *nula*, es decir, que la conclusión sea idéntica a la premisa; así es como pueden ser reflexivas las relaciones que corresponden a la conversión, la reducción o la expansión.

S. TEMAS SUPLEMENTARIOS

1. Comentario histórico y bibliográfico

Se encontrarán breves sumarios de lógica combinatoria ilativa en [CFM], [LCA], [PBP].

Las ideas de implicación y de generalidad universal son, naturalmente, ideas lógicas comunes y típicas, y aparecen en una forma u otra en todo sistema lógico prácticamente. La generalidad restringida aparece también muy comúnmente, por regla general, como idea definida (implicación «formal»). Se usa como idea primitiva de la lógica en Church [SPF] y en Quine [SLg]; Quine da explícitamente la definición de la implicación en términos de dicha idea, y en forma equivalente a § D(4). La misma idea apareció ya antes en Schönfinkel, con su U, que tiene, con la función de Sheffer, la misma relación que ξ con P.

La noción de funcionalidad no ha sido discutida tan generalmente; pero se cuenta ya con una considerable discusión de las funciones. Cfr., por ejemplo, Frege [FBg] y parte de la obra de la escuela de Peano (cfr. Feys [PBF]). La noción de funcionalidad aparece explícitamente en sentido semiótico en Ajdukiewicz [SKn] y en otros trabajos citados en § 2.

Como ya se ha dicho, los primeros trabajos de Church ([SPF. I] y [SPF. II]) se proponían dar una fundamentación de toda la lógica. Esos trabajos contienen los elementos de la teoría de la conversión λ, así como postulados de lógica combinatoria ilativa basados en ξ. Contenían también el E restringido mencionado en § 7A2, definido en términos del cuantificador existencial Σ. También una formulación del álgebra proposicional y del cálculo de predicados basada en esas nociones, además de la negación y la conjunción, que se tomaban como primitivas. Había también una operación de abstracción A. Se subrayaba el hecho de que la variable real quedaba eliminada, lo que quería decir que no había esquemas axiomáticos, ni cuantificador universal, ni categoría universal; todas las proposiciones presentaban una hipótesis que usaba E y ξ.

Kleene y Rosser demostraron en 1935 que el sistema de Church era inconsistente. Desde entonces tanto Church como sus discípulos parecen haber abandonado todo intento de estudiar la lógica combinatoria ilativa desde un punto de vista general. Church propuso en su [RPx] y en [PFC] un sistema con una jerarquía transfinita de implicaciones formales. Pero éstas se definían como obs combinatorios en términos de una enumeración gödeliana, de tal modo que la teoría es más un desarrollo de lógica combinatoria pura y de aritmética combinatoria que de lógica combinatoria ilativa en nuestro sentido; la enumeración se transforma, naturalmente, si el sistema se amplía. Este interesante sistema fue desarrollado en Church [MLg]. Parece haber sido abandonado más tarde, pues no aparece ya en Church [CLC]. No nos parece que en Church [CLC] ni en ninguna publicación posterior suya o de sus discípulos haya nada relevante para nuestro tema.

La obra de Curry empezó inmediatamente después de su regreso de Gotinga, en 1929. En una carta a Hilbert, fechada el 19 de diciembre de 1929, proponía considerar a F como nueva idea primitiva además de Π y P, introducidas ya en [GKL]; formuló los axiomas de Π y F —estos últimos, esencialmente, los esquemas (FB), (FC), (FK) y (FW) y los resultados para Π de [UQC] (entonces en elaboración). La teoría de Π y P se desarrolló en [UQC], [AVS], y [PEI]; la de F, en [FPF]. Esta última se basaba en los axiomas de la carta a Hilbert, de 1929, pero expresados como axiomas (no esquemas) por medio de Π; se mostró, sin embargo, que esas propiedades podían derivarse, usando axiomas implicacionales introducidos en [PEI], a partir de una definición en términos de Π y P. En (FCL) se encuentra un sumario escrito dos años más tarde.

Cuando se anunció la paradoja de Kleene y Rosser quedó inmediatamente claro que se aplicaba a todos aquellos desarrollos que usaran los axiomas implicacionales de [PEI][18]. Curry se dio cuenta de que era necesario estudiar a fondo la paradoja hasta descubrir su nervio central. El resultado de su estudio fue [PKR]. Pero casi inmediatamente después se descubrió la paradoja, más sencilla, de [IFL]. Esta fue la base de § A.

La entrada de los Estados Unidos en la Segunda Guerra Mundial impuso la interrupción de estos estudios. Algunos resultados obtenidos y también algunas conjeturas se resumieron en [CFM], y en [ACT] se dio un sumario de algunos resultados técnicos; pero las demostraciones, que habían tenido que omitirse, eran largas y difíciles. Estos resultados se refieren, principalmente, a $\mathscr{F}_2$.

Al reemprender el trabajo pareció conveniente hacer un estudio más profundo de $\mathscr{F}_1$. Aunque el sistema es muy débil contenía algunos problemas sorprendentes; y pareció plausible que su estudio arrojara luz sobre esos problemas en relación con sistemas más fuertes. Los resultados del estudio se contienen en los capítulos **9** y **10**; en [CTF] hay un resumen. Ha sido necesario posponer el estudio de $\mathscr{F}_2$ y $\mathscr{F}_3$ al segundo volumen.

La teoría de la funcionalidad está relacionada con las categorías semánticas de Lesniewski. Pero se ha desarrollado con toda independencia. Excepto por lo que hace a Ajdukiewicz [SKn], no hemos tenido ningún contacto con la obra de Lesniewski hasta tiempos muy recientes. No se ha hecho aún ningún estudio detallado de las conexiones entre las teorías de Lesniewski y la lógica combinatoria.

2. Interpretación gramatical de la funcionalidad

Usando la terminología de [TFD] I, § 5, resulta claro que podemos dar a F una interpretación gramatical. Efectivamente, si α y β son categorías gramaticales de un len-

---

[18] De una conversación inferimos que esos autores habían intentado en vano derivar una contradicción de los axiomas anteriores a [PEI]; pero cuando apareció [PEI] se encontraron, finalmente, con lo que necesitaban.

guaje $\mathfrak{L}$, $F\alpha\beta$ puede interpretarse como la categoría de functores para los cuales el valor está en β cuando el functor se aplica a un argumento que está en α. Esto corresponde a la idea simbolizada por 'β/α' en Ajdukiewicz [SKn]. Cfr. también Bochenski [SCt], Bar-Hillel [SCt].

Si consideramos un lenguaje con dos categorías básicas, nombre y enunciado, podemos identificarlas con los *J* y *H*, respectivamente, de § B; pero estará más de acuerdo con la tendencia de Ajdukiewicz el llamarlas *n* y *s*, respectivamente. Entonces algunas de las categorías derivadas tendrán interpretaciones gramaticales. En la lista de más abajo damos ejemplos de algunas de esas categorías que pueden tener cierto interés lingüístico. Los ejemplos se clasifican según la terminología de [TFD], *loc. cit.* Sin duda, acarrean una cierta simplificación de la gramática, pues es dudoso que pueda darse adecuadamente razón de la gramática de un lenguaje natural en términos de sólo dos categorías básicas. Obsérvese que algunas de las categorías no se presentan en la lista de § B: la razón es que no se presentan ordinariamente en sistemas matemáticos.

Functores primarios

Adjuntores

F*nn*: adjetivos calificativos ordinarios, nombres en genitivo (posesivo).

F*n* (F*nn*): sufijos como '-oso' en 'amistoso'; algunas conjunciones, como la 'y' de 'Juan y Enrique son hermanos'; algunas preposiciones, como el 'de' de 'el Coloso de Rodas' o el 'de' de 'la teoría de la funcionalidad'; la desinencia del genitivo (posesivo) en lenguas que la tengan; los adjetivos en grado comparativo, con 'que'; etc.

F*n*(F*n*(F*nn*)): el guión de 'el vuelo Madrid-Barcelona', 'el expreso Madrid-Sevilla'.

Predicativos (verbos)

F*ns*: verbos intransitivos; la terminación del vocativo latino (suponiendo que un nombre en nominativo fuera un enunciado completo); la combinación de un verbo transitivo con sus objetos.

F*n*(F*ns*): verbos transitivos con un objeto; la cópula y algunos verbos que expresan igualdad, semejanza, etc.

F*n*(F*n*(F*ns*)): verbos transitivos con dos objetos, como 'dar', 'enseñar'.

Subnectores

F*sn*: algunas conjunciones subordinativas como 'que'; algunos usos de comillas.

Conectivas

F*ee*: el signo de negación; algunas veces también palabras que expresan énfasis, certeza, duda, etc.

F*s*(F*ee*): conjunciones coordinadoras de enunciados, como 'y', 'o', etc.

Functores secundarios

Adjuntores

F(F*nn*)*n*: sufijos como '-dad', etc.

F(F*nn*) (F*nn*): adverbios que modifican adjetivos; la operación de atribución de un adjetivo a un nombre.

F(F*nn*) (F(F*nn*) (F*nn*)): algunos sufijos de formación de adverbios del tipo anterior a partir de adjetivos, como el '-mente' de 'relativamente grande'.

F(F(F*nn*) (F*nn*)) (F(F*nn*)(F*nn*)): adverbios que modifican otros adverbios, los cuales a su vez modifican adjetivos, por ejemplo, el 'muy' de 'muy gravemente enfermo'.

F(F*nn*) (F(F(F*nn*) (F*nn*))) (F(F*nn*(F*nn*))): el sufijo '-mente' usado para formar un adverbio de la categoría anterior, como en 'relativamente demasiado grande'.
F(F*nn*) (F*n*(F*nn*)): transformación de un adjetivo en grado comparativo con 'que'.

Subnectores

F(F*ns*)*n*: el artículo determinado usado para formar descripciones; los sufijos que forman sustantivos verbales.
F(F*ns*) (F*nn*): sufijos que forman adjetivos verbales.

Conectivas

F(F*ns*)*s*: cuantificadores y sus varios equivalentes.
F(F*ns*)(F*ns*): adverbios que modifican verbos intransitivos.
F(F*n*(F*ns*)) (F*n*(F*ns*)): adverbios que modifican verbos transitivos de un objeto.

Nectores mixtos

F*n*(F(F*ns*) (F*ns*)): sufijos que forman adverbios modificadores de verbos intransitivos a partir de nombres; preposiciones que forman frases adverbiales como el 'de' de 'está de primera'.

3. Observaciones sobre consistencia

Gran parte del trabajo dedicado a la teoría $\mathscr{F}_1$ se gastó en estudiar cuestiones de consistencia. Por eso parece oportuno comentar un poco la relevancia de las demostraciones de consistencia.

En la obra de Hilbert era de la mayor importancia demostrar la consistencia de sistemas de aritmética clásica y de análisis. Es bastante probable que en el fondo de esta insistencia por demostrar la consistencia hubiera un poco de filosofía idealista alemana, un deseo de justificar la matemática clásica como base absolutamente cierta *a priori*. Hilbert pensó que justificaría la matemática clásica de un modo absoluto si podía demostrar su consistencia mediante una argumentación finitista, y desde su punto de vista una tal demostración de consistencia era vital.

Pero es perfectamente posible adoptar una actitud más empirista respecto de la matemática, y desde un tal punto de vista la importancia de la demostración de consistencia no es tan imponente. Puede distinguirse entre la verdad o validez de una argumentación basada en un sistema formal como dato previo y la aceptabilidad del sistema en su conjunto. Para esta última, la consistencia demostrada no es el único criterio: ni es necesario ni es suficiente[19]. Hay otros criterios, como la validez para alguna interpretación, la conformabilidad con puntos de vista filosóficos, la sencillez, la naturalidad, la fecundidad, la capacidad sugeridora, etc. Hasta las leyes de la lógica expuestas en una teoría formal pueden concebirse como «hipótesis que aceptamos mientras sean útiles, pero que abandonaremos o corregiremos libremente en cuanto resulten insatisfactorias —ya sea por haber descubierto una contradicción interna, ya por alguna otra razón—»[20]. Ni siquiera debe suponerse que haya un único sistema de lógica matemática; puede ser que haya varios, para diferentes fines[21].

---

[19] Cfr. [OFP], págs. 61-62; [FPF], nota de la pág. 374. Contestando a un crítico que parece haber interpretado mal esta tesis, obsérvese que lo afirmado no es que una teoría inconsistente pueda ser aceptable, sino sólo que puede serlo una que carezca de demostración de consistencia.

[20] [OFP], *loc. cit.*

[21] Cfr. Church [LEM].

Los resultados de Gödel y los teoremas de incompletud e inconsistencia hacen plausible la tesis de que no tenemos, para los sistemas de lógica matemática más interesantes, más criterios que los empíricos. Las demostraciones de consistencia tendrán que incluir procedimientos no formalizables en la teoría, de tal modo que, o bien la teoría será inadecuada para fines interesantes, o bien la demostración queda sujeta a duda.

La lógica matemática puede concebirse como dedicada no a la construcción de un sistema de matemática que pueda demostrarse consistente, sino más bien a la discusión de los principios generales de los sistemas lógicos como tales. La consistencia de la matemática no es el único problema, ni tampoco el más serio. Más bien intentamos hallar, entre otras cosas, qué clases de sistemas son consistentes o inconsistentes.

Es posible que la situación sea la siguiente: iremos encontrando sistemas cada vez más fuertes que son consistentes, y sistemas cada vez más débiles que son inconsistentes. El avance en cualquiera de esas dos direcciones es un positivo aumento de conocimiento. Pero es posible que los sistemas aceptados por la mayoría de los matemáticos sigan encontrándose en la región en continua disminución, que se extiende entre unos y otros. Si se demuestra que uno de esos sistemas es inconsistente, se modificará para evitar la contradicción, pero la modificación no será seguramente tan grande como para permitir una demostración de consistencia; y entonces procederemos a nuevas investigaciones y tal vez encontremos nuevas inconsistencias. Es probable que la matemática progrese de ese modo más rápidamente que si se atuviera a sistemas cuya consistencia estuviera demostrada. Esto es, en sustancia, lo que se hace en las demás ciencias. El atenerse a sistemas que se sabe consistentes será más seguro, pero la conveniencia, la naturalidad y la fecundidad pueden ser más importantes. Esto se basa en el mismo principio por el cual se necesita la heurística tanto como la lógica para poder progresar.

Las cuestiones de consistencia seguirán, pues, siendo importantes, pero no tan trascendentales como en el programa de Hilbert. Serán, empero, especialmente importantes para sistemas fundamentales, que constituyen la base de otros sistemas.

La teoría básica de la funcionalidad

En § 8C se expusieron las ideas fundamentales de la teoría de la funcionalidad. En los dos capítulos últimos procederemos a su desarrollo sistemático. Después de una sección preliminar (§ A) dedicada a exponer convenciones fundamentales y resultados necesarios para fundamentar todas las fases de la teoría dedicaremos este capítulo al desarrollo de la teoría básica. En el capítulo siguiente consideraremos la teoría libre y varias formas de teoría restringida.

A. PRELIMINARES

En esta sección vamos a discutir ciertos temas preliminares referentes a la teoría de la funcionalidad en general o a la teoría básica en particular. La discusión complementará la hecha en el capítulo 8, §§ C-E; nos interesarán primariamente las modificaciones peculiares a la teoría de la funcionalidad. Estos temas preliminares comprenden: la naturaleza de nuestro programa, las convenciones y los supuestos en que se basa nuestra argumentación, y algunas consecuencias de carácter anticipativo y que no se encuadrarían fácilmente en las ulteriores secciones.

1. Naturaleza de la teoría de la funcionalidad

Como se ha dicho ya en el capítulo 8, puede afirmarse que el programa de la lógica combinatoria ilativa tiene dos objetivos principales. Por una parte intentamos analizar en ella los fundamentos de los sistemas lógicos usuales, como el cálculo de predicados o la teoría de conjuntos, interesándonos por el hallazgo de formalizaciones de las que puedan deducirse por especialización los fundamentos combinatorios de esas teorías, las cuales los toman generalmente sin formalizar (o, en todo caso, sólo parcialmente formalizados). Por otro lado, y a pesar de la aparente

trivialidad del indicado problema, los sistemas que uno arbitraría de un modo natural para alcanzar aquel objetivo resultan ser inconsistentes. Resulta, por tanto, necesario introducir restricciones; y para formalizar esas restricciones necesitamos un sistema aún más fundamental. Este proceso puede seguramente continuar en varios estadios, si no ya indefinidamente. Así, podemos distinguir en nuestro programa un aspecto sintético y otro analítico: el objeto del aspecto sintético consiste en formar una fundamentación adecuada para las teorías lógicas corrientes; el del aspecto analítico consiste en hallar, si es posible, una fundamentación última que satisfaga las exigencias más radicales en materia de simplicidad y determinación.

Hemos indicado ya que la teoría de la funcionalidad es intrínsecamente más débil que las demás teorías mencionadas en § 8D. Es, por tanto, natural suponer que tal vez sea adecuada para el aspecto analítico de nuestro programa. En esa suposición nos hemos basado. Y aunque más tarde resulte que hay alguna otra base adecuada para este fin, no por eso la que tomamos dejará de ser una plausible hipótesis de trabajo para fundamentar las investigaciones.

Vamos a estudiar en este capítulo la teoría básica de la funcionalidad tal como quedó definida en § 8C. Es una sencilla teoría ya interesante por sí misma. La teoría, o alguna forma debilitada de la misma, tiene una interpretación en las teorías más fuertes que se estudiarán luego; consecuentemente, los teoremas positivos de la primera son *a fortiori* válidos en las otras. En otros casos, cuando lo que solicita el interés son las condiciones necesarias, los teoremas de la teoría básica son casos especiales de los de las teorías más fuertes; así, por ejemplo, una demostración en las circunstancias, más sencillas, de la teoría básica permite explicar más claramente la idea esencial, de tal modo que las discusiones posteriores pueden centrarse en torno a las complicaciones debidas a la más compleja situación de las teorías fuertes. La teoría básica no está completamente formalizada, puesto que contiene una categoría epiteorética de obs-F y una relación epiteorética de igualdad[1]; y tampoco es estrictamente finita, pues incluye esquemas axiomáticos. Estas últimas simplificaciones nos ocuparán en el capítulo **10**.

2. Convenciones morfológicas

La teoría se caracteriza por el añadido del átomo F —llamado la primitiva de funcionalidad— a $\mathscr{F}_0$ (§ 8E2). Definimos la categoría de los

[1] Esa categoría y esa relación podrían, naturalmente, tomarse como nuevos predicados formales; pero entonces la teoría dejaría de ser logística.

obs-F como en § 8C; y las letras griegas minúsculas se usan para obs-F, generalmente sin especificar. Estas convenciones se estipularon ya en § 8E, ahora es necesario añadirles algunas precisiones.

Dados ciertos obs X_1, X_2 ..., definimos inductivamente una *función-F* de X_1, X_2, ..., del modo siguiente: (a) todo X_i es una tal función-F; (b) si Y y Z son funciones-F, FYZ también lo es. Una función-F de X_1, X_2, ..., que no sea ella misma uno de los X_1, X_2, ..., será un *F-compuesto* de X_1, X_2, ... Diremos que X es un *componente-F* de Y si —y sólo si— Y es una función-F de ciertos obs, uno de los cuales es X. Evidentemente, los obs-F son, precisamente, las funciones-F de θ_1, θ_2, ...

Llamamos *simple-F* a un ob-F que no sea de la forma $F\alpha\beta$; si es de la forma $F\alpha\beta$ lo llamamos *compuesto-F*. Este uso es conforme al párrafo anterior, porque si α y β son funciones-F de ciertos obs, $F\alpha\beta$ es un compuesto-F de esos mismo obs.

En la teoría básica los θ' son átomos: son concretamente indeterminados. Por tanto, son simples-F; y son los únicos simples-F admitidos. En la teoría libre cualquier ob puede ser un ob-F; evidentemente, podemos construir en la teoría libre una interpretación de la teoría básica haciendo que los θ_i sean obs cualesquiera salvo de la forma FXY. Cosa análoga puede hacerse en las teorías restringidas que consideraremos más tarde.

Distinguiremos, mediante índices puestos a '$\mathscr{F}_1$', entre los sistemas con supuestos diferentes respecto de los obs-F. Así, la teoría básica, que es la tratada en este capítulo, es $\mathscr{F}_1{}^b$; la teoría libre es $\mathscr{F}_1{}^f$; en el capítulo **10** se estudiarán varias teorías restringidas distinguidas por los índices correspondientes. $\mathscr{F}_1{}^r$, $\mathscr{F}_1{}^s$, $\mathscr{F}_1{}^i$.

3. Formulación de la teoría propiamente dicha [2]

Según las convenciones de § 8E, el predicado primitivo de la teoría es la aserción, y las proposiciones elementales son de la forma

$$(1) \qquad \vdash T.$$

Tomamos, además, la igualdad como predicado epiteorético auxiliar, según se precisó en § 8E3. Las reglas de procedimiento son las reglas F y Eq sentadas en § 8E, a saber:

Regla F. $FXYZ,\ XU \vdash Y(ZU)$,
Regla Eq. *Si* $X = Y$, *entonces* $X \vdash Y$.

[2] Cfr. § 1B1 para cuestiones de terminología.

X, Y, Z, U son obs cualesquiera. Obsérvese que por el momento no imponemos restricción alguna a X, Y de la regla F; si se les impone la restricción de ser obs-F hablaremos de un sistema $\mathscr{F}_1$ con regla F restringida.

En la teoría básica la regla Eq se restringe de tal modo que sólo permite conversión de sujetos. Llamaremos regla Eq′ a la regla así restringida; su formulación es:

REGLA Eq′. *Si* $X = Y$, *entonces* $\xi X \vdash \xi Y$, *siendo* ξ *un ob-F.*

Por lo que hace a los axiomas, no buscaremos desde el primer momento una formulación estrictamente finita, sino que nos contentaremos con una formulación que contiene esquemas axiomáticos. Los que más naturalemente se podrían tomar son los esquemas (FK) y (FS) discutidos y motivados en § **8**C. Más tarde se mostrará que los demás esquemas considerados allí —a saber, (FB), (FC), (FI), (FW)— pueden derivarse en la teoría básica a partir de (FS) y (FK); recíprocamente, (FS) puede derivarse de (FB), (FC) y (FW). Hay, pues, cierta indeterminación en la elección de los esquemas axiomáticos. Veremos, además, en el capítulo **10** que la teoría libre basada en (FK) y (FS) es inconsistente; por esta razón son interesantes los conjuntos débiles de esquemas axiomáticos, como (FB), (FC), (FI) y (FK). Conduciremos nuestro estudio de tal modo que puedan considerarse simultáneamente las distintas elecciones de esquemas axiomáticos. Distinguiremos las diferentes posibilidades escribiendo entre paréntesis, a continuación de '$\mathscr{F}_1$', los nombres de los combinadores cuyos caracteres funcionales se toman como esquemas axiomáticos. Así, $\mathscr{F}_1$ (K, S) es la teoría basada en (FK) y (FS); $\mathscr{F}_1$ (B, I, C, K) es la teoría basada en (FB), (FI), (FC) y (FK), etc. De acuerdo con § **8**E2c, llamamos *teoría plena* aquella en la que valgan a la vez (FK) y (FS) (tomados o no como esquemas axiomáticos); y llamamos *teoría parcial* a aquella en la cual uno u otro no valga de un modo general.

Consideraremos debidamente otras dos formulaciones relacionadas con la teoría $\mathscr{F}_1$. En § **6**E hemos visto que hay una equivalencia esencial entre las teorías sintéticas de combinadores y las teorías correspondientes de la abstracción funcional (conversión λ). Por tanto, debería ser posible formular la teoría a base de la conversión-λ. Pero la motivación de esta formulación no quedará clara sino una vez demostrado el teorema de la estratificación; por esta razón no discutiremos la formulación en cuestión hasta § D. La otra formulación, relacionada con las reglas de inferencia de Gentzen, viene sugerida por las analogías con el álgebra proposicional en § E; su consideración se pospondrá, por tanto, hasta § F.

4. Deducciones-F

Vamos a establecer aquí algunas convenciones referentes a las deducciones en $\mathscr{F}_1$. Están en armonía con las convenciones generales de § 2B.

Una explicación de la regla F se llamará una *inferencia-F*. Una tal inferencia es de la forma

$$(2) \qquad \frac{\vdash \mathsf{F}XYZ \qquad \vdash XU}{\vdash Y(ZU).}$$

La premisa de la izquierda se llamará *premisa mayor*, la de la derecha *premisa menor*. Cuando mencionamos sucesivamente las premisas de una inferencia-F la mencionada primero es siempre la mayor, aunque no se indique explícitamente.

Una deducción cuyas inferencias sean todas inferencias-F se llamará una *deducción-F*. Si una tal deducción se ha dispuesto como árbol genealógico supondremos que ello se ha hecho de tal modo que la premisa mayor esté a la izquierda, como en (2). Entonces llamaremos *rama principal* a la rama más izquierda obtenida partiendo de la conclusión y subiendo, tomando en cada bifurcación la premisa mayor; se llamará *rama colateral* a toda rama que parta de cualquier punto de la rama principal y tome en el primer paso la premisa menor. Las premisas situadas en cabeza de la rama principal y de las ramas colaterales se llamarán premisas *principales* y *colaterales*, respectivamente.

Si $\mathfrak{B}$ es una base dada, una *consecuencia-F* de $\mathfrak{B}$ es una proposición que es la conclusión de un deducción-F todas cuyas premisas están en $\mathfrak{B}$. Diremos también que una tal proposición es *deducible-F* de $\mathfrak{B}$. (Se entiende que la deducción-F puede ser vacía, es decir, que las consecuencias-F de $\mathfrak{B}$ incluyan todas las proposiciones contenidas en $\mathfrak{B}$ misma).

A menudo resulta conveniente una modificación del diagrama arborescente. Esta modificación consiste en escribir la premisa mayor a la izquierda de la conclusión en la misma línea horizontal, mientras que la premisa menor se escribe inmediatamente encima de la conclusión. Esto hace que las ramas principales sean completamente horizontales. Así, por ejemplo, la deducción-F

$$\frac{\dfrac{\vdash \mathsf{F}\alpha(\mathsf{F}\beta\gamma)X \qquad \vdash \alpha Y}{\vdash \mathsf{F}\beta\gamma(XY)} \qquad \vdash \beta Z}{\vdash \gamma(XYZ)}$$

puede escribirse con rama principal horizontal, del modo siguiente:

$$\begin{array}{lll} & \vdash \alpha Y & \vdash \beta Z \\ & \quad | & \quad | \\ \vdash \mathsf{F}\alpha(\mathsf{F}\beta\gamma)X \rightarrow & \vdash \mathsf{F}\beta\gamma(XY) \rightarrow & \vdash \gamma(XYZ) \end{array}$$

Al escribir deducciones es, naturalmente, permisible omitir el símbolo '$\vdash$'. Otras abreviaturas se nos presentarán por sí mismas a medida que avancemos.

5. La secuencia F

Para facilitar la formulación de ciertos epiteoremas definiremos para todo entero positivo m un ob F_m tal que

$$\mathsf{F}_m\alpha_1 \dots \alpha_m\beta$$

representa la categoría de funciones f de m argumentos cuyo valor $fx_1 \dots x_m$ está en β siempre que $x_1, \dots, x_m$ estén, respectivamente, en $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. La definición es:

Definición 1.

$$\mathsf{F}_1 \equiv \mathsf{F}, \tag{3}$$

$$\mathsf{F}_{m+1} \equiv [x_1, \dots, x_m, y, z] \,.\, \mathsf{F}_m x_1 \dots x_m(\mathsf{F}yz). \tag{4}$$

Para algunas necesidades concretas añadimos la especificación

$$\mathsf{F}_0 \equiv \mathsf{I}. \tag{5}$$

El teorema siguiente garantiza que F_m tiene las propiedades deseadas. La demostración se obtiene de un modo más o menos mecánico por inducción natural, de modo que no será necesario darla.

Teorema 3. *Para todo m y todo n* ≥ 0 *tenemos*:

(a) $\mathsf{F}_m =_\beta [x_1, \dots, x_m, y] \,(\mathsf{F}x_1 \cdot \mathsf{F}x_2 \cdot \dots \cdot \mathsf{F}x_m)y.$

(b) $\mathsf{F}_{m+n} =_\beta [x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_u, z] \,\mathsf{F}_m x_1 \dots x_m \,(\mathsf{F}_n y_1 \dots y_n z).$

(c) *Si* $\vdash \mathsf{F}_{m+n}\,\alpha_1 \dots \alpha_m\beta_1 \dots \beta_n\gamma f,$

y $\qquad \vdash \alpha_i X_i \qquad i = 1, 2, \dots, m;$

entonces $\qquad \vdash \mathsf{F}_n\beta_1 \dots \beta_n\gamma\,(fX_1 \dots X_m).$

Por medio de esta notación los esquemas axiomáticos (FK) y (FS) pueden escribirse, respectivamente:

$$\vdash F_2\alpha\beta\alpha\ K,$$
$$\vdash F_3\,(F_2\,\alpha\beta\gamma)\,(F\alpha\beta)\,\alpha\gamma\ S.$$

He aquí otra forma posible para el último:

$$\vdash F_2\,(F_2\,\alpha\beta\gamma)\,(F\alpha\beta)\,(F\alpha\gamma)\ S.$$

Para los caracteres funcionales de los demás combinadores mencionados en § 8C se tiene:

(FB) $\vdash F_2(F\beta\gamma)(F\alpha\beta)(F\alpha\gamma)B,$
(FC) $\vdash F(F_2\alpha\beta\gamma)(F_2\beta\alpha\gamma)C,$
(FW) $\vdash F(F_2\alpha\alpha\beta)(F\alpha\beta)W.$

OBSERVACIÓN 1. A partir de ahora 'F_2', 'F_3', ..., se usan sólo como abreviaciones, y se presentan, prácticamente, siempre seguidos por el número adecuado de argumentos. Cuando se presentan así trataremos la definición 1 como si se hubiera hecho en la siguiente forma:

$$F_{m+1}\,X_1 \ldots X_m YZ \equiv F_m X_1 \ldots X_m\,(FYZ),$$

siendo $m \geq 0$ y $X_1, \ldots, X_m$, Y, Z obs cualesquiera.

B. EL TEOREMA DE CONSTRUCCION DEL SUJETO

En esta sección comenzamos el estudio formal de la teoría básica definida en § A. Suponemos a partir de este momento que están satisfechas las restricciones de la teoría básica.

Nuestro primer tema es un teorema que exhibe una relación entre la estructura del sujeto de una proposición derivada por una deducción-F y la estructura de esta deducción misma. Esto da una especie de criterio de decidibilidad para esas deducciones. Demostraremos primero el teorema y luego discutiremos algunos ejemplos que muestran cómo pueden descubrirse deducciones con su ayuda. Los ejemplos serán sencillos porque otras técnicas posteriores serán más potentes. Al final de esta sección difiniremos la estratificación y daremos ejemplos para su examen; el teorema de estratificación, que nos ocupará en § D, exige

los teoremas de § C; pero el examen de si vale la estratificación es aplicación directa del teorema que ahora vamos a demostrar.

1. Formulación y demostración del teorema.

Siguiendo las convenciones de § 8E5 y § A4, el teorema se formula del modo siguiente:

Teorema 1. *Sea* $\mathfrak{B}$ *la base*

$$\vdash \alpha_j a_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, p. \tag{1}$$

Sean X, η, *tales que hay una deducción-F de* $\mathfrak{B}$ *a*

$$\vdash \eta X. \tag{2}$$

Entonces hay unos $X_1, \ldots, X_q, \eta_1, \ldots \eta_q$ *tales que*

(i) *Las proposiciones* $\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_q$, *siendo* $\mathfrak{T}_k$

$$\vdash \eta_k X_k, \tag{3}$$

constituyen una deducción-F normal [3] $\mathfrak{D}$ *de* (2) *a partir de* (1).

(ii) *Los obs* $X_1, \ldots, X_q$ *constituyen una construcción normal de* X *a partir de* $a_1 \ldots, a_p$ *por aplicación.*

(iii) *Si* X_k *no es uno de los* a_j *y*

$$X_k \equiv X_i X_j, \tag{4}$$

entonces

$$\eta_i \equiv \mathsf{F}\eta_j\eta_k. \tag{5}$$

(iv) *Si* a *es primitiva y* X_k [4] $\equiv a$, *entonces* $\mathfrak{T}_k$ *es una proposición de* $\mathfrak{B}$ *para la cual* $a_j \equiv a$.

(v) *Si* a *es una primitiva y no se presenta en* X, *entonces ninguna de las proposiciones* (1) *para las cuales* $a_j \equiv a$ *se utiliza en* $\mathfrak{D}$.

Demostración. Si existe una deducción de (2) a partir de (1), existe también una deducción normal (§ 2B3). Sea $\mathfrak{D}$ esa deducción, y supongamos que consta de las proposiciones $\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_q$. Cada $\mathfrak{T}_k$ es de la for-

---

[3] Para la definición de 'normal' cfr. § 2B1.

[4] Puede, sin duda, haber más de una proposición así. Sobre la exigencia de que a sea primitivo cfr. el último párrafo de este artículo.

ma (3), pues toda proposición que aparezca como premisa o como conclusión en una inferencia-F es de esa forma. Con esto queda demostrado (I).

A continuación mostramos por inducción deductiva que todo $\mathfrak{T}_k$ de $\mathfrak{D}$ tiene la propiedad siguiente: si $\mathfrak{T}_{i_1}, \mathfrak{T}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{T}_{i_r}$ constituyen la parte $\mathfrak{D}_k$ de $\mathfrak{D}$ que termina en $\mathfrak{T}_k$, entonces $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_r}$ constituyen una construcción normal de X_k a partir de $a_1, \ldots, a_p$. Esto es verdadero si $\mathfrak{T}_k$ está en $\mathfrak{B}$, porque entonces $X_k \equiv a_j$ para algún j. Si $\mathfrak{T}_k$ se ha obtenido en $\mathfrak{D}$ por una inferencia-F, sean $\mathfrak{T}_i$ y $\mathfrak{T}_j$ las premisas mayor y menor, respectivamente, de esa inferencia. Por mera inspección de la regla F vemos que (4) y (5) tienen que valer los dos. Se sigue, entonces, de (4) que si $\mathfrak{T}_i$ y $\mathfrak{T}_j$ tienen la propiedad dicha $\mathfrak{T}_k$ la tendrá también. Esto completa la inducción deductiva. Para $k = q$ tenemos, pues, demostrado (II).

Supongamos ahora que vale (4) y que X_k no es un a_j. Entonces $\mathfrak{T}_k$ no está en $\mathfrak{B}$. Por tanto, $\mathfrak{T}_k$ se obtiene por una inferencia-F cuyas premisas tienen que ser $\mathfrak{T}_i$ y $\mathfrak{T}_j$. Entonces, como antes, vale (5). Con esto queda demostrado (III). Por otro lado, si $X_k \equiv a$, siendo a una primitiva, $\mathfrak{T}_k$ tiene que estar en $\mathfrak{B}$, lo que demuestra (IV).

Se sigue de (I) y (II) que X_k es una combinación de los a_j que son sujetos de las premisas $\mathfrak{D}$ de, y que todo a_j se presenta, efectivamente, en X. Con esto queda demostrado (V).

En el caso de que a_j sean todas primitivas, este teorema muestra que la estructura de una deducción-F está esencialmente determinada por la estructura del sujeto de la conclusión. Pues en ese caso la construcción normal de X es única, y el teorema muestra que la deducción-F se obtiene poniendo η_k que satisfagan (4) y (5) antes del X_k en la construcción. Tenemos, además, una propiedad de decidibilidad. Pues si se ignoran los α_j, esos η_k pueden siempre determinarse; los que corresponden al X_k en posición de argumento son parámetros arbitrarios; los demás son funciones-F del mismo. Si es posible determinar los parámetros de tal modo que las η de las premisas sean adecuadas al α_j determinado, entonces será posible una deducción; no lo será en otro caso. A continuación daremos ejemplos de esta técnica.

Estas conclusiones pueden generalizarse para el caso de que los a_j no sean primitivos, siempre que la construcción normal de X sea única. En este caso podremos decir, como modo de hablar, que los a_j son *cuasi-primitivos*. Tal será el caso si los a_j satisfacen las condiciones de independencia de § 2E7.

2. Deducciones a partir de (FK) y (FS)

Como ejemplos para ilustrar esa técnica vamos a derivar los caracteres funcionales de I, S(KI) y B a partir de los de S y K. Procederemos en base al supuesto de que el carácter funcional es desconocido y tiene que determinarse mediante un análisis basado en el teorema 1. Para ulteriores referencias formulamos los resultados en los tres corolarios siguientes:

Corolario 1.1. *Condición necesaria y suficiente de que*

$$\vdash F\xi\eta I$$

pueda obtenerse mediante una deducción-F basada en instancias de (FK) *y* (FS) *es que* $\xi \equiv \eta$.

Demostración. La construcción de $I \equiv SKK$ puede presentarse así

$$\begin{array}{llll} 1. & S & 2. & K \\ \hline & 3. & SK & 4. \quad K \\ \hline & & 5. & SKK \end{array}$$

Las condiciones de (iii) son

$$\eta_3 \equiv F\eta_4\,\eta_5,$$
$$\eta_1 \equiv F\eta_2\,\eta_3 \equiv F\eta_2\,(F\eta_4\,\eta_5).$$

Como η_1 procede de un caso de (FS), tenemos, para adecuados α, β, γ,

$$\eta_1 \equiv F\,(F\alpha\,(F\beta\gamma))\,(F(F\alpha\beta)\,(F\alpha\gamma)).$$

De aquí, por comparación con lo anterior,

$$\eta_2 \equiv F\alpha\,(F\beta\gamma),$$
$$\eta_4 \equiv F\alpha\beta,$$
$$\eta_5 \equiv F\alpha\gamma.$$

Por otro lado, como η_2 tiene que proceder de (FK), tenemos necesariamente $\alpha \equiv \gamma$, y, por tanto,

$$\eta_5 \equiv F\xi\eta \equiv F\alpha\alpha.$$

Esto muestra que la condición es necesaria. Para mostrar que es suficiente continuamos el análisis. Como también η_4 procede de (FK), tenemos que tener $\beta \equiv F\delta\alpha$. Esto nos da:

$$\eta_1 \equiv F\,(F\alpha\,(F(F\delta\alpha)\alpha))\,(F(F\alpha(F\delta\alpha))\,(F\alpha\alpha)),$$
$$\eta_2 \equiv F\alpha\,(F(F\delta\alpha)\alpha),$$
$$\eta_3 \equiv F(F\alpha(F\delta\alpha))\,(F\alpha\alpha),$$
$$\eta_4 \equiv F\alpha(F\delta\alpha),$$
$$\eta_5 \equiv F\alpha\alpha.$$

Con esas η tenemos una deducción-F válida.

COROLARIO 1.2 *Condición necesaria y suficiente de que*

$$\vdash F\xi\eta\,(S(KI))$$

sea obtenible por una deducción-F a partir de instancias de (FK) *y* (FS) *es que existan un* α *y un* β *tales que*

$$\xi \equiv \eta \equiv F\alpha\beta.$$

Demostración. La construcción de S(KI) a partir de S, K e I es:

$$\begin{array}{lll} & \underline{2.\quad K \qquad 3.\quad I} & \\ 1.\quad S & 4.\quad KI & \\ \underline{\qquad\qquad} & & \\ 5.\quad S(KI) & & \end{array}$$

Las condiciones de cumplimiento de (III) son

$$\eta_1 \equiv F\eta_4\,\eta_5,$$
$$\eta_2 \equiv F\eta_3\,\eta_4.$$

Como η_1 procede de (FS), tenemos, para algunos α, β, γ,

$$\eta_1 \equiv F(F\alpha(F\beta\gamma))\,(F(F\alpha\beta)\,(F\alpha\gamma)),$$
$$\eta_4 \equiv F\alpha\,(F\beta\gamma),$$
$$\eta_5 \equiv F(F\alpha\beta)\,(F\alpha\gamma).$$

Como η_2 procede de (FK), tenemos

$$\eta_2 \equiv F\eta_3\,(F\delta\eta_3).$$

Por otro lado, por el corolario 1.1,

$$\eta_3 \equiv F\lambda\lambda.$$

De aquí inferimos

$$\eta_2 \equiv F(F\lambda\lambda)\,(F\delta(F\lambda\lambda)),$$
$$\eta_4 \equiv F\delta(F\lambda\lambda) = F\alpha(F\beta\gamma).$$

Por tanto, $\delta \equiv \alpha, \lambda \equiv \beta \equiv \gamma,$

$$\eta_5 \equiv F(F\alpha\beta)\,(F\alpha\beta).$$

Esto demuestra la necesidad. La suficiencia se sigue de ello, puesto que obtenemos una deducción válida tomando

$$\eta_1 \equiv F(F\alpha(F\beta\beta))\,(F(F\alpha\beta)\,(F\alpha\beta)),$$
$$\eta_2 \equiv F(F\beta\beta)\,(F\alpha(F\beta\beta)),$$
$$\eta_3 \equiv F\beta\beta,$$
$$\eta_4 \equiv F\alpha(F\beta\beta),$$
$$\eta_5 \equiv F(F\alpha\beta)\,(F\alpha\beta).$$

COROLARIO 1.3. *La conclusión más general con sujeto* B *que puede obtenerse mediante una deducción-F basada en instancias de* (FK) *y* (FS) *es de la forma*

$$\vdash F(F\beta\gamma)\,(F(F\alpha\beta)\,(F\alpha\gamma))B.$$

Demostración. La construcción de $B \equiv S(SK)K$ es

$$\begin{array}{lllll} & 2.\ K & 3.\ S & & \\ \hline 1.\ S & 4.\ KS & & & \\ \hline & 5.\ S(KS) & & 6.\ K & \\ \hline & & 7.\ B & & \end{array}$$

Las condiciones de (III) son

$$\eta_5 \equiv F\eta_6\,\eta_7,$$
$$\eta_1 \equiv F\eta_4\,\eta_5 \equiv F_2\eta_4\eta_6\eta_7,^{5}$$
$$\eta_2 \equiv F\eta_3\,\eta_4.$$

[5] Sobre el uso de '=' aquí cfr. observación 1 de § A5.

Como η_1 procede de (FS), tenemos, para ρ, σ, τ adecuados,

$$\eta_4 \equiv F_2\rho\sigma\tau,$$
$$\eta_6 \equiv F\rho\sigma,$$
$$\eta_7 \equiv F\rho\tau.$$

Como η_2 procede de (FK), tenemos

$$\eta_2 \equiv F\eta_3\,(F\delta\eta_3),$$
$$\eta_4 \equiv F\delta\eta_3.$$

Por tanto, $\delta \equiv \rho$, $\eta_3 \equiv F\sigma\tau$.

Como η_6 procede de (FK), tenemos

$$\eta_6 \equiv F\rho\,(F\lambda\rho),$$
$$\sigma \equiv F\lambda\rho,$$
$$\eta_3 \equiv F\sigma\tau \equiv F(F\lambda\rho)\tau.$$

Como η_3 procede de (FS),

$$\eta_3 \equiv F(F\alpha\,(F\beta\gamma))\,(F(F\alpha\beta)\,(F\alpha\gamma)).$$

Comparando con anteriores fórmulas de η_3, tenemos

$$\lambda \equiv \alpha,\ \rho \equiv F\beta\gamma,$$
$$\tau \equiv F(F\alpha\beta)\,(F\alpha\gamma).$$

Y, finalmente,

$$\rho \equiv F\beta\gamma,$$
$$\sigma \equiv F\alpha\rho \equiv F\alpha(F\beta\gamma),$$
$$\tau \equiv F(F\alpha\beta)\,(F\alpha\gamma),$$
$$\eta_1 \equiv F_2\,(F_2\rho\sigma\tau)\,(F\rho\sigma)\,(F\rho\tau),$$
$$\eta_2 \equiv F(F\sigma\tau)\,(F_2\rho\sigma\tau),$$
$$\eta_3 \equiv F\sigma\tau \equiv F(F\alpha(\beta\gamma))\,(F(F\alpha\beta)\,(F\alpha\gamma)),$$
$$\eta_4 \equiv F_2\rho\sigma\tau,$$
$$\eta_5 \equiv F(F\rho\sigma)\,(F\rho\tau),$$
$$\eta_6 \equiv F\rho\sigma \equiv F(F\beta\gamma)\,(F\alpha(F\beta\gamma)),$$
$$\eta_7 \equiv F\rho\tau \equiv F(F\beta\gamma)\,(F(F\alpha\beta)\,(F\alpha\gamma)).$$

Esas fórmulas constituyen una deducción válida.

3. Otros ejemplos

La técnica que acabamos de ilustrar en § 2 no se limita a la deducción de consecuencias de (FS) y (FK); puede aplicarse también para examinar la deducibilidad-F a partir de cualquier conjunto de premisas. Por ejemplo, el lector puede encontrar instructivo el mostrar que el carácter funcional más general de BCC que es deducible-F a partir de (FB) y (FC) es de la forma $F(F_2\alpha\beta\gamma)$-$(F_2\alpha\beta\gamma)$. Pero no vamos a considerar aquí más ejemplos de este tipo, pues los teoremas demostrados más adelante simplifican grandemente el proceso.

No obstante, vale la pena considerar un caso en el cual es imposible la deducción de un carácter funcional. Tomamos el caso $X \equiv \mathsf{WI}$. Si tomamos W e I como cuasi-primitivas cuyos caracteres funcionales vienen dados por (FW) y (FI), respectivamente, entonces la construcción de X es

$$\frac{\begin{array}{cc} 1. \ \mathsf{W} & 2. \ \mathsf{I} \end{array}}{3. \ \mathsf{WI}}$$

Las condiciones de (III) son, simplemente,

$$\eta_1 \equiv \mathsf{F}\eta_2\eta_3.$$

Como η_1 procede de (FW), tenemos

$$\eta_2 \equiv \mathsf{F}\alpha\,(\mathsf{F}\alpha\beta).$$

Pero como η_2 tiene que venir de (FI), tendríamos necesariamente

$$\alpha \equiv \mathsf{F}\alpha\beta.$$

Esto es imposible, puesto que exige que un ob sea *idéntico* a una parte propia de sí mismo [6]. Si tomamos S e I como primitivas, y $X \equiv \mathsf{SII}$, tenemos la construcción.

$$\cfrac{\cfrac{\begin{array}{cc} 1. \ \mathsf{S} & 2. \ \mathsf{I} \end{array}}{3. \ \mathsf{SI}} \qquad 4. \ \mathsf{I}}{5. \ \mathsf{SII}}$$

[6] Obsérvese que puede construirse fácilmente un ob α tal que $\alpha = \mathsf{F}\alpha\beta$; basta con tomar $\alpha = \mathsf{Y}(\mathsf{CF}\beta)$, definida Y como en § 5G. Este es, precisamente, el tipo de construcción que muestra la inconsistencia de $\mathscr{F}_1'$ (W) en § 10A3. Pero un tal α no es un ob-F de la teoría básica.

y las condiciones de (III) son

$$\eta_3 \equiv F\eta_4\eta_5,$$
$$\eta_1 \equiv F\eta_2\eta_3 \equiv F_2\eta_2\eta_4\eta_5.$$

Como η_1 procede de (FS), tenemos

$$\eta_2 \equiv F_2\alpha\beta\gamma \equiv F\alpha\,(F\beta\gamma),$$
$$\eta_4 \equiv F\alpha\beta.$$

Como η_2 procede de (FI), tenemos $\alpha \equiv F\beta\gamma$; como η_4 también procede de (FI), $\alpha \equiv \beta$. Estas dos condiciones exigen $\beta \equiv F\beta\gamma$, lo cual es imposible.

Esta argumentación muestra que el ob WI no tiene un carácter funcional en $\mathscr{F}_1{}^b$ (W, I); y el ob SII, que es igual a él, no tiene carácter funcional en $\mathscr{F}_1{}^b$ (S, I) y, por tanto, por el corolario 1.1, tampoco en $\mathscr{F}_1{}^b$ (S, K). Los últimos teoremas de este capítulo mostrarán que no es posible convertir a WI en una forma que tenga carácter funcional en términos de esquemas axiomáticos admisibles. La posesión de un carácter funcional es en la teoría básica una propiedad que caracteriza a algunos combinadores y a otros no; por virtud de la regla Eq′ esta propiedad es invariante respecto de la conversión.

4. Estratificación

Hemos visto que la posesión de carácter funcional es una cuestión que puede, en principio, decidirse mediante el teorema 1, una vez dados el sujeto y la base. Ahora deseamos extender este concepto a combinaciones de obs y variables. Si podemos asignar caracteres funcionales a las variables de tal modo que la combinación tenga un carácter funcional diremos que la combinación es estratificada [7] en términos de esa asignación. La definición exacta es:

Definición 1. Sea $\mathfrak{B}$ la base (1), y sean $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta$ F-obs. Sea $\mathfrak{X}$ una combinación de $a_1, \ldots, a_p$ y las variables $x_1, \ldots, x_m$. Entonces diremos que $\mathfrak{X}$ es *estratificada respecto de* $\mathfrak{B}$ *en términos de* $\xi_1, \ldots, \xi m, \eta$ si —y sólo si— la proposición

(6) $$\vdash \eta\,\mathfrak{X}$$

es la conclusión de una deducción-F sobre la base formada añadiendo

---

[7] Este término está sugerido por analogía con una noción a la que Quine [NFM] ha dado ese nombre. La analogía se discute en § S1.

a $\mathfrak{B}$ las proposiciones

$$\vdash \xi\, x_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{7}$$

Si —y sólo si— $\mathfrak{B}$ es vacía (es decir, si $p = 0$), diremos que $\mathfrak{X}$ es *absolutamente estratificada* en los mismos términos.

Asociaremos a esta definición formal algunas frases elípticas o condensadas cuyas significaciones resultarán, en general, claramente del contexto. Así, cuando decimos que $\mathfrak{X}$ es estratificada sobre l base (1) queremos decir que está estratificada sobre esa base en términos de $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta$ (que pueden quedar implícitos en el contexto); análogamente, cuando decimos sin más que $\mathfrak{X}$ es estratificada, queremos decir que lo es respecto de cierta base que puede presumirse vacía a menos que se indique explícitamente lo contrario. Por último, podemos ampliar la noción de estratificación de combinaciones $\mathfrak{X}$ a los obs combinatorios X tales que

$$Xx_1 \ldots x_m \geq \mathfrak{X}. \tag{8}$$

Es evidente que las condiciones de la estratificación constituyen una especialización de las hipótesis del teorema 1. El hecho de que las x_i sean variables no tiene ninguna consecuencia, pues respecto de una ampliación adecuada de nuestra teoría las x_i son constantes, y las premisas (7) puede subsumirse bajo las premisas (1) (definiendo $\alpha_{p+i} \equiv \xi_i$, $a_{p+i} \equiv x_i$). La especialización importante en la noción de estratificación es que los x_i se entienden como variables distintas [8], y se entiende que el mismo ξ_i se usa para todas las instancias de x_i en $\mathfrak{X}$. No se ha impuesto esa restricción a los a_j del teorema 1.

En la aplicación del teorema 1 (y de otros teoremas relacionados con él que se considerarán más tarde) a casos en los que se presentan variables usaremos frecuentemente '$\mathfrak{X}_k$' en lugar de 'X_k'; y nos referiremos a fórmulas de la demostración suponiendo que se hacen en ellas los cambios correspondientes. Por ejemplo, (6) es un caso especial de (2); por tanto, no haremos referencia especial a (6), sino simplemente a (2), entendiéndose que se trata de (6) si ello se sigue del contexto.

Vamos a considerar ahora algunos ejemplos de la técnica de examen de la estratificación. Estos ejemplos difieren de los de § 2 en que no se exige previamente que los ξ, se conformen a determinados esquemas axiomáticos, sino que son arbitrarios; por otro lado, tienen que ser los

---

[8] Esto se supone siempre que hablamos de «las variables $x_1, \ldots, x_m$».

mismos para todos los casos de una misma variable. Se usa el siguiente procedimiento. Después de observar las condiciones de (III) y (IV), y las identidades que estas condiciones implican entre los η y los ξ, se asignan símbolos 'α', 'β', 'γ', etc., a los parámetros libres (es decir, a los η sin restringir) y se determina, si es posible, los ξ_i a base de los mismos. Si la determinación no es posible, la combinación es, naturalmente, no estratificada. El procedimiento es una sistematización del utilizado en § 8C para motivar los esquemas axiomáticos (FS) y (FK); el primer ejemplo es, precisamente, la determinación del carácter funcional de S desde el presente punto de vista, que es más sistemático

EJEMPLO 1. $\mathfrak{X} \equiv x_1x_3(x_2x_3)$.

Construcción:

$$\dfrac{\dfrac{1.\ x_1 \qquad 2.\ x_3}{3.\ x_1x_3} \qquad \dfrac{4.\ x_2 \qquad 5.\ x_3}{6.\ x_2x_3}}{7.\ x_1x_3\ (x_2x_3)}$$

Condiciones de (III):

$$\eta_3 \equiv \mathsf{F}\eta_6\eta_7,$$
$$\eta_4 \equiv \mathsf{F}\eta_5\eta_6,$$
$$\eta_1 \equiv \mathsf{F}\eta_2\eta_3 \equiv \mathsf{F}\eta_2\,(\mathsf{F}\eta_6\eta_7).$$

Condiciones de (IV):

$$\xi_1 \equiv \eta_1\ (\equiv \mathsf{F}\eta_2\,(\mathsf{F}\eta_6\eta_7)),$$
$$\xi_2 \equiv \eta_4\ (\equiv \mathsf{F}\eta_5\eta_6),$$
$$\xi_3 \equiv \eta_2 \equiv \eta_5.$$

Parámetros libres: $\eta_2 \equiv \eta_5 \equiv \xi_3 \equiv \alpha$, $\eta_6 \equiv \beta$, $\eta_7 \equiv \gamma$.

Condiciones de estratificación:

$$\xi_1 \equiv \mathsf{F}\alpha\,(\mathsf{F}\beta\gamma), \qquad \xi_2 \equiv \mathsf{F}\alpha\beta,$$
$$\xi_3 \equiv \alpha, \qquad \eta \equiv \gamma.$$

EJEMPLO 2. $\mathfrak{X} \equiv x_1(x_2x_4)\ (x_2(x_5x_4))$.

Construcción:

$$\dfrac{\dfrac{1.\ x_1 \qquad \dfrac{2.\ x_2 \qquad 3.\ x_4}{4.\ x_2x_4}}{5.\ x_1\,(x_2x_4)} \qquad \dfrac{6.\ x_2 \qquad \dfrac{7.\ x_5 \qquad 8.\ x_4}{9.\ x_5x_4}}{10.\ x_2\,(x_5x_4)}}{11.\ x_1\,(x_2x_4)\ (x_2\,(x_5x_4))}$$

Condiciones de (III):

$$\eta_5 \equiv F\eta_{10}\eta_{11},$$
$$\eta_6 \equiv F\eta_9\,\eta_{10},$$
$$\eta_7 \equiv F\eta_8\,\eta_9,$$
$$\eta_1 \equiv F\eta_4\,\eta_5 \equiv F\eta_4\,(F\eta_{10}\eta_{11}),$$
$$\eta_2 \equiv F\eta_3\,\eta_4.$$

Condiciones de (IV):

$$\xi_1 \equiv \eta_1 \equiv F\eta_4\,(F\eta_{10}\eta_{11}),$$
$$\xi_2 \equiv \eta_2 \equiv \eta_6 \text{ (cfr. supra)}.$$
$$\xi_3 \quad \text{sin restringir},$$
$$\xi_4 \equiv \eta_3 \equiv \eta_8,$$
$$\xi_5 \equiv \eta_7,$$

Las condiciones de ξ_2, ξ_4 implican, pues,

$$\eta_3 \equiv \eta_8 \equiv \eta_9,$$
$$\eta_4 \equiv \eta_{10}.$$

Parámetros libres: $\eta_9 \equiv \alpha$, $\eta_{10} \equiv \beta$, $\eta_{11} \equiv \gamma$, $\xi_3 \equiv \lambda$.
Condiciones de estratificación:

$$\xi_1 \equiv F\beta\,(F\beta\gamma), \qquad \xi_2 \equiv F\alpha\beta,\ \xi_3 \equiv \lambda,$$
$$\xi_4 \equiv \alpha, \qquad \xi_5 \equiv F\beta\gamma,\ \eta \equiv \gamma.$$

EJEMPLO 3. $\mathfrak{X} \equiv x_3\,(Kx_2)x_1$.
construcción:

$$\dfrac{\dfrac{1.\ x_3 \qquad \dfrac{2.\ K \qquad 3.\ x_2}{4.\ Kx_2}}{5.\ x_3\,(Kx_2)} \qquad 6.\ x_1}{7.\ x_3\,(Kx_2)x_1}$$

Condiciones de (III):

$$\eta_5 \equiv F\eta_6\eta_7,$$
$$\eta_1 \equiv F\eta_4\eta_5 \equiv F\eta_4\,(F\eta_6\eta_7),$$
$$\eta_2 \equiv F\eta_3\eta_4.$$

Condiciones de (IV):

$$\xi_1 \equiv \eta_6,$$
$$\xi_2 \equiv \eta_3,$$
$$\xi_3 \equiv \eta_1 \equiv F\eta_4(F\eta_6\,\eta_7).$$

Tenemos, pues, que η_2 tiene que ser un predicado asignado a K en $\mathfrak{B}$. Supongamos un $\mathfrak{B}$ tal que

$$\eta_2 \equiv F\alpha\,(F\beta\alpha).$$

Entonces, por las condiciones previas, tenemos

$$\xi_2 \equiv \eta_3 \equiv \alpha,$$
$$\eta_4 \equiv F\beta\alpha.$$

Parámetros libres: $\alpha,\beta,\eta_6 \equiv \gamma$, $\eta_7 \equiv \delta$.

Condiciones de estratificación:

$$\xi_1 \equiv \gamma, \qquad \xi_2 \equiv \alpha,$$
$$\xi_2 \equiv F(F\beta\alpha)\,(F\gamma\delta), \qquad \eta \equiv \delta.$$

OBSERVACIÓN. Hemos supuesto un $\mathfrak{B}$ tal que el predicado asignado a K era una instancia de uno asignado por el esquema (FK). La estratificación relativa no nos interesa en la práctica más que cuando han sido previamente establecidas las proposiciones de la base de $\mathfrak{B}$. De todos modos, esto no es parte de la definición.

EJEMPLO 4. $\mathfrak{X} \equiv x_1\,(x_2x_1)$.
Construcción:

$$\frac{1.\ x_1 \qquad \dfrac{2.\ x_2 \qquad 3.\ x_1}{4.\ x_2\,x_1}}{5.\ x_1\,(x_2x_1)}$$

Condiciones de (III):

$$\eta_1 \equiv F\eta_4\eta_5,$$
$$\eta_2 \equiv F\eta_3\eta_4.$$

Condiciones de (IV):

$$\xi_1 \equiv \eta_1 \equiv \eta_3 \equiv F\eta_4\eta_5,$$
$$\xi_2 \equiv \eta_2 \equiv F\eta_3\eta_4 \equiv F(F\eta_4\eta_5)\eta_4.$$

Parámetros libres: $\eta_4 \equiv \alpha$, $\eta_5 \equiv \beta$.

Condiciones de estratificación:

$$\xi_1 \equiv F\alpha\beta,\ \xi_2 \equiv F(F\alpha\beta)\alpha,\ \eta \equiv \beta.$$

EJEMPLO 5. $\mathfrak{X} \equiv x_1(x_2x_2)$.

Construcción:

$$\dfrac{\dfrac{1.\ x_1 \qquad \dfrac{2.\ x_2 \qquad 3.\ x_2}{4.\ x_2x_2}}{5.\ x_1\,(x_2x_2)}}$$

Condiciones de (III):

$$\eta_1 \equiv \mathsf{F}\eta_4\eta_5,$$
$$\eta_2 \equiv \mathsf{F}\eta_3\eta_4.$$

Condiciones de (IV):

$$\eta_2 \equiv \eta_3 \equiv \mathsf{F}\eta_3\eta_4.$$

Esta condición no puede cumplirse, porque exigiría que η_3 fuera idéntico a una parte propia de sí mismo. Por tanto, en este caso $\mathfrak{X}$ no es estratificado.

Este ejemplo está relacionado con la discusión de § 3. En realidad, la misma argumentación mostraría que x_1x_1 no es estratificado, y ésta es la combinación representada por WI.

C. LOS TEOREMAS DE LA CONVERSION DE SUJETO

Vamos a estudiar en esta sección el efecto de la conversión del sujeto. Tales conversiones son admisibles en virtud de la regla Eq′. Pero en §1 mostraremos que una aplicación de la regla Eq′ puede posponerse hasta el final de una demostración y, consiguientemente, todo ob para el que pueda deducirse un carácter funcional en la teoría básica es convertible con un ob para el cual puede deducirse un carácter funcional por medio de una deducción-F. El papel de la regla Eq′ es, pues, relativamente trivial, y para todos los efectos prácticos la teoría básica es el estudio de las deducciones-F.

En el resto de la sección atendemos a ciertos casos importantes en los cuales las conversiones del sujeto llevan de deducciones-F a otras deducciones-F. Vamos a estudiar dos teoremas principales, llamados, respectivamente, de la reducción de sujeto y de la expansión de sujeto. En cada uno de ellos partimos de una deducción-F y aplicamos una reducción o expansión de sujeto a la conclusión; la tesis consiste en mostrar que la conclusión así modificada puede conseguirse también mediante

una deducción-F. Cada teorema es verdadero sólo bajo ciertas limitaciones que se precisarán adecuadamente. Estos teoremas son fundamentales para la mayor parte de lo que sigue luego; el teorema de la estratificación es casi una consecuencia inmediata del teorema de la expansión de sujeto, y del teorema de reducción del sujeto pueden derivarse varias condiciones necesarias.

1. El papel de la regla Eq'

El teorema indicado en la introducción es el siguiente:

Teorema 1. *Supongamos que la proposición* $\mathfrak{T}$ *es deducible a partir de la base* $\mathfrak{B}$ *mediante las reglas* F *y* Eq'. *Entonces existe una proposición* $\mathfrak{T}'$ *tal que* $\mathfrak{T}'$ *es deducible a partir de* $\mathfrak{B}$ *mediante una deducción-F, y* $\mathfrak{T}$ *puede obtenerse de* $\mathfrak{T}'$ *mediante una sola aplicación de la regla* Eq'.

Demostración. Como en el teorema B1, sea $\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_n$ una deducción de $\mathfrak{T}$, siendo $\mathfrak{T}_k$

$$\vdash \eta_k X_k \qquad\qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Mostraremos por inducción sobre k que para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, existe un X_k' tal que $X_k' = X_k$, y $\mathfrak{T}_k'$, o sea,

$$\vdash \eta_k X_k',$$

es deducible de las premisas mediante la regla F sola.

Si $\mathfrak{T}_k$ es una de la premisas, la afirmación es verdadera para $X_k' \equiv X_k$.

Si $\mathfrak{T}_k$ se sigue por una inferencia-F de $\mathfrak{T}_i$ y $\mathfrak{T}_j$, entonces la inferencia tiene que ser

$$\mathsf{F}\eta_j \eta_k X_i, \quad \eta_j X_j \quad \vdash \quad \eta_k (X_i X_j).$$

Por la hipótesis inductiva han quedado determinadas X_i' y X_j'; y la inferencia sigue siendo válida si sustituimos X_i y X_j, respectivamente, por X_i' y X_j'. Por tanto, las condiciones quedarán satisfechas si tomamos $X_k' \equiv X_i' X_j'$.

Supongamos, por último, que $\mathfrak{T}_k$ se sigue de $\mathfrak{T}_i$ por la regla Eq'. Entonces por la hipótesis inductiva, X_i' ha quedado definida. Tomamos entonces $X_k' \equiv X_i'$.

La demostración dada puede especializarse para dar una del siguiente corolario, en el que se presupone que X_k es el sujeto de $\mathfrak{T}_k$.

Corolario 1. 1. *Si la demostración de* $\mathfrak{T}$ *contiene una sola aplica-*

ción de la regla Eq', *por ejemplo, al derivar* $\mathfrak{T}_k$ *de* $\mathfrak{T}_i$, *entonces la demostración de* $\mathfrak{T}'$ *puede obtenerse subrogando las instancias correspondientes de* X_k *por* X_i.

2. El teorema de reducción del sujeto para $\mathscr{F}_1$ (S, K).

Teorema 2. *Sea* $\mathfrak{B}$ *una base*

$$\vdash \alpha_j a_j \tag{1}$$

tal que todos los a_j *son atómicos, y tal que siempre que* a_j *es* K *o* S *y* α_j *es compuesto-F, la proposición correspondiente* (1) *es un caso de* (FK) *o* (FS), *respectivamente. Sea* $\mathfrak{D}$ *una deducción-F de* $\mathfrak{B}$ *a*

$$\vdash \eta X, \tag{2}$$

y sea

$$X \geq X', \tag{3}$$

la reducción que consta de subrogaciones por las reglas (K) *y* (S). *Entonces existe una deducción-F* $\mathfrak{D}'$ *a partir de* $\mathfrak{B}$ *a*

$$\vdash \eta X'. \tag{4}$$

Demostración. Por hipótesis pasamos de X a X' por una serie de pasos cada uno de los cuales es la subrogación de un ob que constituye la parte izquierda de una instancia de la regla (K) o de la regla (S) por la correspondiente parte derecha. Bastará con demostrar el teorema para el caso en el cual no hay más que un paso de esa naturaleza. El caso general se seguirá entonces por inducción natural.

Sea $\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_q, \eta_1, \ldots, \eta_q, X_1, \ldots, X_q$ como en el teorema B1. Sea X_k el componente subrogado en la reducción, y sea X_k' el puesto en su lugar por la subrogación. Por una argumentación análoga a la del corolario 1.1 bastará con mostrar que hay una deducción-F $\mathfrak{D}_k'$ de $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{T}_k'$ siendo $T_k' \equiv \eta_k X_k'$. Sea, en efecto, $\mathfrak{D}_k$ la parte de $\mathfrak{D}$ que termina en $\mathfrak{T}_k$. Supongamos que $\mathfrak{D}'$ se obtiene de $\mathfrak{D}$ poniendo $\mathfrak{D}_k'$ en lugar de $\mathfrak{D}_k$ y subrogando luego X_k por X_k' en la rama de $\mathfrak{D}$ por debajo de $\mathfrak{T}_k$. La $\mathfrak{D}'$ así obtenida es la $\mathfrak{D}'$ buscada en el teorema.

Para mostrar la deducibilidad de $\mathfrak{T}_k'$ consideraremos los dos casos por separado.

Caso 1. La regla aplicada es (K). Entonces

$$X_k \equiv \mathsf{K}X_iX_j, \qquad X_k' \equiv X_i.$$

Sea

$$X_h \equiv \mathsf{K}, \qquad X_l \equiv \mathsf{K}X_i \equiv X_hX_i,$$

entonces

$$X_k \equiv X_lX_j.$$

Como todos los a_j son primitivos, existen η_h, η_i, η_j, η_k, η_l por el teorema B1 (III); además,

$$\eta_l \equiv \mathsf{F}\eta_j\eta_k,$$
$$\eta_h \equiv \mathsf{F}\eta_i\eta_l \equiv \mathsf{F}\eta_i(\mathsf{F}\eta_j\eta_k).$$

Por otro lado, como η_h es compuesto, $\mathfrak{T}_h$ tiene que ser un caso del esquema axiomático (FK); por tanto, para algunos α, β, tenemos

$$\eta_h \equiv \mathsf{F}\alpha(\mathsf{F}\beta\alpha) \equiv \mathsf{F}\eta_i(\mathsf{F}\eta_j\eta_k). \tag{5}$$

Por tanto, también $\eta_k \equiv \eta_i$ y $\mathfrak{T}_k'$ es lo mismo que $\mathfrak{T}_i$; por tanto, la deducción $\mathfrak{D}_i$ que termina en $\mathfrak{T}_i$ sirve como $\mathfrak{D}_k'$.

Caso 2. La regla aplicada es (S). Entonces

$$X_k \equiv \mathsf{S}X_iX_jX_l, \qquad X_k' \equiv X_iX_l(X_jX_l).$$

Sea

$$X_h \equiv \mathsf{S}, \qquad X_p \equiv \mathsf{S}X_i \equiv X_hX_i,$$
$$X_r \equiv \mathsf{S}X_iX_j \equiv X_pX_j;$$

entonces

$$X_k \equiv X_rX_l.$$

Existen, como antes, η_h, η_i, η_j, η_l, η_p, η_r; y

$$\eta_r \equiv \mathsf{F}\eta_l\eta_k,$$
$$\eta_p \equiv \mathsf{F}\eta_j\eta_r \equiv \mathsf{F}\eta_j(\mathsf{F}\eta_l\eta_k) \equiv \mathsf{F}_2\eta_j\eta_l\eta_k,$$
$$\eta_h \equiv \mathsf{F}\eta_i\eta_p \equiv \mathsf{F}_3\eta_i\eta_j\eta_l\eta_k.$$

Como η_h es compuesto, $\mathfrak{T}_h$, es un caso del esquema axiomático (FS). Por tanto, existen α, β, γ tales que

$$\eta_i \equiv \mathsf{F}\alpha(\mathsf{F}\beta\gamma),$$
$$\eta_j \equiv \mathsf{F}\alpha\beta, \tag{6}$$
$$\eta_l \equiv \alpha, \quad \eta_k \equiv \gamma.$$

Podemos entonces conseguir $\mathfrak{D}_k'$ del modo siguiente:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}_i \\ \vdash \mathsf{F}\alpha(\mathsf{F}\beta\gamma)X_i\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathfrak{D}_l \\ \vdash \alpha X_l\end{matrix}}{\vdash \mathsf{F}\beta\gamma\,(X_iX_l)}\,\mathsf{F} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}_j \\ \vdash \mathsf{F}\alpha\beta X_j\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathfrak{D}_l \\ \vdash \alpha X_l\end{matrix}}{\vdash \beta\,(X_jX_l)}\,\mathsf{F}}{\vdash \gamma\, X_k'}$$

OBSERVACIÓN 1. Si los a_j no son atómicos, puede ocurrir, por ejemplo, que el $\mathsf{K}X_i$ del caso 1 sea uno de los a_j, con lo que η_h no estaría definido. Este, y el lugar análogo del caso 2, son los únicos lugares en los que la atomicidad de los a_j interviene en la demostración. Por eso podemos ahorrarnos la condición de atomicidad adoptando alguna otra hipótesis que garantice que, η_h existe y que es el predicado de un axioma adecuado. Una tal hipótesis puede formularse del modo siguiente. Supongamos que $\mathfrak{D}$ está escrita en forma arborescente. Entonces X se presenta como una combinación de los obs que aparecen como sujetos en las premisas. Llamémoslos *cuasi-primitivos* de X. La hipótesis que necesitamos es entonces: si cualquier instancia de S o K se elimina en una aplicación de una regla (S) o (K), entonces esa instancia es una cuasiprimitiva, y la premisa en que se presenta es una instancia de un esquema axiomático. Más adelante necesitaremos esta hipótesis generalizada; pero no la formulamos formalmente en el teorema por no complicar el tema.

El corolario siguiente es la especialización del teorema 2 a la estratificación definida en § B4. La demostración es inmediata.

COROLARIO 2.1. *Sea* $\mathfrak{B}$ *como en el teorema* 2. *Sea* $\mathfrak{X}$ *una combinación de* $a_1, \ldots, a_p$ *y las variables* $x_1, \ldots, x_m$, *la cual es estratificada respecto de* $\mathfrak{B}$ *en términos de* $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta$. *Sea*

$$\mathfrak{X} \geq \mathfrak{X}'.$$

Entonces $\mathfrak{X}'$ *es también estratificada sobre la misma base y en los mismos términos.*

3. EL TEOREMA DE LA EXPANSIÓN DE SUJETO PARA $\mathscr{F}_1$ (S, K)

Este teorema es, naturalmente, recíproco del teorema 2. Empezaremos su estudio indicando que el tal recíproco tiene importantes limitaciones. Así lo mostrarán los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1. Sea $X \equiv \mathsf{KI(WI)}$, $X' \equiv \mathsf{I}$. Aquí X' tiene el carácter funcional $\mathsf{F}\alpha\alpha$ (Corolario B1.1), mientras que puede mostrarse por los métodos de § B (cfr. § B3) que X no tiene un carácter funcional que pueda obtenerse de (FK) y (FS) por una deducción-F.

EJEMPLO 2. Supongamos que $\mathfrak{B}$ consta de las cuatro proposiciones

$$\vdash \mathsf{F}_2\alpha_1\beta\gamma\, a,$$
$$\vdash \mathsf{F}\alpha_2\beta b,$$
$$\vdash \alpha_1 c,$$
$$\vdash \alpha_2 c,$$

y supongamos que $X \equiv Sabc$, $X' \equiv ac(bc)$. Entonces podemos inferir de $\mathfrak{B} \vdash \gamma X$ mediante una deducción-F, pero por los métodos de § B se sigue que no podemos derivar $\vdash \gamma X$.

Para excluir tales posibilidades imponemos cuatro condiciones (a)-(d) en el teorema abajo formulado. Las condiciones (a) y (b) se impusieron también en el teorema de la reducción de sujeto; (b) es, en realidad, algo más débil que la condición de que los a_j sean primitivos (o cuasi-primitivos en el sentido de la observación 1). La condición (d), que parece especialmente drástica, queda automáticamente satisfecha cuando el Z mencionado es un átomo y sujeto de una proposición única constitutiva de $\mathfrak{B}$.

TEOREMA 3. *Sea $\mathfrak{D}$ una deducción-F a partir de una base $\mathfrak{B}$ y que termina en* (2). *Sea X' tal que*

$$X' \geq X, \tag{7}$$

con la reducción sujeta a las limitaciones siguientes: (a) *la reducción es una reducción-*β *(sin utilizar subrogaciones más que por las reglas* (K) *y* (S) *exclusivamente)*; (b) *los a_j actúan como primitivos en la reducción, es decir, los componentes X, Y, Z de las reglas* (K) *y* (S) *son componentes de la construcción de X' dada a partir de los a_j*; (c) *si un componente Y queda cancelado por una aplicación de la regla* (K), *entonces Y tiene por lo menos un carácter funcional obtenible de $\mathfrak{B}$ por medio de una deducción-F*; (d) *si un componente Z se repite en una aplicación de la regla* (S), *entonces Z no tiene más de un carácter funcional que sea obtenible de $\mathfrak{B}$ mediante una deducción-F. Cumplidas estas condiciones, hay una deducción $\mathfrak{D}'$ a partir de la base $\mathfrak{B}'$ que lleva a* (4), *y $\mathfrak{B}'$ se forma añadiendo a $\mathfrak{B}$ ciertos casos de los esquemas* (FK) *y* (FS).

Demostración. La primera parte de la demostración del teorema 2, hasta la división en casos para la construcción de una demostración

de $\mathfrak{T}_k'$, no hizo uso del hecho de que (3) era una reducción. Consecuentemente, esa parte de la demostración puede tomarse sin cambio alguno más que el de (3) por (7). Si $\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_k, \eta_1 \ldots, \eta_q, X_1, \ldots, X_q, X'_k, \mathfrak{D}_k, \mathfrak{D}_k'$, etc., son como en el teorema 2, basta, por tanto, demostrar que hay una deducción $\mathfrak{D}_k'$ de $\mathfrak{T}_k'$. Con este fin consideraremos los mismos dos casos que antes.

Caso 1. La regla usada es (K). Entonces

$$X_k' \equiv \mathsf{K} X_k Z,$$

siendo Z el componente cancelado. Sea ζ un carácter funcional de Z tal como se ha dicho en la condición (c) del teorema. Añádase a $\mathfrak{B}$ la proposición

$$\mathsf{F}\eta_k\,(\mathsf{F}\zeta\eta_k)\mathsf{K},$$

que es un caso de (FK). De ello podemos derivar $\mathfrak{T}_k'$ mediante dos aplicaciones de la regla F, utilizando como premisas menores $\mathfrak{T}_k$ y $\vdash \zeta Z$. Como las dos son deducibles-F de $\mathfrak{B}$, tenemos la $\mathfrak{D}_k'$ buscada.

Caso 2. La regla usada es (S). Entonces

$$X_k \equiv X_h X_j\,(X_i X_l),$$

con

$$X_j \equiv X_l;$$

mientras que

$$X_k' \equiv \mathsf{S} X_h X_i X_j.$$

Sea

$$X_p \equiv X_h X_j, \qquad X_r \equiv X_i X_l,$$

de tal modo que

$$X_k \equiv X_p X_r.$$

Por la hipótesis (b) existen $\eta_h, \eta_i, \eta_j, \eta_l, \eta_p, \eta_r$; además, por (III) del teorema B1,

$$\eta_p \equiv \mathsf{F}\eta_r\,\eta_k, \quad \eta_i \equiv \mathsf{F}\eta_l\,\eta_r,$$
$$\eta_h \equiv \mathsf{F}\eta_j\,\eta_p \equiv \mathsf{F}_2\eta_j\,\eta_r\,\eta_k.$$

Por la hipótesis (d) tenemos $\eta_l \equiv \eta_j$, y, por tanto,

$$\eta_i \equiv \mathsf{F}\eta_j\,\eta_r.$$

Añádase a $\mathfrak{B}$ la proposición

$$\vdash \mathsf{F}_3\,\eta_h\,\eta_i\,\eta_j\,\eta_k\,\mathsf{S}.$$

Teniendo en cuenta las anteriores identidades, esto es un caso de (FS). A partir de ella, mediante tres aplicaciones de la regla F, con $\mathfrak{T}_h$, $\mathfrak{T}_i$, $\mathfrak{T}_j$ como premisas menores sucesivamente, tenemos $\mathfrak{T}_k'$. Como todas esas premisas menores son deducibles-F a partir de $\mathfrak{B}$, tenemos la $\mathfrak{D}_k'$ buscada.

Esto completa la demostración del teorema 3.

4. Otras elecciones de combinadores primitivos

Por razones de sencillez, los teoremas 2 y 3 se han demostrado para el caso de que los combinadores primitivos sean S y K y los esquemas axiomáticos (FS) y (FK). Pero los teoremas son también válidos para otras elecciones de combinadores primitivos, como B, C, W, K; B, C, I, K; B, C, S, I; etc. El lector puede comprobar que para B, C, I y W pueden desarrollarse casos análogos a los casos 1 y 2. Pero el siguiente teorema general toma en cuenta todos esos casos.

Teorema 4. *Los teoremas de reducción y expansión de sujeto valen para una elección cualquiera de combinadores primitivos, siempre que se cumplan las condiciones siguientes: sea U un combinador primitivo, y sea*

$$Ux_1 \ldots x_m \geq \mathfrak{U} \tag{8}$$

la regla de reducción asociada con él, siendo $\mathfrak{U}$ *una combinación de* $x_1 \ldots, x_m$. *Entonces:* (i) $\mathfrak{U}$ *es absolutamente estratificada;* (ii) *el esquema axiomático asociado a U es*

$$\vdash \mathsf{F}_m \xi_1 \ldots \xi_m \zeta\, U, \tag{9}$$

estando $\xi_1, \ldots, \xi_m, \zeta$ *determinadas como funciones-F de ciertos parámetros de tal modo que formen el conjunto más general en base al cual* $\mathfrak{U}$ *sea absolutamente estratificada;* (iii) *en el teorema 2, si* a_j *es U y si* α_j *es compuesto, entonces* $\vdash \alpha_j a_j$ *es un caso de* (9); (iv) *valen las condiciones* (a)-(d) *del teorema 3,* (c) *respecto de todo componente cancelado, y* (d) *respecto de los componentes repetidos.*

Demostración. Para establecer la existencia de $\mathfrak{D}_k'$ para el teorema 2 procedemos del modo siguiente. Como la regla aplicada es (8), hemos de tener

$$X_k \equiv UX_{i_1} \ldots X_{i_m}, \qquad X_k' \equiv \mathfrak{B},$$

obteniéndose $\mathfrak{B}$ a partir de $\mathfrak{U}$ mediante la sustitución de $x_1, \ldots, x_m$,

respectivamente, por $X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}$. Sea

$$X_{h_j} \equiv UX_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_j} \qquad j = 0, 1, \ldots, m.$$

Entonces

$$X_{h_0} \equiv U, \qquad X_{h_m} \equiv X_k.$$

Por el teorema B1, condición (III), se sigue que

$$\eta_{h_0} \equiv \mathsf{F}_m \eta_{i_1} \quad \eta_{i_2} \ldots \eta_{i_m} \eta_k.$$

Por otro lado, por (III) de este teorema, $\mathfrak{T}_{h_0}$ se obtiene mediante especialización de los parámetros de (9); por tanto, dada una lección adecuada de dichos parámetros,

$$\eta_{i_1} \equiv \xi_1, \ldots, \eta_{i_m} \equiv \xi_m, \ \eta_k \equiv \mathfrak{z}. \tag{10}$$

Por la definición de estratificación hay una deducción-F

$$\xi_1 x_1, \ldots, \xi_m x_m \vdash \mathfrak{z}\, \mathfrak{U}. \tag{11}$$

La especialización de los parámetros da

$$\eta_{i_1} x_1, \ldots, \eta_{i_m} x_m \vdash \eta_k\, \mathfrak{U}. \tag{12}$$

Si sustituimos X_{i_1} por $x_1 \ldots, X_{i_m}$ por x_m tenemos

$$\eta_{i_1} X_{i_1}, \ldots, \eta_{i_m} X_{i_m} \vdash \eta_k\, \mathfrak{B}. \tag{13}$$

Todas las premisas están en $\mathfrak{D}$, y son, por tanto, deducibles-F de $\mathfrak{B}$, mientras que la conclusión es $\mathfrak{T}_k'$.

Hemos mostrado ya para el teorema de la expansión de sujeto que existe una deducción (13). Por hipótesis existe una deducción-F con la misma conclusión que (13), pero que puede diferir de (13) en dos respectos. En primer lugar, como la deducción es una parte de $\mathfrak{D}$, no contiene más que componentes realmente presentes en $\mathfrak{B}$, y si algún x_j no se presenta en $\mathfrak{U}$, entonces X_{i_j} no es necesariamente un sujeto de $\mathfrak{D}$. En este caso X_{i_j} es conocido como componente de X', y por la hipótesis (d) existe un η_{i_j} tal que $\vdash \eta_{i_j} X_{i_j}$, —aunque puede no ser una proposición de $\mathfrak{D}$—, si es deducible-F a partir de $\mathfrak{B}$ y, por tanto, puede añadirse a las premisas sin alterar el hecho de que todas las premisas son deducibles-F de $\mathfrak{B}$. En segundo lugar, si x_j se presenta más de una vez

en $\mathfrak{U}$, entonces los componentes con que se sustituyen sus diversos casos dan origen a diversas ramas de $\mathfrak{D}$ y *pueden* tener, en principio, η diferentes. De todos modos, todos esos componentes son idénticos, puesto que sustituyen al mismo x_j; además, en la práctica tienen el mismo η por la hipótesis (IV).

Tenemos así una deducción (13). En esta deducción los X_{ij} actúan como indeterminadas; es, por tanto, permisible la subrogación de cada X_{ij} por el x_j correspondiente. Así llegamos a la deducción (12). Esto muestra que $\mathfrak{U}$ es estratificada en base a $\eta_{i_1}, \ldots, \eta_{i_m}, \eta_k$. Por la hipótesis (II), tenemos que obtener los η_{i_j} por especialización de los ξ_j; es decir (10) tiene que valer para alguna elección de parámetros. Entonces

$$\vdash \mathsf{F}_m \eta_{i_1} \eta_{i_2} \cdots \eta_{i_m} \eta_k U$$

es un caso de (9). Puede, por tanto, añadirse a $\mathfrak{B}$; y de ello y las premisas de (13) conseguimos $\mathfrak{T}_k'$. Esto completa la demostración.

5. Cuestiones de terminación

Seguramente se habrá observado que en la demostración del teorema 2 no se usan en la demostración nueva algunas premisas de la demostración original. Esto sugiere que la nueva demostración podría ser más sencilla que la antigua, al menos en el sentido de no poderse continuar indefinidamente el proceso. Pero existe la dificultad de que la simplificación que supone la omisión de una premisa queda compensada por el hecho de que hay partes de la demostración original que tienen que repetirse, lo cual puede muy bien exigir la reintroducción de nuevas premisas tal vez más complejas que la omitida [9]. La cuestión de si el X de (2) se reduce a una forma que no sea ulteriormente reducible, así como la cuestión relacionada con ella, de si X_λ tiene forma normal, parecen requerir para su solución general las técnicas, más potentes, que se introducirán en § F.

En algunas teorías débiles la respuesta a esas cuestiones es, en cambio, inmediata. Se trata de los casos en los cuales no se permiten repeticiones; por ejemplo, cuando los esquemas axiomáticos son (FB), (FC), (FI)

---

[9] En realidad, la misma argumentación podría aplicarse a la reducción misma; puesto que cada paso reductivo de una reducción por las reglas (S) y (K) supone la eliminación de un combinador; es, sin embargo, sabido que hay combinadores como WWW o YX (para cualquier X) para los cuales la reducción puede continuar indefinidamente.

y (FK). En estos casos la reducción elimina una premisa sin posibilitar readmisiones, y, por tanto, disminuye al menos en dos el número de pasos [10]. El sujeto X tendrá, por tanto, una forma irreducible. Y X_λ tendrá forma normal, como puede verse del siguiente modo. Para formar X_λ subrogamos B por $\lambda^3xyz.x(yz)$, C por $\lambda^3xyz.xzy$, I por $\lambda x.x$, K por $\lambda^2xy.x$, etc. Podemos cambiar las variables ligadas de tal modo que no haya repeticiones de las variables que se presentan, y que la contracción de un extenso no introduzca ninguna. Además, cada contracción elimina una λ sin introducir ninguna nueva que la compense; por tanto, tenemos que alcanzar eventualmente una forma normal.

6. Reducción fuerte

Si deseamos ampliar los anteriores teoremas al caso en el cual en vez de reducción ($\succ$), débil se tiene reducción fuerte ($\geq$) es necesario hacer, ante todo, un cambio más bien trivial en la formulación. En la teoría de la reducción fuerte teníamos que tomar I como combinador independiente. Tenemos, por tanto, que hacer lo mismo aquí, tomando (FI), además, como esquema axiomático nuevo independiente. Pero del corolario B1.1. se sigue que esto no supone ninguna diferencia en los teoremas elementales en los que I aparece como componente del sujeto. También son triviales los casos que sería necesario añadir a las demostraciones de los teoremas 2 y 3. Así, pues, la postulación independiente de I no provoca ningún cambio esencial en los teoremas que hemos considerado hasta ahora desde el punto de vista de la reducción débil. A partir de ahora cuando tratemos la reducción fuerte, supondremos hechos esos cambios necesarios, sin necesidad de decirlo cada vez explícitamente.

Tras esta consideración preliminar atenderemos a los teoremas de la conversión de sujeto desde el punto de vista de la reducción fuerte.

Por lo que se refiere al teorema de la expansión de sujeto, el ejemplo siguiente muestra que no es verdadero universalmente:

Ejemplo. 3. Sea $X \equiv a_1$, $X' \equiv \mathsf{S(KI)}a_1$, y supongamos que α_1 es simple-F, $\eta \equiv \alpha_1$. Entonces, puesto que

$$\mathsf{S(KI)}a_1x \geq \mathsf{KI}x(a_1x) \geq a_1x,$$

[10] Como una inferencia-F reúne dos líneas de una demostración en una sola lín ea, una deducción-F de n premisas (en forma arborescente) tendrá $n-1$ inferencias-Fy, por tanto, $2n-1$ estadios. En la reducción de § 4 todas las premisas $\mathfrak{T}_{i_j}$ son necesarias en la deducción original; como alguna puede no ser necesaria en la demostración reducida, la disminución puede ser de más de dos.

tenemos

$$\mathsf{S(KI)}a_1 \succ a_1.$$

Por otro lado, si tenemos un carácter funcional para X', éste tiene que proceder (por el teorema B1) según la regla F de un carácter funcional de S(KI) y la premisa $\vdash \alpha_1 a_1$. Pero por el corolario B1.2 el carácter funcional más general que podemos obtener para S(KI) es de la forma

$$\vdash \mathsf{F(F}\,\zeta\eta)\,(\mathsf{F}\zeta\eta)\,(\mathsf{S(KI)}),$$

de lo que no puede inferirse ninguna consecuencia si α_1 es simple-F.

El teorema de la reducción de sujeto puede, en cambio, establecerse utilizando un resultado de § D para modificar del modo siguiente la argumentación de § 2.

TEOREMA 5. *Sean* $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, X *y* η *como en el teorema* 4, *y sea*

$$X \succ X'; \tag{14}$$

entonces (4) *vale respecto de una* $\mathfrak{B}'$, *formada mediante la adición de axiomas a* $\mathfrak{B}$.

Demostración. Si la reducción (2) no contiene ninguna aplicación de la regla (ξ'), el teorema se reduce al teorema 2. Será, por tanto, suficiente demostrar el teorema en base a la hipótesis de que es verdadero para cualquier caso con un número menor de aplicaciones de la regla (ξ'). Además, si utilizamos el mismo principio de inducción deductiva de la demostración del teorema 2, será suficiente considerar el caso (que podría tomarse como caso 3) en el cual

$$X' \equiv [x]\,\mathfrak{X}, \tag{15}$$

y

$$Xx \succ \mathfrak{X}. \tag{16}$$

Por hipótesis X es un ob O_1, es decir (§ 6C2), es de una de las seis formas KU, SUV, I, K, SU, S. Por el teorema de la construcción de sujeto se sigue que η es compuesto. Sea $\eta \equiv \mathsf{F}\xi\zeta$.

Añadamos, con un x apropiado, la premisa

$$\vdash \xi\, x.$$

Entonces tenemos por la regla F

$$\vdash \zeta\,(Xx);$$

y así, por (16) y la hipótesis inductiva,

(17) $\qquad \vdash \mathfrak{Z}\mathfrak{X}.$

Se sigue entonces por definición que $\mathfrak{X}$ es estratificado. Por el corolario D1.1. tenemos (4). Esto completa la demostración.

COROLARIO 5.1. *Si*

(18) $\qquad \vdash \mathsf{F}\mathfrak{Z}\eta\mathsf{I}$

es deducible de $\mathfrak{B}$ *y los axiomas mediante una deducción básica, entonces*

(19) $\qquad \mathfrak{Z} \equiv \eta.$

Demostración. Por el teorema C1 hay un X tal que

(20) $\qquad X = \mathsf{I},$

y $\qquad \vdash \mathsf{F}\mathfrak{Z}\eta X$

es deducible-F de $\mathfrak{B}$ y los axiomas. Añadiendo la premisa

(21) $\qquad \vdash \mathfrak{Z}x,$

tenemos una deducción-F de

$$\vdash \eta(Xx).$$

Pero por (20) tenemos

$$Xx = \mathsf{I}x = x;$$

Por tanto, por el teorema de Church-Rosser (teorema 6F3),

$$Xx \succ x.$$

Por el teorema 5, la proposición

$$\vdash \eta x$$

es deducible-F de $\mathfrak{B}$, (21) y los axiomas. Por el teorema de la construcción de sujeto esto sólo es posible si vale (19).

D. EL TEOREMA DE LA ESTRATIFICACION Y SUS CONSECUENCIAS

Para estudiar intuitivamente el carácter funcional de un combinador X lo natural sería examinar no la estructura de X, como se ha he-

cho en § B, sino la de la combinación $\mathfrak{X}$ representada por X. Esto es precisamente lo que hicimos al motivar los esquemas axiomáticos en § 8C. La tesis del teorema de la estratificación es que el carácter funcional al que así se llega es demostrable por una deducción-F a partir do los axiomas —impuestas, naturalmente, ciertas restricciones—. En esta sección derivaremos ese teorema —que es, prácticamente, un corolario del teorema de la expansión de sujeto— y discutiremos luego algunas de sus consecuencias. Entre éstas estará una tabla de los caracteres funcionales de varios combinadores de uso común, así como la formulación de la teoría de la funcionalidad en términos de conversión λ.

La idea de estratificación se introdujo en § B4, y en § C4 se hizo una aplicación de la misma; pero hemos reservado para esta sección los teoremas principales al respecto.

1. El teorema de la estratificación

Teorema 1. *Sea* $\mathfrak{B}$ *una base*

$$\vdash \alpha_i\, a_i \qquad i = 1, 2, \ldots p. \tag{1}$$

Sea $\mathfrak{X}$ *una combinación de* $a_1, \ldots, a_p$ *y las variables* $x_1, \ldots, x_m$, *estratificada respecto de* $\mathfrak{B}$ *en términos de* $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta$. *Sea* X *una combinación de* $a_1, \ldots, a_p$ *y combinadores tal que*

$$Xx_1 \ldots x_m \geq_\beta \mathfrak{X}, \tag{2}$$

satisfaciendo la reducción las condiciones (a)—(d) *del teorema* C3. *Entonces la proposición*

$$\vdash \mathsf{F}_m\, \xi_1 \ldots \xi_m\, \eta X \tag{3}$$

es deducible-F de una base $\mathfrak{B}'$ *formada añadiendo a* $\mathfrak{B}$ *ciertos casos de los esquemas axiomáticos.*

Demostración. Por el teorema C3 y la definición B1 la proposición

$$\vdash \eta\,(Xx_1 \ldots x_m) \tag{4}$$

es deducible-F a partir de una base $\mathfrak{B}'$ como la descrita en el teorema. Por el teorema B1 la deducción de (4) tiene que terminar en una derivación de (4) a partir de (3) mediante una serie de inferencias cuyas premisas menores son

$$(5) \qquad \vdash \xi_i x_i \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Por tanto, tiene que haber una deducción de (3). Por el teorema B1 (v) las premisas (5) no se usan en esa deducción. Esto completa la demostración.

OBSERVACIÓN 1. Este teorema vale no sólo cuando los combinadores primitivos son S y K, sino para cualquier elección de combinadores primitivos que satisfaga las condiciones del teorema C4. Si se usa un sistema débil de combinadores primitivos, entonces X no tiene que contener más que los combinadores primitivos cuyo carácter funcional se postula en los esquemas axiomáticos. Esto impondrá algunas limitaciones a $\mathfrak{X}$: si se omite K, toda variable tiene que presentarse una vez al menos en $\mathfrak{X}$; si se omite W (y no queda compensado por ningún otro combinador, como S, que suponga también repeticiones), ninguna variable puede aparecer en $\mathfrak{X}$ más de una vez, etc. Esta misma observación se aplica a varias consecuencias deducidas más adelante; supondremos tácitamente que los esquemas axiomáticos son suficientes para los combinadores primitivos de X.

OBSERVACIÓN 2. Las condiciones restrictivas (c)—(d) del teorema C3 quedan automáticamente satisfechas si los componentes cancelados o repetidos de la reducción (2) son todos variables. La hipótesis (b) queda también automáticamente satisfecha si los a_j son todos primitivas que no sean combinadores.

COROLARIO 1.1. *Sean* $\mathfrak{B}$ *y* $\mathfrak{X}$ *como en el teorema. Entonces*

$$(6) \qquad \vdash \mathsf{F}_m \xi_1 \ldots \xi_m \eta\, ([x_1, \ldots, x_m]\, \mathfrak{X})$$

es deducible-F a partir de una base $\mathfrak{B}'$ *formada como en el teorema.*

Demostración. Por el teorema 6A1, (2) vale si interpretamos X como $[x_1, \ldots, x_m]\, \mathfrak{X}$. Si examinamos la reducción (usando la inducción natural sobre m e inducción estructural sobre $\mathfrak{X}$) encontraremos satisfechas las condiciones (a) y (b) del teorema C3. Pasamos a comprobar que las hipótesis (c) y (d) están también satisfechas.

Por lo que hace a la hipótesis (c), comprobamos que las únicas cancelaciones se presentan al reducir algún $\mathsf{K}ax$ a a o algún $\mathsf{I}x$ a x. En el primer caso el componente cancelado x es uno de los x_i y en ξ_i hay un ζ correspondiente. En el último caso la cancelación surge porque

$$\mathsf{I}x \equiv \mathsf{SKK}x \geq \mathsf{K}x(\mathsf{K}x) \geq x;$$

el componente cancelado es $\mathsf{K}x$, es decir, $\mathsf{K}x_i$ para algún i; el ζ correspondiente puede ser $\mathsf{F}\alpha\xi_i$, con un α cualquiera.

Por lo que hace a la hipótesis (d), el único uso de la regla (S) se presenta en relación con la cláusula (c) de la definición (en el teorema 6A1); el componente repetido es entonces una variable.

Por tanto, las hipótesis del teorema 1 quedan completamente satisfechas especializando a X como queda dicho. Entonces (3) queda especializado en (6).

OBSERVACIÓN 3. El teorema de la estratificación se demostró por vez primera [11] bajo la forma del corolario 1.1 sin usar el teorema C3. El método era una inducción natural sobre m junto con una inducción estructural sobre X para el caso $m = 1$. Los teoremas que siguen exigían entonces el uso de la regla Eq'. El procedimiento dado aquí da resultados algo más fuertes.

OBSERVACIÓN 4. El corolario 1.1 es verdadero no sólo para $[x_1, \ldots, x_m]\ \mathfrak{X}$ como queda definida en § 6A2, sino también para otras varias definiciones posibles que se consideraron en § 6A3. Pero el único punto importante es que las condiciones (a)—(d) o algunas modificaciones de ellas [12] valgan para la reducción (2).

COROLARIO 1.2. *Sea $\mathfrak{X}$ una combinación de las variables $x_1, \ldots, x_m$, estratificada (absolutamente) en base a $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta$. Sea X un combinador regular o de la forma Yl siendo Y regular, y tal que vale* (2). *Entonces* (3) *es deducible-F de los esquemas axiomáticos.*

Demostración. En este caso las hipótesis auxiliares (a)—(d) se satisfacen automáticamente.

2. EL TEOREMA DE LA VARIACIÓN

El teorema de la estratificación toma una forma especialmente simple en el caso de un variador:

TEOREMA 2. *Sea V un variador regular tal que*

$$(7) \qquad Vx_0\, x_1 \ldots x_m \geq x_0\, y_1 \ldots y_n,$$

siendo cada y_j algún x_i con $i > 0$. Sea $\eta_j \equiv \xi_i$ si $y_j \equiv x_i$. Entonces

$$(8) \qquad \vdash \mathsf{F}(\mathsf{F}_n\, \eta_1 \ldots \eta_n\, \zeta)\, (\mathsf{F}_m\, \xi_1 \ldots \xi_m\, \zeta) V$$

es deducible-F de los esquemas axiomáticos [13].

---

[11] La demostración original no se publicó, pero el teorema se formuló en [ACT].
[12] Cfr. en § E2, nota, un caso en que no valen.
[13] Sobre la suficiencia de los esquemas axiomáticos cfr. obs. 1, final.

Demostración. Si ponemos $\xi_0 \equiv \mathsf{F}_n\eta_1 \ldots \eta_n\mathfrak{Z}$, entonces la parte derecha de (7) es absolutamente estratificada en base a $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m, \mathfrak{Z}$. El teorema se sigue entonces por el corolario 1.2.

3. El teorema de la sustitución

En el estudio de sistemas formales nos encontramos frecuentemente con inferencias del tipo siguiente: sea $\mathfrak{X}$ una combinación de constantes y de las variables $x_1, \ldots, x_m$, la cual representa una función de dichas variables; sea $\mathfrak{Z}$ la combinación obtenida de $\mathfrak{X}$ mediante la sustitución de algunos x_i por combinaciones, $\mathfrak{Y}_i$, de las mismas o de ciertas otras variables; entonces $\mathfrak{Z}$ es una función de las variables que aparecen en ella. Este tipo de inferencia puede formalizarse con nuestro presente aparato. El teorema general es como sigue:

Teorema 3. *Sea $\mathfrak{B}$ una base como en el teorema* C3. *Sea $\mathfrak{X}$ una combinación de $a_1, \ldots, a_p$ y las variables $x_1, \ldots, x_m$, y sean $\xi_1, \ldots, \xi_m, \mathfrak{Z}$ obs-F tales que*

$$\vdash \mathsf{F}_m \xi_1 \ldots \xi_m \mathfrak{Z}\,([x_1, \ldots, x_m]\,\mathfrak{X}) \tag{9}$$

es deducible-F de $\mathfrak{B}$. Sean $\mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_n$ combinaciones de $a_1, \ldots, a_p$ y ciertas variables $y_1, \ldots, y_n$, y sean $\eta_1, \ldots, \eta_n$ obs-F tales que

$$\vdash \mathsf{F}_n\eta_1 \ldots \eta_n\,\xi_i\,([y_1, \ldots, y_n]\,\mathfrak{Y}_i), \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{10}$$

son también deducibles-F de $\mathfrak{B}$. Por último, supongamos que $\mathfrak{Z}$ se obtiene sustituyendo x_i ($i = 1, \ldots, m$) por $\mathfrak{Y}i$ en $\mathfrak{X}$. Entonces

$$\vdash \mathsf{F}_n\eta_1 \ldots \eta_n\,\mathfrak{Z}\,([y_1, \ldots, y_n]\,\mathfrak{Z}) \tag{11}$$

es deducible-F de $\mathfrak{B}$ y los esquemas axiomáticos.

Demostración. Sea

$$X \equiv [x_1, \ldots, x_m]\,\mathfrak{X}.$$

Entonces, por la definición B1, $Xx_1 \ldots x_m$ es estratificada respecto de $\mathfrak{B}$ en base a $\xi_1, \ldots, \xi_m, \mathfrak{Z}$; por tanto, por el teorema C2, también lo es $\mathfrak{X}$. Esto significa que tenemos una deducción-F de

$$\xi_1 x_1, \ldots, \xi_m x_m \vdash' \mathfrak{Z}\,\mathfrak{X},$$

fórmula en la cual '$\vdash'$' indica que pueden ser necesarias premisas adicionales de $\mathfrak{B}$. De esto podemos inferir

$$\xi_1 \mathfrak{Y}_1, \ldots, \xi_m \mathfrak{Y}_m \vdash' \mathfrak{Z}\,\mathfrak{Z}.$$

Por otro lado, de (10) podemos inferir análogamente que hay deducciones

$$\eta_1 y_1, \ldots, \eta_n y_n \vdash' \xi_i \mathfrak{Y}_i \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Combinando éstas con la anterior vemos que $\mathfrak{Z}$ es estratificada en base $\eta_1, \ldots, \eta_n, \zeta$. De esto se sigue (11) por el corolario 1.1.

El caso en el cual $\mathfrak{Y}_i$ depende sólo de algunos de los y puede ser recogido por el teorema de la variación.

4. Carácter funcional de algunos combinadores

La tabla siguiente da caracteres funcionales que pueden establecerse para varios combinadores mediante el teorema de la estratificación. En adelante citaremos el carácter funcional atribuido al combinador X en esta tabla —así como la afirmación de que X tiene dicho carácter— con la simple notación (FX). El contexto eliminará posibles confusiones con otros usos de esos símbolos.

Tabla de caracteres funcionales de combinadores

X	(FX)
K	$F\alpha\ (F\beta\alpha)$
S	$F_2\ (F_2\alpha\beta\gamma)\ (F\alpha\beta)\ (F\alpha\gamma)$
I	$F\alpha\alpha$
B	$F_2\ (F\beta\gamma)\ (F\alpha\beta)\ (F\alpha\gamma)$
C	$F\ (F_2\beta\alpha\gamma)\ (F_2\alpha\beta\gamma)$
W	$F\ (F_2\alpha\alpha\beta)\ (F\alpha\beta)$
Φ	$F\ (F_2\alpha\beta\gamma)\ (F_2\ (F\delta\alpha)\ (F\delta\beta)\ (F\delta\gamma))$
Ψ	$F_2\ (F_2\beta\beta\gamma)\ (F\alpha\beta)\ (F_2\alpha\alpha\gamma)$
C_* (= CI)	$F_2\alpha\ (F\alpha\beta)\beta$
J	$F\ (F_2\alpha\beta\beta)\ (F_3\alpha\beta\alpha\beta)$
B′ (= CB)	$F_2\ (F\alpha\beta)\ (F\beta\gamma)\ (F\alpha\gamma)$
B^n	$F_2\ (F\beta\gamma)\ (F_n\alpha, \ldots, \alpha_n\beta)\ (F_n\ \alpha, \ldots, \alpha_n\gamma)$
$B^m B^n$	$F_{m+2}\ (F_{m+1}\ \delta_1 \ldots \delta_m\beta\gamma)\ \delta_1 \ldots \delta_m\ (F_n\alpha_1 \ldots \alpha_n\beta)\ (F_n\alpha_1 \ldots \alpha_n\gamma)$
K_{n+1} (= B^nK)	$F\ (F_n\ \alpha_1 \ldots \alpha_n\ \gamma)\ (F_{n+1}\ \alpha_1 \ldots \alpha_n\beta\gamma)$
C_{n+1} (= B^nC)	$F\ (F_{n+2}\ \alpha_1 \ldots \alpha_n\ \gamma\beta\delta)\ (F_{n+2}\ \alpha_1 \ldots \alpha_n\ \beta\gamma\delta)$
W_{n+1} (= B^nW)	$F\ (F_{n+2}\ \alpha_1 \ldots \alpha_n\beta\beta\gamma)\ (F_{n+1}\alpha_1 \ldots \alpha_n\beta\gamma)$
S_n	$F_{n+1}\ (F_{n+1}\ \alpha\beta_1 \ldots \beta_n\gamma)\ (F\alpha\beta_1) \ldots (F\alpha\beta_n)\ (F\alpha\gamma)$
Φ_n	$F_{n+1}\ (F_n\beta_1 \ldots \beta_n\gamma)\ (F\alpha\beta_1) \ldots (F\alpha\beta_n)\ (F\alpha\gamma)$
SB	$F_2\ (F(F\beta\gamma)\ (F\alpha\beta))\ (F\beta\gamma)\ (F\alpha\gamma)$
Z_0 (= KI = K_*)	$F\beta\ (F\alpha\alpha)$
Z_1 (= I_η)	$F\ (F\alpha\beta)\ (F\alpha\beta)$
Z_{n+1}	$F\ (F\alpha\alpha)\ (F\alpha\alpha)$ (para todo $n > 0$)
D_2	$F_3\alpha\beta\ (F(F\gamma\beta)\ (F\alpha\delta))\ \delta$ (cfr. ejemplo 3, § B4).

5. Necesidad de la estratificación

El teorema de la estratificación nos ha mostrado que la teoría básica es suficiente para derivar formalmente las propiedades funcionales intuitivas de los combinadores y las propiedades funcionales de la sustitución. Vamos a preguntarnos ahora en qué medida las condiciones del teorema de la estratificación son necesarias para la deducibilidad-F a partir de los esquemas axiomáticos. Hasta más tarde no podremos obtener una respuesta completa a esta cuestión; pero consideraremos aquí algunos puntos preliminares. Los resultados son en su mayor parte amplificaciones del teorema de la reducción de sujeto.

Según el teorema de la estratificación, condición suficiente de que (3) sea deducible-F a partir de los esquemas axiomáticos es que exista una combinación $\mathfrak{X}$ de las variables $x_1, \ldots, x_m$, tal que $\mathfrak{X}$ sea absolutamente estratificada en términos de $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta$ y que (2) valga en el sentido restringido del teorema C3. El ejemplo siguiente muestra que esta condición no es necesaria.

Ejemplo 1. Sea $X \equiv \mathsf{CIK}$. Entonces, por los métodos de § B, podemos mostrar que

$$\vdash \mathsf{F}(\mathsf{F}(\mathsf{F}_2\,\alpha\beta\alpha)\,\gamma)\gamma X.$$

Tenemos, por otro lado,

$$Xx_1 \ldots x_m \geq x_1 \mathsf{K} x_2 \ldots x_m,$$

lo cual no se reduce ulteriormente, cualquiera que sea m.

Del corolario C2.1 puede deducirse un teorema que expresa una condición suficiente:

Teorema 4. *Sea* (3) *deducible-F de una base* $\mathfrak{B}$ *que satisface las restricciones del teorema* C2, *y sea* $\mathfrak{X}$ *tal que vale* (2). *Entonces* $\mathfrak{X}$ *es estratificada respecto de* $\mathfrak{B}$ *en términos de* $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta$.

En la demostración del teorema 3 fue necesario demostrar un caso especial de este teorema. La demostración del caso general puede obtenerse por el mismo método.

6. La formulación λ de $\mathscr{F}_1{}^b$.

Teniendo en cuenta la equivalencia —que estudiamos en § **6E**— entre la teoría sintética de combinadores y las teorías de la conversión λ del capítulo **3** es natural preguntarse si la teoría de la funcionalidad

puede formularse a base de la conversión λ. El teorema de la estratificación da una pista sobre el modo de conseguir una tal formulación. Aquel teorema muestra, en efecto, que si $\mathfrak{X}$ es absolutamente estratificada en términos de $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta$, podemos concluir que vale (3), con

(12) $$X = [x_1, \ldots, x_m]\,\mathfrak{X};$$

basta entonces con poner en lugar del prefijo de corchetes el correspondiente prefijo λ para encontrar un esquema axiomático adecuado para la teoría λ. Vamos a construir una formulación basada en esta idea.

Empezamos por postular un $\mathscr{F}_0$ que sea logístico y tenga la misma morfología de los obs del cálculo λ. Le añadimos la constante primitiva F y la regla F. Tomamos la relación de convertibilidad λ como igualdad epiteorética y adoptamos la regla Eq para la igualdad así interpretada. En la teoría básica, naturalmente, no adoptamos más que la regla Eq'.

Para evitar toda confusión adoptamos la notación '$\vdash^{\lambda}$' para indicar la aserción de la nueva teoría. Podemos llamar a ésta $\mathscr{F}_1(\lambda)$, o bien, si deseamos subrayar que estamos trabajando con la teoría básica, $\mathscr{F}_1{}^{b}(\lambda)$. Los diversos tipos de cálculo λ pueden indicarse por otros símbolos más asociados a la 'λ'.

Usamos el subíndice 'λ' como en § **6E** para indicar el ob-λ X_λ asociado a un ob combinatorio X. Modificamos las convenciones adoptadas allí en el sentido de permitirnos ahora otras elecciones de combinadores primitivos. Si U es cualquier combinador primitivo con la regla de reducción

(13) $$Ux_1x_2 \ldots x_m \geq \mathfrak{U},$$

siendo $\mathfrak{U}$ una combinación de sólo variables, entonces especificamos que

(14) $$\mathbf{U}_\lambda \equiv \lambda^m x_1 \ldots x_m \,.\, \mathfrak{U}.$$

La definición de X_λ por inducción estructural se completa con la especificación siguiente: (I) $a_\lambda \equiv a$ para todo a que sea un átomo y no sea un combinador; (II) $(YZ)_\lambda \equiv Y_\lambda Z_\lambda$.

Como esquema axiomático para $\mathscr{F}_1(\lambda)$ postulamos:

Esqax. (F λ). *Si* $\mathfrak{X}$ *es una combinación de las variables* $x_1, \ldots, x_m$ *y es absolutamente estratificada en base a* $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta$, *entonces*

$$\vdash^{\lambda} \mathsf{F}_m\, \xi_1 \ldots \xi_m \eta\, (\lambda^m x_1 \ldots x_m \,.\, \mathfrak{X}).$$

Vamos a deducir ahora teoremas que muestran que el sistema así formulado equivale a un $\mathscr{F}_1$ de los antes formulados. Citaremos Esqax. (Fλ) escribiendo simplemente (Fλ).

TEOREMA 5. *Sea*

$$\vdash \mu X \tag{15}$$

deducible-F de una base $\mathfrak{B}$ *más esquemas axiomáticos que satisfacen las condiciones* (I) *y* (II) *del teorema* C4. *Entonces*

$$\vdash^{\lambda} \mu X_{\lambda} \tag{16}$$

es deducible-F de $\mathfrak{B}_{\lambda}$ *e instancias de* (Fλ).

Demostración. Procedemos por inducción deductiva. El caso en el cual (15) está en $\mathfrak{B}$ es trivial, puesto que entonces también (16) está en $\mathfrak{B}_{\lambda}$. Queda por considerar sólo los casos en los que (15) es un caso de un esquema axiomático o se obtiene por la regla F.

Supongamos que (15) es un caso de un esquema axiomático. Entonces, por las propiedades (I) y (II) del teorema C4, hay un combinador primitivo U con la regla de reducción (13) tal que $X \equiv U$, $\mathfrak{U}$ es una combinación de variables $x_1, \ldots, x_m$ y es absolutamente estratificada en términos de ciertos $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta$, y

$$\mu \equiv \mathsf{F}_m \, \xi_1 \ldots \xi_m \, \eta. \tag{17}$$

Se sigue entonces por (14) que (16) es un caso de (Fλ).

Supongamos que (15) se ha derivado por una inferencia-F, y que nuestra tesis es verdadera para las premisas. Sea la inferencia

$$\mathsf{F}\rho\mu Y \qquad \rho Z \vdash \mu X,$$

con $X \equiv YZ$. Por la hipótesis inductiva

$$\vdash^{\lambda} \mathsf{F}\rho\mu Y_{\lambda}, \qquad \vdash^{\lambda} \rho Z_{\lambda}.$$

De esto derivamos (16) por la regla F.

COROLARIO 5.1. *Si* (15) *se obtiene mediante una deducción básica a partir de* $\mathfrak{B}$ *y esquemas axiomáticos como en el teorema, entonces* (16) *puede obtenerse en* $\mathscr{F}_1$ (λ) *a partir de* $\mathfrak{B}_{\lambda}$ *y* (Fλ) *mediante una deducción básica.*

Demostración. Basta considerar el caso adicional en el cual (15) se obtiene por la regla Eq'. Sea la premisa

$$\vdash \mu X',$$

con

$$X' = X.$$

Por la hipótesis inductiva

$$\vdash^{\lambda} \mu(X')_{\lambda};$$

luego por § **6E**

$$(X')_{\lambda} \text{ cnv } X_{\lambda}.$$

Por tanto, por la regla Eq′ en $\mathscr{F}_1$ (λ), tenemos (16).

OBSERVACIÓN 5. El corolario no exige que (14) valga por definición. En cualquier caso, (14) valdrá en el sentido de la conversión, y podremos aplicar la regla Eq′ para conseguir (16) a partir de una instancia de (F λ).

TEOREMA 6. *Sea* $\mathfrak{B}$ *una base que no contiene variables. Sea* A *un ob-*λ *y* μ *un ob-*F *tales que*

(18) $$\vdash^{\lambda} \mu A$$

es deducible por la(s) regla(s) F (*y* Eq′) *a partir de* $\mathfrak{B}$ *y* (Fλ). *Supongamos que los esquemas axiomáticos de los combinadores satisfacen las restricciones* (I) *y* (II) *del teorema* C4, *y supongamos que bastan para dar el teorema de la estratificación*[14] *para* $\mathfrak{X}$ *si* $\mathfrak{X}$ *es admisible en* (Fλ). *Entonces*

(19) $$\vdash \mu A_H$$

es deducible de $\mathfrak{B}_H$ *y los esquemas axiomáticos mediante la(s) regla(s)* F (*y Eq′*).

Demostración. Utilizamos como antes una inducción deductiva sobre la demostración de (18). El caso en el cual (18) está en $\mathfrak{B}$ es trivial.

Si (18) es un caso de (Fλ), entonces vale (17) y

$$A \equiv \lambda^m x_1 \ldots x_m \mathfrak{X}.$$

Por la hipótesis de este teorema podemos aplicar el teorema de la estratificación para obtener

$$\vdash \mu([x_1, \ldots, x_m] \mathfrak{X}),$$

que es (19).

Si (18) ha sido derivado por una inferencia-F o por una conversión

---

[14] Dicho de otro modo: supongamos que vale el corolario D1.1.

podemos argüir como antes. Las reglas I y Eq' valen, en efecto, en las dos teorías.

La formulación de $\mathscr{F}_1(\lambda)$ tiene la desventaja de que requiere un *m* general. Si buscamos una inducción sobre *m* llegamos a una formulación del tipo Gentzen, que consideraremos más tarde.

OBSERVACIÓN. El ejemplo siguiente muestra que ni el teorema de la reducción de sujeto ni el corolario D1.1 son válidos en el sistema $\mathscr{F}_1(\lambda)$. Sea

$$\mathfrak{M} \equiv \lambda y.yx, \qquad \mathfrak{N} \equiv \mathsf{K}_\lambda,$$

$$\mathfrak{X} \equiv y\mathsf{K}_\lambda.$$

Entonces

$$(\lambda x\mathfrak{M})\mathfrak{N} \geq_\beta \lambda y\,\mathfrak{X}. \tag{20}$$

Pero por (Fλ) tenemos

$$\begin{aligned} &\vdash \mathsf{F}_2\rho\,(\mathsf{F}\rho\eta)\,\eta\,(\lambda x\,\mathfrak{M}), \\ &\vdash \mathsf{F}_2\,\alpha\,(\mathsf{F}\beta\alpha)\,\mathfrak{N}. \end{aligned} \tag{21}$$

Por tanto, si ponemos $\rho \equiv \mathsf{F}_2\alpha(\mathsf{F}\beta\alpha)$, tenemos por la regla F

$$\vdash \mathsf{F}(\mathsf{F}\rho\eta)\eta\,((\lambda x\,\mathfrak{M})\,\mathfrak{N}).$$

Por otro lado, la proposición

$$\vdash \mathsf{F}(\mathsf{F}\rho\eta)\,\eta\,(\lambda y\,\mathfrak{X}) \tag{22}$$

puede derivarse de (Fλ) si —y sólo si— es ella misma una instancia de (Fλ) (teorema B1), lo cual es imposible puesto que $\mathfrak{X}$ no es una combinación de variables. Teniendo en cuenta (20), esto está en contradicción con el teorema de la reducción de sujeto. Por otra parte, $\mathfrak{X}$ es estratificada sobre la base (21) en términos de F$\rho\eta$ y η, de tal modo que la falsedad de (22) contradice al corolario D1.1.

E. ANALOGIAS CON EL ALGEBRA PROPOSICIONAL

Vamos a estudiar aquí una acusada analogía entre la teoría de la funcionalidad y la teoría de la implicación en el álgebra proposicional. En § 1 mostraremos que en el álgebra absoluta [15] (es decir, positiva

---

[15] Este término se usó en [TFD] para los sistemas señalados con 'A'. El uso se respetó en [LLA], [IFI].

intuicionística) de la implicación pura hay un teorema correspondiente a cada teorema de la teoría básica. En § 2 estudiaremos la relación recíproca, así como algunas consecuencias varias de esa relación. En § F consideraremos una formulación inferencial análoga a la formulación del álgebra proposicional por Gentzen.

1. La transformación F-P

Si se pone P (implicación) en lugar de F y si se ignora el sujeto-entonces los esquemas axiomáticos (FK) y (FS) se convierten, respecti, vamente, en

$$\alpha \supset . \beta \supset \alpha, \tag{1}$$

$$\alpha \supset . \beta \supset \gamma : \supset : \alpha \supset \beta . \supset . \alpha \supset \gamma, \tag{2}$$

en los cuales, para seguir la práctica corriente, hemos utilizado la definición

$$\alpha \supset \beta \equiv P\alpha\beta,$$

Bajo esa misma transformación, la regla F se convierte en la regla de *modus ponens*. Como es sabido, el *modus ponens* y los esquemas (1) y (2) dan origen a la teoría de la implicación pura en el álgebra proposicional intuicionista, a la que llamaremos aquí simplemente *álgebra absoluta de la implicación*. Se sigue por inducción deductiva que todo teorema elemental de la teoría básica es análogamente relacionado con un teorema elemental del álgebra absoluta.

Podemos explicitar más este resultado del modo siguiente. Definamos inductivamente α^P, para todo ob-F α, del modo siguiente:

$$\theta_i^P \equiv \theta_i,$$
$$(F\alpha\beta)^P \equiv \alpha^P \supset \beta^P \ (\equiv P\,\alpha^P\beta^P).$$

Entonces α^P es siempre una fórmula del álgebra absoluta. Tenemos, además:

Teorema 1. *Todo teorema elemental de la teoría básica es de la forma*

$$\vdash F_m\,\xi_1 \ldots \xi_m\,\eta\,X, \tag{3}$$

siendo

$$\vdash (F_m\,\xi_1 \ldots \xi_m\,\eta)^P \tag{4}$$

un teorema elemental del álgebra absoluta de la implicación. Además, si (3) *es derivable en la teoría básica a partir de las premisas*

(5) $\qquad \vdash \alpha_i\, a_i \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, p;$

entonces (4) *es derivable en el álgebra absoluta de la implicación a partir de las premisas*

(6) $\qquad \vdash \alpha_i^P \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, p.$

La demostración de este teorema consiste simplemente en la observación de que la transformación de (3) en (4) convierte a (FK) y (FS) en los esquemas proposicionales (1) y (2), que son válidos en el álgebra absoluta; que una inferencia por la regla F se convierte en una inferencia por la regla P *(modus ponens)*; y que, en el caso de una inferencia por la regla Eq', las transformadas de la premisa y la conclusión son idénticas.

2. Transformación inversa

El teorema 1 tiene un recíproco parcial:

Teorema 2. *Si* (4) *es derivable mediante la regla* P *de las premisas* (6), *entonces para cada derivación de* (4) *a partir de* (6) *y cada asignación de* $a_1, \ldots, a_p$ *a* $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, *respectivamente, existe un* X *tal que* (3) *es derivable de* (5) *mediante la regla* F *sola.*

La demostración de este teorema consiste en la observación de que α está unívocamente determinada por α^P; y que una inferencia por la regla P se transforma en una inferencia por la regla F en la cual el sujeto de la conclusión está unívocamente determinado si lo están los de las premisas.

Pero no hay que suponer, sin embargo, que, dados $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta$, haya un X único que satisface a (3). Así,

$$\vdash \mathsf{F}(\mathsf{F}\alpha\alpha)\,(\mathsf{F}\alpha\alpha)X$$

es verdadero si $X \equiv \mathsf{Z}_n$, siendo n cualquier número natural entero.

Si hacemos que (PX) sea la fórmula correspondiente a (FX), entonces los (PX) de algunos corrientes combinadores son:

(PK) $\quad \vdash \alpha \supset . \beta \supset \alpha,$

(PS) $\quad \vdash \alpha \supset . \beta \supset \gamma : \supset : \alpha \supset \beta . \supset . \alpha \supset \gamma,$

(PB) $\quad \vdash \beta \supset \gamma . \supset : \alpha \supset \beta . \supset . \alpha \supset \gamma,$

(PC) $\quad \vdash \alpha \supset . \beta \supset \gamma : \supset : \beta \supset . \alpha \supset \gamma,$

(PW) $\quad \vdash \alpha \supset . \alpha \supset \beta : \supset : \alpha \supset \beta,$

(PB') $\quad \vdash \alpha \supset \beta . \supset : \beta \supset \gamma . \supset . \alpha \supset \gamma.$

Adoptaremos esta notación para expresar propiedades de P. Se verá que si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son un conjunto de combinadores primitivos, entonces $(PX_1), \ldots, (PX_n)$ son un conjunto de esquemas axiomáticos del álgebra absoluta de la implicación, y viceversa [16]. Esto está de acuerdo con los teoremas 1 y 2.

Para algunos fines será conveniente introducir P_m por analogía con F_m: La definición es

$$P_1 \equiv P, \tag{7}$$

$$P_{m+1} \equiv [x_1, \ldots, x_m, y, z]\, P_m x_1 \ldots x_m\, (Pyz). \tag{8}$$

F. FORMAS INFERENCIALES DE LA FUNCIONALIDAD

Las analogías con el álgebra proposicional que hemos observado en § E, junto con la formulación λ de § D6, sugiere un modo de desarrollar las formulaciones de $\mathscr{F}_1$ que tienen con las formulaciones axiomáticas de §§ A-E una relación parecida a la que los sistemas inferenciales de Gentzen tienen con el álgebra proposicional. Esta es la idea que se desarrolla aquí. Las formulaciones nos dan poderosos teoremas sobre $\mathscr{F}_1{}^b$, con la demostración de que todo combinador que tenga carácter funcional tiene una forma normal; estos teoremas son fundamentales para los teoremas de consistencia del capítulo **10.** La discusión arroja también alguna luz sobre el significado profundo de las reglas de Gentzen en relación con el álgebra proposicional.

---

[16] Esto se cumple para los conjuntos conocidos de combinadores (K, S), (K, B, C, W), (K, B′, W). Pero no se pretende afirmar que ocurra siempre y necesariamente. El ejemplo siguiente muestra por qué. Tratándose de combinadores sin K, cada uno de los conjuntos (B, C, W, I), (B, C, S, I), (J, I) constituye un conjunto suficiente de combinadores primitivos. Los conjuntos (PB), (PC), (PW) o (PS) y (PI) forman un conjunto suficiente de esquemas axiomáticos para el álgebra proposicional correspondiente, a la que Church [WTI] llama teoría débil de la implicación. Por otro lado, (PJ) y (PI) no constituyen un conjunto suficiente de postulados para el álgebra débil. El carácter funcional de J definido por el teorema de la estratificación (cfr. § D4) es, efectivamente, $F_4\,(F\alpha\,(F\beta\beta))\alpha\beta\alpha\beta$; y con la técnica del § B podemos mostrar que no podemos deducir de (FJ) y (FI) solos el carácter funcional de JII (= C_*). Así, pues, (FJ) y (FI) son insuficientes para el teorema de la estratificación (modificado por la restricción de que $x_1, \ldots, x_m$ tienen que presentarse, efectivamente, en $\mathfrak{X}$). Esto se relaciona con el hecho de que J repite su primer argumento, no su segundo; y, por tanto, una hipótesis análoga a (d) del teorema C3 no quedaría satisfecha para reducciones hechas mediante (J). Es, pues, importante que los combinadores primitivos constituyan un conjunto tal que sus esquemas correspondientes (FX) sean suficientes para una modificación adecuada del teorema de la estratificación.

1. Una formulación de reglas T

En § D6 observamos que la formulación $\mathscr{F}_1(\lambda)$ tiene el defecto de que su esquema axiomático, (Fλ), depende de un m general, mientras que la analogía con casi todo lo demás factible con la teoría de la conversión λ hace suponer que las variables se introducen de una en una. El teorema de la estratificación sugiere un procedimiento para obtener una inducción sobre m. Supongamos, en efecto, que indicamos mediante

$$(1) \qquad \alpha_1 a_1, \ldots, \alpha_p a_p, \xi_1 x_1, \ldots, \xi_m x_m \vdash' \eta \mathfrak{X},$$

como en § D3, que la conclusión se sigue de la regla F a partir de las premisas indicadas más instancias de los esquemas axiomáticos; entonces el teorema de la estratificación permite la inferencia de (1) a

$$(2) \qquad \alpha_1 a_1, \ldots, \alpha_p a_p, \xi_1 x_1, \ldots, \xi_{m-1} x_{m-1} \vdash' \mathsf{F}\, \xi_m \eta ([x_m] \mathfrak{X}).$$

Si deseamos traducir este tipo de inferencia al lenguaje λ es necesario considerar un sistema que no es ya logístico, pero tiene proposiciones elementales de la forma

$$(3) \qquad T_1, T_2 \ldots, T_n \Vdash T_0,$$

siendo los T_i obs de la forma ξX (de tal modo que $\vdash T_i$ sería una proposición elemental de $\mathscr{F}_1{}^b(\lambda)$). Buscamos entonces reglas compatibles con una interpretación de (3) que exprese (tal vez modificada) una F deducibilidad. Pero antes de formular esas reglas es necesario hacer unas pocas observaciones generales.

En su tesis [ULS] Gentzen proponía dos tipos de formulaciones de reglas del álgebra proposicional y del cálculo de predicados. Llamaremos reglas T [17] al primer tipo de reglas, al que él llamaba reglas N; al segundo tipo llamó reglas L, notación que conservaremos. Nos vamos a ocupar aquí de las reglas T; el tratamiento de las reglas L se pospondrá a § 2.

Las reglas T no parecen —no, desde luego, a primera vista— constituir un sistema formal con proposiciones elementales de la forma (3).

---

[17] Seguimos el uso de [TFD]. La razón de este cambio es que 'N' se ha usado ya para la negación. En este contexto hay también alguna posibilidad de conflicto en el uso de 'T', pero ese riesgo no parece lo suficientemente grave como para justificar otro cambio más de notación.

Lo que hizo Gentzen fue mostrar una técnica para producir demostraciones en esquema arborescente, y las reglas mostraban cómo un árbol puede extenderse hacia abajo para formar otro árbol, o cómo dos árboles podían juntarse por la cúspide para formar ramas de otro. Por ejemplo, una de estas reglas dice que si un árbol termina en $p \supset q$ y otro termina en p, los dos pueden unirse para formar un árbol que termina en q. Algunas reglas afirman que ciertas premisas de uno de los árboles dados pueden cancelarse; por ejemplo, que si hay un árbol que termina en q, entonces el árbol puede prolongarse hacia abajo de modo que termine en $p \supset q$ y se puede cancelar la premisa p si estaba presente. La técnica obliga a registrar de algún modo las cancelaciones. Podemos ahora interpretar la proposición (3) entendiendo que dice que hay un árbol que termina en T_0 y cuyas permisas sin cancelar se encuentran entre los $T_1, \ldots, T_n$. Gentzen muestra entonces que (3) vale para $n = 0$ si —y sólo si— T_0 puede afirmarse en la correspondiente álgebra proposicional (o cálculo de predicados). Así, pues, (3) es una proposición interpretada más que una proposición formal; y algunas reglas para su manipulación se toman intuitivamente. Los $T_1, \ldots, T_n$ pueden tratarse como una clase que puede aumentarse, pero no disminuirse. Pero la formalización de estas propiedades no es difícil, aunque tampoco es interesante, pues con las reglas L puede obtenerse una formalización más satisfactoria.

Por esta razón vamos a tomar la proposición (3) de esa manera semiintuitiva. Usaremos también letras góticas como '$\mathfrak{M}$' y '$\mathfrak{B}$' para designar conjuntos de T; y usaremos unas y otras en combinación, de tal modo que, por ejemplo,

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, T_1, T_2$$

designe las T que son T_1, T_2 o están en $\mathfrak{M}$ o $\mathfrak{N}$.

Vamos a formular ahora el sistema que llamaremos $\mathscr{F}_1(\lambda)^T$. La formulación consta de un esquema axiomático llamado (Fp), el cual especifica ciertas proposiciones iniciales (análogas a los axiomas de un sistema formal ordinario); y de dos reglas (Fe) y (Fi) que podemos concebir como reglas de eliminación e introducción (respectivamente) de F. Estos postulados son como sigue:

ESQAX. (Fp). *Si* T *está en* $\mathfrak{M}$, *entonces*

$$\mathfrak{M} \Vdash T.$$

REGLA (Fe). *Si* $\mathfrak{M} \Vdash \mathsf{F}\,\xi\,\eta\,X$,
y $\mathfrak{M} \Vdash \xi\,Y$;
entonces $\mathfrak{M} \Vdash \eta\,(XY)$.

REGLA (Fi). *Si* $\mathfrak{M}, \xi x \Vdash \eta\, \mathfrak{X}$, *y si* x *no se presenta en* $\mathfrak{M}$; *entonces* $\mathfrak{M} \Vdash \mathsf{F}\xi\eta\,(\lambda x\, \mathfrak{X})$.

Damos tres ejemplos de demostración con esta técnica. En estos ejemplos usamos la notación siguiente. Escribimos encima de la línea de guiones todas las premisas utilizadas en cualquier momento de la demostración. A la derecha de cada línea horizontal indicamos la regla que justifica la inferencia. Si la regla es (Fi), escribimos detrás de ella un guión y el número de la premisa que queda cancelada, tras de lo cual cancelamos también su número en la lista de premisas. Se omiten el símbolo '$\vdash$' y algunos paréntesis.

EJEMPLO 1.

$$\cancel{1}.\ \mathsf{F}\beta\gamma x \qquad \cancel{2}.\ \mathsf{F}\,\alpha\beta y \qquad \cancel{3}.\ \alpha z$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{1}{\mathsf{F}\,\beta\gamma x}\,\mathsf{Fp} \qquad \dfrac{\dfrac{2}{\mathsf{F}\,\alpha\beta y}\,\mathsf{Fp} \qquad \dfrac{3}{\alpha z}\,\mathsf{Fp}}{\beta\,(yz)}\,\mathsf{Fe}}{\gamma\,(x(yz))}\,\mathsf{Fe}}{\mathsf{F}\alpha\gamma\,(\lambda z.x(yz))}\,\mathsf{Fi}\text{—}3}{\mathsf{F}\,(\mathsf{F}\alpha\beta)\,(\mathsf{F}\alpha\gamma)\,(\lambda^2 yz.x(yz))}\,\mathsf{Fi}\text{—}2}{\mathsf{F}_2\,(\mathsf{F}\,\beta\gamma)\,(\mathsf{F}\alpha\beta)\,(\mathsf{F}\alpha\gamma)\,(\lambda^3 xyz.x(yz))}\,\mathsf{Fi}\text{—}1$$

EJEMPLO 2.

$$\cancel{1}.\ \mathsf{F}\alpha\,(\mathsf{F}\alpha\beta)x \qquad \cancel{2}.\ \alpha y$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{1}{\mathsf{F}\alpha\,(\mathsf{F}\alpha\beta)\,x}\,\mathsf{Fp} \qquad \dfrac{2}{\alpha y}\,\mathsf{Fp}}{\mathsf{F}\alpha\beta\,(xy)}\,\mathsf{Fe} \qquad \dfrac{2}{\alpha y}\,\mathsf{Fp}}{\beta\,(xyy)}\,\mathsf{Fe}}{\mathsf{F}\alpha\beta\,(\lambda y\,.\,xyy)}\,\mathsf{Fi}\text{—}2}{\mathsf{F}(\mathsf{F}\alpha\,(\mathsf{F}\alpha\beta))\,(\mathsf{F}\alpha\beta)\,(\lambda^2 xy\,.\,xyy)}\,\mathsf{Fi}\text{—}1$$

Aquí la premisa 2 se ha usado dos veces.

EJEMPLO 3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{1}{\alpha x}\,\mathsf{Fp}}{\mathsf{F}\beta\alpha\,(\lambda y.x)}\,\mathsf{Fi{-}2}}{\mathsf{F}\alpha(\mathsf{F}\beta\alpha)(\lambda^2 xy.x)}}{\mathcal{X}.\ \alpha x \qquad\qquad \mathcal{Z}.\ \beta y}$$

En este ejemplo la premisa 2, cancelada en el segundo paso, no había sido usada previamente.

Vamos a investigar ahora las relaciones de $\mathscr{F}_1(\lambda)^T$ con sistemas que hemos considerado ya.

TEOREMA 1. *Sea* $\mathfrak{B}$ *una base cualquiera que no contiene variables* [18] *y sea* $\mathfrak{D}$ *una deducción-F de* $\mathfrak{B}$ *y casos de* $(\mathsf{F}\lambda)$ *a* $\mathfrak{T}$. *Entonces*

$$\mathfrak{B} \parallel\!\!- \ T \tag{4}$$

es válido en $\mathscr{F}_1(\lambda)^T$.

Demostración. Utilizamos una inducción deductiva respecto de $\mathfrak{D}$. Las premisas de $\mathfrak{D}$ están en $\mathfrak{B}$ o bien son casos de $(\mathsf{F}\lambda)$.

Si $\mathfrak{T}$ está en $\mathfrak{B}$, entonces (4) vale por (Fp).

Supongamos que $\mathfrak{T}$ es un caso de $(\mathsf{F}\lambda)$. Entonces existen $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta, \mathfrak{X}$ tales que

$$T \equiv \mathsf{F}_m \xi_1 \ldots \xi_m \eta(\lambda^m x_1 \ldots x_m \,.\, \mathfrak{X}),$$

siendo $\mathfrak{X}$ absolutamente estratificada en base a $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta$. El conjunto de proposiciones $\mathfrak{T}'$ tal que

$$\mathfrak{B}, \xi_1 x_1, \ldots, \xi_m x_m \parallel\!\!- \ T'$$

incluye todos los

$$\vdash \xi_i x_i, \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

por (Fp), y es cerrado respecto de la regla F por la regla (Fe); por tanto,

---

[18] Esta condición se pone sólo para ser explícitos, pues se entiende que las proposiciones de $\mathfrak{B}$ son proposiciones de algún sistema particular de $\mathscr{F}_1$, y $x_1, \ldots, x_m$ son variables respecto de ese sistema.

por la definición de estratificación, tenemos

$$\mathfrak{B}, \xi_1 x_1, \ldots, \xi_m x_m \vdash \eta\, \mathfrak{X}.$$

Como $\mathfrak{B}$ no contiene ninguna de las $x_1, \ldots, x_m$, tenemos (4) por m aplicaciones de la regla (Fi).

Supongamos, por último, que $\mathfrak{T}$ se obtiene de $\mathfrak{T}_1$ y $\mathfrak{T}_2$ por una inferencia-F. Por la hipótesis inductiva tenemos

$$\mathfrak{B} \vdash T_1, \qquad \mathfrak{B} \vdash T_2.$$

Por tanto, por la regla (Fe), tenemos (4), q. e. d.

Vamos a introducir ahora sistemas $\mathscr{F}_1\,(\mathsf{S}, \mathsf{K})^T$ y sistemas análogos basados en varias elecciones de combinadores primitivos. Supondremos que los combinadores primitivos satisfacen las condicciones (I) y (II) del teorema C4, y que $[x]\,\mathfrak{X}$ está definida de tal modo que se aplica el corolario D1.1. Entonces definimos $\mathscr{F}_1\,(\mathsf{S}, \mathsf{K})^T$ modificando la definición de $\mathscr{F}_1(\lambda)^T$ de tal modo que los T_i sean obs de $\mathscr{F}_1\,(\mathsf{S}, \mathsf{K})$ en vez de serlo de $\mathscr{F}_1\,(\lambda)$, y la regla (Fi) vuelve a formularse del modo siguiente:

Si x no se presenta en $\mathfrak{M}$ y

$$\mathfrak{M}, \xi x \vdash \eta \mathfrak{X};$$

entonces

$$\mathfrak{M} \vdash \mathsf{F}\xi\eta\,([x]\,\mathfrak{X}).$$

Como $[x]\,\mathfrak{X}$ es una interpretación [19] de $\lambda x \mathfrak{X}$, tenemos:

TEOREMA 2. *Si* (4) *vale en* $\mathscr{F}_1\,(\lambda)^T$, *entonces*

(5) $\qquad \mathfrak{B}_H \vdash T_H$

vale en $\qquad \mathscr{F}_1\,(\mathsf{S}, \mathsf{K})^T.$

Los teoremas siguientes están formulados para $\mathscr{F}_1\,(\mathsf{S}, \mathsf{K})^T$, pero valen también, evidentemente, para cualquier conjunto de combinadores primitivos que satisfaga las anteriores restricciones.

TEOREMA 3. *Sea $\mathfrak{B}$ una base que satisface las restricciones del teorema* C3. *Sea* (4) *válido en* $\mathscr{F}_1\,(\mathsf{S}, \mathsf{K})^T$. *Entonces hay una deducción-F de la base $\mathfrak{B}$ y casos de los esquemas axiomáticos a $\mathfrak{T}$.*

---

[19] En la formulación de $\mathscr{F}_1\,(\lambda)^T$ no se usa ninguna propiedad de la reducción. Cfr. § 5, págs. 412 y 413.

Demostración. Utilizamos la inducción deductiva de la demostración de (4).

Si (4) es un caso de (Fp), entonces $\mathfrak{T}$ está en $\mathfrak{B}$, y la deducción buscada consta exclusivamente de $\mathfrak{T}$.

Si (4) se obtiene por la regla (Fe), las premisas tienen que ser

$$\mathfrak{B} \parallel\!- \mathsf{F}\xi\eta X, \qquad\qquad \mathfrak{B} \parallel\!- \xi Y,$$

mientras que $T \equiv \eta(XY)$. Por la hipótesis inductiva hay deducciones de $\mathfrak{B}$ a $\vdash \mathsf{F}\xi\eta X$ y a $\vdash \xi Y$. De estas dos deducciones, más una inferencia-F, se obtiene una deducción que termina en $\mathfrak{T}$.

Si (4) se obtiene por la regla (Fi), entonces la premisa tiene que ser

$$\mathfrak{B}, \xi x \parallel\!- \eta\, \mathfrak{X}.$$

Ahora bien: la base $\mathfrak{B}$, ξx satisface las condiciones puestas a $\mathfrak{B}$. Por tanto, por la hipótesis inductiva, $\mathfrak{X}$ es estratificada respecto de $\mathfrak{B}$ en términos de ξ, η. Por el corolario D1.1 tenemos una deducción que termina en $\mathfrak{T}$.

Teorema 4. *Sea* $\mathfrak{B}$ *una base tal que* $\mathfrak{B}_H$ *satisface las restricciones del teorema* C3. *Supongamos que* (4) *vale en* $\mathscr{F}_1(\lambda)^T$. *Entonces hay un* $\mathfrak{T}'$ *tal que* T cnv T' *y* $\mathfrak{T}'$ *es deducible-F a partir de* $\mathfrak{B}$ *y casos de* (Fλ) *en* $\mathscr{F}_1(\lambda)$.

Demostración. Por hipótesis y teorema 2 tenemos (5). Por tanto, por teorema 3 hay una deducción-F a partir de $\mathfrak{B}_H$ y casos de los esquemas axiomáticos a $\mathfrak{T}_H$. Por los teoremas D5, $\mathfrak{T}_{H\lambda}$ es deducible-F de $\mathfrak{B}_{H\lambda}$ e instancias de (Fλ). Por tanto, hay una deducción básica de $\mathfrak{B}$ y (Fλ) a $\mathfrak{T}$. El teorema se sigue entonces por el análogo del teorema C1 para $\mathfrak{F}_1(\lambda)$.

2. Formulación L preliminar

La segunda formulación del álgebra proposicional por Gentzen, la formulación L, difiere de la formulación T en dos puntos principales. Por un lado, el sistema es explícitamente formal, con proposiciones elementales de la forma (3); reglas explícitas permiten la permutación de las T_i, la cancelación de repeticiones, el añadido de otras. Por otro lado, no hay reglas de eliminación; en su lugar aparecen reglas de introducción por la izquierda (las primitivas reglas de introducción son, naturalmente, de introducción por la derecha) elegidas de tal modo que tienen la misma

significación intuitiva. Por ejemplo, la regla de eliminación de la implicación es (esencialmente) el *modus ponens*; éste puede considerarse en la práctica como una regla que dice que, en presencia de $\vdash p$, toda conclusión que puede obtenerse de $\vdash q$ puede obtenerse también de $\vdash p \supset q$, de tal modo que la regla de implicación por la izquierda tiene la forma

$$\frac{\mathfrak{M} \Vdash p \qquad \mathfrak{N}, q \Vdash r}{\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, p \supset q \Vdash r}$$

Gentzen postula ahora la regla «Schnitt»* por medio de la cual pueden llevarse a cabo eliminaciones y establecerse la equivalencia con los sistemas habituales. Luego muestra (en su «Hauptsatz»**) que el «Schnitt» es superfluo, de modo que es, en realidad, un teorema de su sistema y no una regla. Este teorema se llama aquí el teorema de eliminación [20].

Pasamos a formular una teoría análoga para los sistemas $\mathscr{F}_1$. Nuestro sistema, $\mathscr{F}_1(\lambda)^L$, será un sistema $\mathscr{F}_1(\lambda)^T$ modificado en esos mismos dos aspectos. Empezaremos por sentar una formulación provisional aquí para considerar en el artículo siguiente ciertos perfeccionamientos de la misma.

Por lo que hace al primer aspecto, es suficiente con postular las reglas [21].

REGLA (Cl). *Si* $\mathfrak{M}'$ *es una permutación de* $\mathfrak{M}$ *y* $\mathfrak{M} \Vdash T$;

entonces $\mathfrak{M}' \Vdash T$.

REGLA (Wl). *Si* $\mathfrak{M}, T', T' \Vdash T$;

entonces $\mathfrak{M}, T' \Vdash T$.

REGLA (Kl). *Si* $\mathfrak{M} \Vdash T$;

entonces, para todo T', $\mathfrak{M}, T' \Vdash T$.

Por lo que hace al segundo punto, postulamos para la introducción de F por la izquierda la siguiente:

---

* Literalmente: «Corte».—*N. del T.*

** «Teorema principal».—*N. del T.*

[20] Siguiendo el uso de [TFD], cap. II, 7.

[21] En [TFD] puede encontrarse un tratamiento escrupulosamente detallado de este punto.

REGLA (Fl). *Si* $\mathfrak{M} \Vdash \xi X$

y $\mathfrak{N}, \eta y \Vdash \zeta \mathfrak{Z}$,

sin que y se presente en $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$;

entonces $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathsf{F}\xi\eta y \Vdash \zeta \mathfrak{Z}'$,

con $\mathfrak{Z}' \equiv [yX/y]\,\mathfrak{Z}$.

Las demás reglas para $\mathscr{F}_1(\lambda)^L$ se toman sin alteración de la teoría T. Teniendo en cuenta (Kl) es suficiente considerar que la $\mathfrak{M}$ de (Fp) es *T*. La regla (F*i*), usada con la teoría L, se llamará (Fr). Tenemos así:

ESQAX. (Fp). $T \Vdash T$.

REGLA (Fr). *Si x no se presenta en* $\mathfrak{M}$,

y $\mathfrak{M}, \xi x \Vdash \eta\mathfrak{X}$;

entonces $\mathfrak{M} \Vdash \mathsf{F}\,\xi\eta\,(\lambda x \mathfrak{X})$.

La teoría se llamará $F_1(\mathsf{S}, \mathsf{K})^L$ cuando $\lambda x \mathfrak{X}$ de (Fr) se interprete como $[x]\,\mathfrak{X}$, definida a base de S y K, y los obs se tomen respecto de $\mathscr{F}_1(\mathsf{S}, \mathsf{K})^L$ en vez de hacerlo respecto a $\mathscr{F}_1(\lambda)$.

Si interpretamos (3) como significativo de que la conclusión puede obtenerse de las premisas más instancias de los esquemas axiomáticos mediante las reglas F y Eq′, entonces esas reglas son intuitivamente aceptables para la discusión previa. Hasta § 5 no haremos consideraciones exactas sobre este punto.

En § 3g daremos ejemplos de demostraciones en la teoría L.

3. PERFECCIONAMIENTO DE LA FORMULACIÓN L

Aunque la formulación de § 2 caracteriza la formulación L en sus rasgos principales, algunos de sus detalles provocan ulteriores dificultades. En este artículo vamos a discutir el sistema con la intención de obtener una formulación más satisfactoria. Nuestra discusión incluirá convenciones y resultados preliminares que nos serán de utilidad más adelante.

a. Necesitamos, ante todo, ciertas definiciones. Las formularemos con referencia a la formulación de § 2, pero se aplican análogamente a las formulaciones perfeccionadas que siguen.

DEFINICIÓN 1. Llamamos a los T_i de una proposición (3) *constituyentes* de dicha proposición; llamamos *constituyentes de la izquierda* a los

que se encuentran a dicho lado y *constituyente de la derecha* al que se encuentra a la derecha. Los constituyentes de una inferencia o de una deducción serán los de sus varias proposiciones tomados colectivamente. Los constituyentes que pasan sin alteración de las premisas a la conclusión de una inferencia se llaman constituyentes *paramétricos* de la inferencia; se incluyen entre ellos todos los constituyentes de $\mathfrak{M}$ o $\mathfrak{N}$ de 2, el constituyente derecho de (Kl) y (Wl) [22], y todos los constituyentes de (Cl). Se definen del modo siguiente el *constituyente principal* y los *componentes* [23] de una inferencia: para las reglas (Fl) y (Fr) el constituyente principal es el de predicado $F\xi\eta$, mientras que los componentes son los constituyentes de las premisas con los predicados ξ y η; para (Wl) y (Kl) el constituyente principal es la T' de la conclusión, mientras que las dos instancias de T' en la premisa de (Wl) son los componentes, y (Kl) no tiene componente. No se da ningún nombre especial a los constituyentes de (Fl) que tienen predicado ζ [24].

DEFINICIÓN 2. Los x de (Fr) y los y de (Fl) se llamarán *variables características* de las respectivas instancias de (Fr) y (Fl), respectivamente.

b. La mera inspección de las reglas muestra que un nuevo sujeto no puede introducirse por la izquierda más que por (Fp) y (Kl). Además, las únicas reglas que eliminan un sujeto de la izquierda son (Fr) y (Wl); en el caso de (Fr) el sujeto eliminado es una variable que no se presenta de ningún otro modo, mientras que en el caso de (Wl) hay una disminución de multiplicidad más que una verdadera eliminación. Con estas excepciones, los sujetos de la izquierda de la conclusión de una inferencia son los mismos —y con las mismas repeticiones— que los de las premisas tomadas colectivamente.

c. Para el caso especial en el cual un sujeto no es una variable, el § b muestra que si un tal constituyente aparece una vez en la izquierda, por lo menos un caso del mismo permanecerá en el lado izquierdo hasta el final de la demostración. Además, ninguna variable presente en un tal sujeto puede ser una variable característica; por tanto, ni se la puede sustituir con nada ni puede ser una variable ligada. Las variables en tal posición, actúan, pues, como constantes. Puede simplificar problemas, sin suponer ninguna esencial pérdida de generalidad, el excluir la posibilidad de que un sujeto de la izquierda sea complejo y contenga variables. Teniendo en cuenta el § b, ello puede conseguirse mediante

---

[22] Esto se modifica infra, § e.

[23] Este término se introdujo en [TFD]. Cuando pueda haber conflicto de este uso con otros usos del término llamaremos a estos constituyentes *componentes L.*

[24] Cfr. § e, una excepción análoga en algunos casos de (Wl).

restricciones adecuadas en (Fp) y (Kl). Los sujetos constantes introducidos por (Fp) y (Kl) se llamarán *elementos*.

d. Si adoptamos las restricciones del § c tendremos una importante conclusión respecto del sujeto de la derecha. Por inducción deductiva queda claro que este sujeto se forma mediante las operaciones del cálculo λ [25] a partir de las variables y los elementos que se presentan en instancias de (Fp) por encima de él, y que las variables libres y los elementos aparecen como sujetos en la izquierda. Además, aunque una variable puede quedar ligada, no se elimina nunca ningún componente; por tanto, todos éstos se presentarán [26]. Pero, de todos modos, *si prohibimos reducciones en el interior de los elementos, un sujeto de la derecha estará en forma normal-*β. Esto se debe a que las únicas reducciones posibles a la derecha de una instancia de (Fp) son reducciones practicadas en el interior de los elementos; y los constituyentes de la derecha en el curso de una demostración se forman a partir de otros anteriores, o bien mediante la ligadura de una variable, o bien mediante la sustitución de y por yX, y ninguna de estas dos operaciones introduce un nuevo extenso β.

e. Como es natural, las variables pueden cambiarse en ciertas circunstancias; pero la presencia de las restricciones sobre las variables características introduce algunas complicaciones. Para evitarlas vamos a revisar la formulación, de modo que las variables de la izquierda de cualquier proposición sean necesariamente distintas. Esto puede conseguirse modificando (Kl), (Fl) y (Wl); entonces resultan superfluas las restricciones puestas a la variable característica de (Fr). Para (Kl) exigiremos que el sujeto, si es una variable, no se presente en $\mathfrak{M}$; para (Fl), que $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ no tengan variables comunes. Para (Wl) tenemos que permitir identificaciones de variables. Llamaremos *identificables* a dos sujetos si ambos son variables o instancias de una misma constante; y dos proposiciones serán identificables si su predicado es el mismo y sus sujetos son identificables. La nueva (Wl) permitirá entonces que se omita una de las dos proposiciones identificables siempre que el sujeto esté adecuadamente situado a la derecha.

Estas modificaciones no alteran la significación esencial del sistema, pero nos permiten cambiar libremente las variables. Desde un punto de vista práctico usamos, en realidad, una variable diferente para cada

---

[25] Estas operaciones incluyen la aplicación y la abstracción respecto de cualquier variable. En el último caso la variable se considera como parte de la operación, no como parte del argumento; y si la variable no se presenta en ningún otro lugar, no tendrá aplicación la afirmación hecha en el texto. Tales variables son las introducidas por (Kl). (Cfr. nota 26.)

[26] Se sigue de aquí que todo sujeto de la izquierda que no se presente en la derecha tiene que haber sido introducido por (Kl). Cfr. ejemplo 6 en § g.

aplicación de (Fp) o (Kl) si el sujeto no es una constante. Mientras se mantenga esta condición pueden cambiarse sin más restricción las variables.

Con esta modificación (Wl) se convierte en una regla que puede eliminar una variable; además, como puede cambiarse el lado derecho, no lo consideramos paramétrico a menos que X e Y sean constantes.

f. La formulación revisada, con los cambios expuestos y motivados en la anterior discusión, es como sigue:

Esqax. (Fp). *Si X es una variable o una constante y ξ es un ob-*F, *entonces*

$$\xi X \vdash \xi X.$$

Regla (Cl). *Si $\mathfrak{M}'$ es una permutación de $\mathfrak{M}$, y si*

$$\mathfrak{M} \vdash T, \quad \textit{entonces}$$
$$\mathfrak{M}' \vdash T.$$

Regla (Wl). *Si X e Y son identificables*[27], *y si*

$$\mathfrak{M}, \xi X, \xi Y \vdash T, \quad \textit{entonces}$$
$$\mathfrak{M}, \xi X \vdash T',$$

obteniéndose T' de T mediante sustitución de Y por X.

Regla (Kl). *Si X es una constante, o una variable que no sea un sujeto de $\mathfrak{M}$, y si*

$$\mathfrak{M} \vdash T,$$

entonces $\mathfrak{M}, \xi X \vdash T'.$

Regla (Fr). *Si* $\mathfrak{M}, \xi x \vdash \eta \mathfrak{X};$

entonces $\mathfrak{M} \vdash \mathsf{F}\, \xi\eta\, (\lambda\, x\, \mathfrak{X}).$

Regla (Fl). *Si $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ no tienen variables comunes y ninguna contiene a y, y si*

$$\mathfrak{M} \vdash \xi X$$

y

$$\mathfrak{N}, \eta\, y \vdash \mathfrak{z}\, \mathfrak{Z}:$$

entonces $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathsf{F}\xi\eta y \vdash \mathfrak{z}([yX/y]\, \mathfrak{Z}).$

g. Para ilustrar la significación de esas reglas vamos a dar tres

---

[27] Definido en § e.

ejemplos de demostración. Son traducciones de los ejemplos de § 1 a la teoría L.

EJEMPLO 4.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha z \parallel\!- \alpha z \qquad \beta y \parallel\!- \beta y}{\alpha z, F\alpha\beta y \parallel\!- \beta(yz)}\,Fl \qquad \gamma x \parallel\!- \gamma x}{\alpha z, F\alpha\beta y, F\beta\gamma x \parallel\!- \gamma(x(yz))}\,Fl}{F\alpha\beta y, F\beta\gamma x \parallel\!- F\alpha\gamma\,(\lambda z.x(yz))}\,Fr}{F\beta\gamma x \parallel\!- F(F\alpha\beta)\,(F\alpha\gamma)\,(\lambda^2 yz.x(yz))}\,Fr}{\parallel\!- F_2\,(F\beta\gamma)\,(F\alpha\beta)\,(F\alpha\gamma)\,(\lambda^3 xyz.x(yz)).}\,Fr$$

EJEMPLO 5.

$$\dfrac{\dfrac{\alpha z \parallel\!- \alpha z \qquad \dfrac{\alpha y \parallel\!- \alpha y \qquad \beta x \parallel\!- \beta x}{\alpha y, F\alpha\beta x \parallel\!- \beta(xy)}\,Fl}{\alpha y, \alpha z, F\alpha\,(F\alpha\beta)x \parallel\!- \beta(xzy)}\,Fl}{\alpha y, F\alpha\,(F\alpha\beta)x \parallel\!- \beta(xyy)}\,Wl}{F\alpha\,(F\alpha\beta)x \parallel\!- F\alpha\beta\,(\lambda y.(xyy))}\,Fr}{\parallel\!- F(F_2\,\alpha\alpha\beta)\,(F\alpha\beta)\,(\lambda^2 xy.xyy).}\,Fr$$

EJEMPLO 6.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha x \parallel\!- \alpha x}{\alpha x, \beta y \parallel\!- \alpha x}\,Kl}{\alpha x \parallel\!- F\beta\alpha\,(\lambda y.x)}\,Fr}{\parallel\!- F\alpha\,(F\beta\alpha)\,(\lambda^2 xy.x).}\,Fr$$

h. Necesitaremos para algunos fines la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3. Las proposiciones de la forma $\vdash \xi X$, con X constante, que se introducen por (Fp), se llamarán *proposiciones radicales*, y los elementos correspondientes, X, *elementos radicales*.

Veremos más adelante que si no hay sujetos constantes tenemos una formulación de la teoría básica. Si tenemos una demostración fundada en la teoría básica más algunos axiomas, estos axiomas, en la medida en que efectivamente se usen en la demostración, corresponden

a proposiciones radicales; será necesario someterlos a ciertas restricciones. Por otro lado, sujetos constantes introducidos mediante (Kl) corresponden (cfr. § c) a axiomas no usados en la demostración; pueden ser, como es obvio, arbitrarios.

4. El teorema de eliminación

Vamos a demostrar primero este teorema en una forma que no requiere el uso de (Kl) o (Wl) [28].

Teorema 5. *Sean las proposiciones radicales simples-F. Sea*

$$\mathfrak{M}, \xi x \parallel\!- \eta\mathfrak{Y}, \tag{6}$$

$$\mathfrak{N} \parallel\!- \xi X, \tag{7}$$

sin que $\mathfrak{M}$ *y* $\mathfrak{N}$ *tengan variables en común ni contengan* x. *Entonces hay un* $\mathfrak{Y}'$ *tal que*

$$[X/x]\,\mathfrak{Y} \ \mathrm{red}_{\beta}\ \mathfrak{Y}' \ [29] \tag{8}$$

y

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \parallel\!- \eta\,\mathfrak{Y}'. \tag{9}$$

Demostración. Seguimos aquí el plan expuesto en anteriores publicaciones, a las que remitimos al lector por lo que hace a ciertos detalles y a la terminología técnica [30].

Se divide la demostración en tres estadios. En el primero reducimos la situación a los casos en los que (6) se obtiene directamente por una aplicación de la regla (Fl) que introduce la instancia indicada de ξ x; se expone con todo detalle el caso en el cual ξ es simple-F. En el segundo estadio suponemos que ξ es compuesto-F y reducimos todo al caso en el cual (7) se obtiene mediante una aplicación de la regla (Fr). En el tercer estadio demostramos el teorema suponiendo realizadas esas dos reducciones, que ξ es compuesto-F y que el teorema es verdadero en todos los casos en los cuales el ob-F eliminado (es decir, el análogo de ξ) es un

---

[28] La demostración admite la *posibilidad* de que valgan (Wl) y (Kl), pero no requiere la validez de los mismos.

[29] La demostración del teorema mostrará que no son necesarias reducciones en el interior de los elementos. Además, por § 3d, $\mathfrak{Y}'$ está en forma normal respecto de los elementos; es, por tanto, único, salvo acaso por cambios de variables ligadas.

[30] [TFD] II, § 7, y, sobre todo [ETM].

componente-F propio de ξ. Como en el estadio primero se toma ya suficientemente en cuenta el caso en el cual ξ es simple-F, tenemos una inducción sobre el número de casos de F en ξ.

a. *Demostración del estadio* 1. En este estadio suponemos que el teorema es verdadero en el caso de que (6) sea la conclusión de una inferencia-F por la cual se introduce ξx. Esta suposición se llama *hipótesis del estadio* presente.

Sea $\mathfrak{D}$ una deducción, en forma arborescente, de (6), y supongamos que sus proposiciones en orden normal son $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$. Sea $\mathfrak{S}_k$ la proposición

$$\mathfrak{M}_k, \mathfrak{U}_k \parallel\!- \eta_k \mathfrak{Y}_k,$$

con $\mathfrak{M}_k$, $\mathfrak{U}_k$, η_k e $\mathfrak{Y}_k$ definidos inductivamente partiendo de $\mathfrak{S}_n$ y trabajando hacia atrás, del modo siguiente: Para $k = n$, $\mathfrak{S}_k$ es (6), $\mathfrak{M}_k$ es $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{U}_k$ es ξx, η_k es η y $\mathfrak{Y}_k$ es $\mathfrak{Y}$. Si $k < n$, hay una $\mathfrak{S}_m$ única tal que $\mathfrak{S}_k$ se usa como premisa para inferir $\mathfrak{S}_m$ mediante una regla $\mathfrak{R}_m$. Ponemos en $\mathfrak{U}_k$ todos los constituyentes de $\mathfrak{S}_K$ que sean paramétricos y correspondan a constituyentes de $\mathfrak{U}_m$; análogamente, si $\mathfrak{R}_m$ es Wl y el constituyente principal está en $\mathfrak{U}_m$, ponemos los componentes en $\mathfrak{U}_k$; todos los demás constituyentes de la izquierda de $\mathfrak{S}_k$ se ponen en $\mathfrak{M}_k$. Mediante estas convenciones quedan unívocamente definidos para todo k $\mathfrak{M}_k$, $\mathfrak{U}_k$, y, naturalmente, también η_k y $\mathfrak{Y}_k$. Observaremos que todos los constituyentes de $\mathfrak{U}_k$ son identificables con ξx; además, si $\mathfrak{U}_m$ es vacío, entonces $\mathfrak{U}_k$ es vacío para todo $\mathfrak{S}_k$ por encima de $\mathfrak{S}_m$.

Por § 3e podemos exigir que ninguna variable que se presente, libre o ligada, en la demostración de (6) se presente también en la de (7) [31]. Sean $x_1, \ldots, x_p$ las variables que se presentan en (todos) los $\mathfrak{U}_k$, y sean $z_1, \ldots, z_q$ las variables presentes en $\mathfrak{N}$. Asociamos a cada x_i un conjunto de variables $z_1^{(i)}, \ldots, z_q^{(i)}$ tal que las variables $z_j^{(i)}$ son todas distintas entre sí y de las demás variables ya presentes. Sea $\mathfrak{N}_i$, X_i el resultado de la sustitución de $z_1, \ldots, z_q$ por el i-ésimo conjunto de variables, y supongamos que $\mathfrak{Y}_k''$ se obtiene sustituyendo x_i por X_i (para todo i tal que ξx_i esté en $\mathfrak{U}_k$) en $\mathfrak{Y}_k$.

Estipulemos ahora que $\mathfrak{S}_k'$ es una proposición

$$\mathfrak{M}_k, \mathfrak{U}_k' \parallel\!- \eta_k \mathfrak{Y}_k'$$

en la cual $\mathfrak{M}_k$ y η_k son los mismos que en $\mathfrak{S}_k$, $\mathfrak{U}_k'$ se obtiene poniendo

---

[31] Esto puede requerir cambios de las variables ligadas. Adoptamos el punto de vista de que tales cambios no deben considerarse esenciales. Si se desea pueden tomarse en cuenta en (10).

$\mathfrak{N}_i$ por ξx_i (para todo ξx_i que se presente) en $\mathfrak{U}_k$, e $\mathfrak{Y}_k'$ es tal que

$$\mathfrak{Y}_k'' \text{ red}_\beta \mathfrak{Y}_k'. \tag{10}$$

Nuestro objetivo consiste en mostrar que $\mathfrak{S}_k'$ es válida para todo k suponiendo la hipótesis del estadio, siempre que $\mathfrak{Y}_k'$ esté adecuadamente determinado. La demostración es una inducción deductiva sobre $\mathfrak{D}$. Distinguimos los casos siguientes:

Caso a. $\mathfrak{U}_k$ es vacío. Entonces $\mathfrak{U}_k'$ es vacío y ninguna x_i de $\mathfrak{U}_k$ se presenta en $\mathfrak{Y}_k$; $\mathfrak{Y}_k''$ es el mismo $\mathfrak{Y}_k$. Suponemos que $\mathfrak{Y}_k'$ es $\mathfrak{Y}_k$. Entonces $\mathfrak{S}_k'$ es $\mathfrak{S}_k$, la cual es válida, puesto que está en $\mathfrak{D}$.

Caso b. $\mathfrak{S}_k$ es prima (es decir, es un caso de (Fp)). Si el constituyente de la izquierda no es el único miembro de $\mathfrak{U}_k$, tenemos el caso a. En otro caso, $\mathfrak{S}_k$ es

$$\xi x_i \quad \|- \quad \xi x_i.$$

Sea $\mathfrak{Y}_k'$ ξX_i. Entonces $\mathfrak{S}_k'$ es

$$\mathfrak{N}_i \|- \xi X_i,$$

lo cual es válido, puesto que se obtiene de (7) por un mero cambio de variables.

Caso c. $\mathfrak{S}_k$ se obtiene mediante una regla $\mathfrak{R}_k$ a partir de $\mathfrak{S}_i$ (y $\mathfrak{S}_j$) siendo $\mathfrak{S}_i'$ (y $\mathfrak{S}_j'$) válidas. Dintinguimos los subcasos siguientes:

(c 1) $\mathfrak{R}_k$ es una regla Cl, Kl o Wl cuyo constituyente principal, si lo hay, está en $\mathfrak{M}_k$. Consideramos entonces que $\mathfrak{Y}_k'$ es el mismo $\mathfrak{Y}_i'$ [32], o, en el caso Wl, lo suponemos determinado mediante el mismo cambio de variables de $\mathfrak{Y}_i'$ que convirtió a $\mathfrak{Y}_i$ en $\mathfrak{Y}_k$. Entonces $\mathfrak{Y}_k'$ satisface a (10) y $\mathfrak{S}_k'$ se obtiene de $\mathfrak{S}_i'$ mediante $\mathfrak{R}_k$.

(c 2) $\mathfrak{R}_k$ es una regla (Kl) o (Wl) cuyo constituyente principal está en $\mathfrak{U}_k$. Sea ξx_i el constituyente principal y, en el caso de (Wl), supongamos que los componentes son ξx_i y ξx_j. En el caso de (Kl) supongamos $\mathfrak{Y}_k' \equiv \mathfrak{Y}_i'$; en el caso de (Wl) supongamos que $\mathfrak{Y}_k'$ se obtiene de $\mathfrak{Y}_i'$ sustituyendo a cada variable del j-ésimo conjunto de z la variable correspondiente del i-ésimo conjunto. Entonces $\mathfrak{Y}_k'$ satisface a (10) y $\mathfrak{S}_i'$ se convierte en $\mathfrak{S}_k'$ mediante una serie de aplicaciones (una para cada variable constituyente de $\mathfrak{N}$) de la misma regla.

(c 3) $\mathfrak{R}_k$ es (Fr). Por definición de $\mathfrak{U}_i$, el componente tiene que

---

[32] No hay más que una premisa para una tal $\mathfrak{R}_k$.

estar en $\mathfrak{M}_i$. Entonces la inferencia tiene que ser

$$\frac{\mathfrak{M}_k,\ \zeta u,\ \mathfrak{U}_i \parallel\!\!- \ \eta_i \mathfrak{Y}_i}{\mathfrak{M}_k,\ \mathfrak{U}_i \parallel\!\!- \ \mathsf{F}\zeta\eta_i\,(\lambda u \mathfrak{Y}_i).}$$

Así, pues, $\eta_k \equiv \mathsf{F}\zeta\eta_i$, $\mathfrak{Y}_k \equiv \lambda u\, \mathfrak{Y}_i$. Tomamos $\mathfrak{Y}_k' \equiv \lambda u\, \mathfrak{Y}_i'$. Entonces, como $\mathfrak{Y}_k'' \equiv \lambda u\, \mathfrak{Y}_i''$ red_β $\lambda u\, \mathfrak{Y}_i' \equiv \mathfrak{Y}_k'$, queda satisfecha (10) [33]. Podemos obtener $\mathfrak{S}_k'$ a partir de $\mathfrak{S}_i'$ mediante $\mathfrak{R}_k$, con $\mathfrak{U}_i'$ en lugar de $\mathfrak{U}_i$ e $\mathfrak{Y}_i'$ en el de $\mathfrak{Y}_i$.

(c 4) $\mathfrak{R}_k$ es (Fl) con el constituyente principal en $\mathfrak{M}_k$. Entonces la inferencia tiene que ser

$$\frac{\mathfrak{M}_i,\ \mathfrak{U}_i \parallel\!\!- \ \eta_i\ \mathfrak{Y}_i \qquad \mathfrak{M}_j',\ \zeta u,\ \mathfrak{U}_j \parallel\!\!- \ \eta_j\ \mathfrak{Y}_j}{\mathfrak{M}_i,\ \mathfrak{M}_j',\ \mathsf{F}\eta_i\zeta u,\ \mathfrak{U}_i,\ \mathfrak{U}_j \parallel\!\!- \ \eta_j([u\mathfrak{Y}_i/u]\ \mathfrak{Y}_j).}$$

Aquí ζu está en $\mathfrak{M}_j$ y $\mathfrak{M}_j'$ es el resto de $\mathfrak{M}_j$. Tenemos, pues, $\eta_k \equiv \eta_j$, $\mathfrak{Y}_k \equiv [u\ \mathfrak{Y}_i/u]\ \mathfrak{Y}_j$. Sea $\mathfrak{Y}_k' \equiv [u\ \mathfrak{Y}_i'/u]\ \mathfrak{Y}_j'$. Entonces, puesto que $\mathfrak{Y}_k'' \equiv [u\mathfrak{Y}_i''/u]\ \mathfrak{Y}_j''$ red_β $[u\ \mathfrak{Y}_i'/u]\ \mathfrak{Y}_j' \equiv \mathfrak{Y}_k'$, tenemos (10). Por la misma (Fl), excepto en que $\mathfrak{U}_i$, $\mathfrak{U}_j$, $\mathfrak{Y}_i$, $\mathfrak{Y}_j$ quedan sustituidos, respectivamente por $\mathfrak{U}_i'$, $\mathfrak{U}_j'$, $\mathfrak{Y}_i'$, $\mathfrak{Y}_j'$, tenemos $\mathfrak{S}_k'$ a partir de $\mathfrak{S}_i'$ y $\mathfrak{S}_j'$.

(c 5) $\mathfrak{R}_k$ es (Fl) y el constituyente principal es ξx_h, que está en $\mathfrak{U}_k$. Entonces tendremos $\xi \equiv \mathsf{F}\eta_i\ \zeta$ y la inferencia tiene que ser

$$\frac{\mathfrak{M}_i,\ \mathfrak{U}_i \parallel\!\!- \ \eta_i\ \mathfrak{Y}_i \qquad \mathfrak{M}_j',\ \zeta x_h,\ \mathfrak{U}_j \parallel\!\!- \ \eta_j\ \mathfrak{Y}_j}{\mathfrak{M}_i,\ \mathfrak{M}_j',\ \mathfrak{U}_i,\ \mathfrak{U}_j,\ \mathsf{F}\eta_i\zeta x_h \parallel\!\!- \ \eta_j\,([x_h\mathfrak{Y}_i/x_h]\ \mathfrak{Y}_j).}$$

Aquí ζx_h está en $\mathfrak{M}_j$ y $\mathfrak{M}_j'$ es el resto de $\mathfrak{M}_j$; por tanto, $\eta_k \equiv \eta_j$, $\mathfrak{Y}_k \equiv [x_h\mathfrak{Y}_i/x_h]\ \mathfrak{Y}_j$.
Sea

$$\mathfrak{B} \equiv [x_h\mathfrak{Y}_i'/x_h]\ \mathfrak{Y}_j'.$$

Entonces, por la misma (Fl) con $\mathfrak{U}_i'$, $\mathfrak{U}_j'$, $\mathfrak{Y}_i'$, $\mathfrak{Y}_j'$, puestos, respectivamente, por $\mathfrak{U}_i$, $\mathfrak{U}_j$, $\mathfrak{Y}_i$, $\mathfrak{Y}_j$, podemos inferir de $\mathfrak{S}_i'$ y $\mathfrak{S}_j'$ que

$$\mathfrak{M}_i,\ \mathfrak{M}_j',\ \mathfrak{U}_i',\ \mathfrak{U}_j',\ \mathsf{F}\eta_i\ \zeta x_h \parallel\!\!- \ \eta_j\ \mathfrak{B}.$$

---

[33] Obsérvese el uso del principio (ξ) para la reducción.

Por otro lado, cambiando las variables de (7), tenemos

$$\mathfrak{N}_h \parallel\!\!- \mathsf{F}\eta_i\, \mathfrak{Z}\, X_h.$$

De esas dos últimas proposiciones y la hipótesis del estadio tenemos

$$\mathfrak{M}_k,\ \mathfrak{U}_k' \parallel\!\!- \eta_j\, \mathfrak{B}', \tag{11}$$

siendo $\mathfrak{B}'$ tal que

$$[X_h/x_h]\ \mathfrak{B} \equiv [X_h\ \mathfrak{Y}_i'/x_h]\ \mathfrak{Y}_j' \operatorname{red}_\beta \mathfrak{B}'.$$

Ahora bien, $\mathfrak{Y}_k'' \equiv [X_h/x_h]\ [x_h\ \mathfrak{Y}_i''/x_h]\ \mathfrak{Y}_j''$

$$\equiv [X_h\ \mathfrak{Y}_i''/x_h]\ \mathfrak{Y}_j''\ \operatorname{red}_\beta [X_h\ \mathfrak{Y}_i'/x_h]\ \mathfrak{Y}_j'\ \operatorname{red}_\beta \mathfrak{B}'.$$

Por tanto, si tomamos $\mathfrak{B}'$ por $\mathfrak{Y}_k'$ (10) queda satisfecha y (11) es $\mathfrak{S}_k'$.

Esto completa la demostración del estadio 1. Como el caso (c 5) no puede presentarse si ξ es simple,-F el teorema queda demostrado para un tal ξ.

b. *Demostración del estadio* 2. En este estadio suponemos que ξ es compuesto. La hipótesis de este estadio es que el teorema vale si (7) se obtiene directamente por (Fr).

Sea $\mathfrak{D}$ una deducción de (7) en forma arborescente, y supongamos que sus proposiciones son $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n$. Consideraremos sólo el $\mathfrak{S}_k$ para el cual el predicado del constituyente de la derecha es ξ. En un caso así sea $\mathfrak{S}_k$

$$\mathfrak{N}_k \parallel\!\!- \xi\, X_k, \tag{12}$$

en la cual '$\mathfrak{N}_k$' y 'X_k' no tienen ya, como es natural, las significaciones que les asignamos en el estadio 1. Por § 3b todas las variables de $\mathfrak{N}_k$ están en $\mathfrak{N}$ o están ligadas en X; por § 3e podemos conseguir que ninguna de éstas se presente en (6) ni libre ni ligada.

Sea entonces $\mathfrak{S}_k'$

$$\mathfrak{M},\ \mathfrak{N}_k \parallel\!\!- \eta\ \mathfrak{Y}_k',$$

con $\mathfrak{Y}_k'$ tal que (10) vale para $\mathfrak{Y}_k'' \equiv\ ]X_k/x]\ \mathfrak{Y}$. Tenemos entonces que mostrar por una inducción deductiva sobre la parte relevante de $\mathfrak{D}$ que si $\mathfrak{S}_k$ es de la forma (12), puede formarse un $\mathfrak{Y}_k'$ que satisfaga (10) de tal modo que $\mathfrak{S}_k'$ sea válida. Distinguimos casos como sigue:

---

[34] Este es el único lugar en el cual usamos la hipótesis de que las proposiciones radicales son simples-F.

Caso a. $\mathfrak{S}_k$ es prima. Como ξ no es F-simple [34], X_k no es un elemento radical. Por tanto, $\mathfrak{S}_k$ es

$$\xi z \parallel\!\!- \xi z,$$

Supongamos que $\mathfrak{Y}_k'$ es $[z/x]\ \mathfrak{Y}$. Entonces $\mathfrak{S}_k'$ puede obtenerse de (6) mediante cambio de variable.

Caso b. $\mathfrak{S}_k$ se ha derivado mediante (Fr). Entonces la conclusión deseada se sigue por la hipótesis del estadio.

Caso c. $\mathfrak{S}_k$ se deriva mediante una de las reglas de la izquierda a partir de la(s) premisa(s) cuyas transformaciones se saben ya válidas. Llamamos $\mathfrak{R}_k$ a la regla y distinguimos los siguientes subcasos:

(c 1) Si $\mathfrak{R}_k$ es (Cl) o (Kl), entonces $X_k \equiv X_i$. Si tomamos $\mathfrak{Y}_k' \equiv \mathfrak{Y}_i'$, entonces $\mathfrak{S}_k'$ se seguirá de $\mathfrak{S}_i'$ por la misma regla.

(c 2) Si $\mathfrak{R}_k$ es (Wl), entonces X_k se obtiene de X_i mediante la identificación de dos sujetos de $\mathfrak{R}_i$. Supongamos que $\mathfrak{Y}_k'$ es lo que se obtiene al identificar los mismos dos sujetos de $\mathfrak{Y}_i'$. Entonces vale (10), y $\mathfrak{S}_k'$ puede obtenerse de $\mathfrak{S}_i'$ mediante $\mathfrak{R}_k$.

(c 3) Si $\mathfrak{R}_k$ es (Fl), supongamos que la inferencia es

$$\frac{\mathfrak{R}_i \parallel\!\!- \rho Z \qquad\qquad \mathfrak{R}_j', \sigma z \parallel\!\!- \xi X_j}{\mathfrak{R}_i, \mathfrak{R}_j', \mathsf{F}\rho\sigma z \parallel\!\!- \xi([zZ/z]\ X_j).}$$

Aquí σz está en $\mathfrak{R}_j$ y $\mathfrak{R}_i'$ es el resto de $\mathfrak{R}_j$; por tanto, $X_k \equiv [zZ/z]X_j$. De aquí

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y}_j'' &\equiv [X_j/x]\ \mathfrak{Y}, \\ \mathfrak{Y}_k'' &\equiv [X_k/x]\ \mathfrak{Y} \equiv [zZ/z]\ [X_j/x]\ \mathfrak{Y} \\ &\equiv [zZ/z]\ \mathfrak{Y}_j''\ \mathrm{red}_\beta\ [zZ/z]\ \mathfrak{Y}_j'. \end{aligned}$$

Por tanto, si tomamos $\mathfrak{Y}_k' \equiv [zZ/z]\ \mathfrak{Y}_j'$, tenemos (10). La inferencia

$$\frac{\mathfrak{R}_i \parallel\!\!- \rho Z \qquad\qquad \mathfrak{M}, \mathfrak{R}_j, \sigma Z \parallel\!\!- \eta \mathfrak{Y}_j'}{\mathfrak{M}, \mathfrak{R}_i, \mathfrak{R}_j', \mathsf{F}\rho\sigma z \parallel\!\!- \eta\ \mathfrak{Y}_k'}$$

deriva $\mathfrak{S}_k'$ de $\mathfrak{S}_i$ y $\mathfrak{S}_j$'.

Esto completa la demostración del estadio 2.

c. *Demostración del estadio* 3. En este estadio ponemos $\xi \equiv \mathsf{F}\rho\sigma$ y suponemos que el teorema es verdadero si ρ o σ están subrogando a ξ. Suponemos, además, que (6) se ha derivado mediante (Fl) a partir de las premisas

(13) $$\mathfrak{M}_1 \Vdash \rho Y,$$

(14) $$\mathfrak{M}_2, \sigma x \Vdash \eta \mathfrak{Z},$$

con $\mathfrak{Y} \equiv [xY/x]\,\mathfrak{Z}$; y también que (7) se obtiene mediante (Fr) de la premisa

(15) $$\mathfrak{N}, \rho z \Vdash \sigma \mathfrak{X},$$

con $X \equiv \lambda z \mathfrak{X}$. Aquí $\mathfrak{M}_1$ y $\mathfrak{M}_2$ no tienen variables comunes, y x no se presenta en $\mathfrak{M}_1$ o $\mathfrak{M}_2$ o $\mathfrak{N}$; podemos suponer que z no es x y no se presenta en $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$.

De (13), (15) y la hipótesis inductiva conseguimos

$$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N} \Vdash \sigma \mathfrak{X}', \quad \text{con} \quad [Y/z]\,\mathfrak{X} \operatorname{red}_\beta \mathfrak{X}'.$$

Aplicando (14) y la hipótesis inductiva,

$$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{N} \Vdash \eta \mathfrak{Y}', \quad \text{con} \quad [\mathfrak{X}'/x]\,\mathfrak{Z} \operatorname{red}_\beta \mathfrak{Y}'.$$

Aquí tenemos (9). Por otro lado, puesto que

$$XY \equiv (\lambda z \mathfrak{X}) Y \operatorname{red}_\beta [Y/z]\,\mathfrak{X} \operatorname{red}_\beta \mathfrak{X}',$$

tenemos

$$\begin{aligned} [X/x]\,\mathfrak{Y} &\equiv [X/x]\,[xY/x]\,\mathfrak{Z} \\ &\equiv [XY/x]\,\mathfrak{Z} \\ &\operatorname{red}_\beta [\mathfrak{X}'/x]\,\mathfrak{Z} \operatorname{red}_\beta \mathfrak{Y}'. \end{aligned}$$

Por tanto, también (8) vale.

Esto completa la demostración del teorema 5.

COROLARIO 5.1 *Sean simples-F las proposiciones radicales y supongamos que* $\mathfrak{M}$ *y* $\mathfrak{N}$ *no tienen variables comunes. Sea*

$$\mathfrak{M} \Vdash \mathsf{F}\xi\eta X,$$
$$\mathfrak{N} \Vdash \xi Y.$$

Entonces hay un Z *tal que* $XY \operatorname{red}_\beta Z$ *y*

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \Vdash \eta Z.$$

Demostración. Sean x e y variables que no se presentan en $\mathfrak{M}$ o $\mathfrak{N}$. A partir de las proposiciones primas

$$\xi y \Vdash \xi y, \qquad \eta x \Vdash \eta x,$$

inferimos por (Fl)

$$\xi y, F\xi\eta x \parallel\!- \eta(xy).$$

Por el teorema 5 y la segunda hipótesis, tenemos, para un Y' tal que Y red_β Y' [35],

$$\mathfrak{N}, F\xi\eta\, x \parallel\!- \eta(xY').$$

Por el teorema 5 y la primera hipótesis tenemos el corolario.

Mediante el uso de (Wl) podemos tener en cuenta el caso de que haya solapamiento entre $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$. En el teorema siguiente tratamos el caso de que $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ sean idénticas; todo tipo de solapamiento puede tratarse análogamente sin usar (Kl); si está presente (Kl), el caso más general puede reducirse al teorema 6.

TEOREMA 6. *Sean simples-F las proposiciones radicales, y supongamos que*

$$\mathfrak{M}, \xi\, x \parallel\!- \eta\mathfrak{Y},$$
$$\mathfrak{M} \parallel\!- \xi X.$$

Entonces

$$\mathfrak{M} \parallel\!- \eta\mathfrak{Y}',$$

siendo $\mathfrak{Y}'$ *tal que* $[X/x]\ \mathfrak{Y}\ \text{red}_\beta\ \mathfrak{Y}'$.

Demostración. Sean $y_1, \ldots, y_n$ las variables de $\mathfrak{M}$, y sean $z_1, \ldots, z_n$ variables distintas de $x, y_1, \ldots, y_n$. Supongamos que $\mathfrak{M}'$, X' se obtienen a partir de $\mathfrak{M}$, X, respectivamente, mediante sustitución de las y por las z. Entonces, por el teorema 5,

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{M}' \parallel\!- \eta\ \mathfrak{Y}',$$

con

$$[X'/x]\ \mathfrak{Y}\ \text{red}_\beta\ \mathfrak{Y}'.$$

Ahora podemos identificar las z con las y por (Wl).

COROLARIO 6.1. *Si las proposiciones radicales son simples-F y*

$$\mathfrak{M} \parallel\!- F\xi\eta X,$$
$$\mathfrak{M} \parallel\!- \xi Y;$$

entonces hay un Z *tal que* XY red_β Z *y*

$$\mathfrak{M} \parallel\!- \eta Z.$$

---

[35] En realidad, Y' difiere de Y a lo sumo por cambios de las variables ligadas. Cfr. nota 29.

5. Relaciones entre los sistemas

Tenemos ya tantos sistemas que será conveniente adoptar una notación sistemática antes de seguir estudiando sus interrelaciones.

Usaremos la notación (3) en tres sentidos distintos, que llamaremos, respectivamente, sentidos A, T y L. Dada una teoría logística axiomática de $\mathscr{F}_1$, definimos la significación de (3) en sentido A leyendo que T_0 es deducible-F a partir de T_1, T_2, ..., T_n y casos de los esquemas axiomáticos de dicha teoría. En los sentidos T y L definimos (3) indicando que significa lo mismo en las formulaciones T y L, respectivamente. Cuando es necesario distinguimos estos tres sentidos añadiendo índices a '$\vdash$' [36]. Usaremos también '$\mathfrak{S}$' para indicar una proposición sin especificar de la forma (3), y también afectaremos índices para distinguir sentidos; además, si $\mathfrak{S}$ es una proposición de esa naturaleza, '$\mathfrak{S}_q$' denotará una proposición que difiere de $\mathfrak{S}$ en que T_0 está sustituido por un T_0' tal que $T_0 = T_0'$.

Además de distinguir entre esos tres sentidos, tenemos que distinguir también entre tipos de la formulación subyacente. Una teoría en la cual los obs sean obs-λ y la abstracción funcional sea una operación primitiva (indicada por prefijos del tipo 'λx') se llamará una teoría-λ; una teoría basada en combinadores primitivos y en la cual la abstracción funcional (indicada mediante prefijos del tipo '$[x]$') sea una operación definida, se llamará una teoría-H. Usamos los índices 'λ' y 'H' para distinguir esos dos tipos; cuando se usen con otros que indiquen el sentido, estos últimos se escribirán primero. Las mismas letras se usarán como subíndices para indicar transformaciones como en § 6E [37]; cuando haya más de una tal transformación se ejecutarán de izquierda a derecha. Cuando se hable de una teoría-H y de una teoría-λ en el mismo contexto, se supondrá que están sujetas a las restricciones correspondientes, es decir, si falta K en la teoría-H, las $\mathfrak{X}$ de $\lambda x\mathfrak{X}$ tienen que contener a x; si falta W, x tiene que presentarse en $\mathfrak{X}$ una vez como máximo, etc. Se supondrá que los combinadores primitivos satisfacen las condiciones (I) y (II) teorema C4, y que $[x]\mathfrak{X}$ está definida de tal modo que se aplique el corolario D1.1.

En esta notación los resultados antes establecidos son:

---

[36] Así, pues, $\vdash_A$ es lo mismo que el $\vdash'$ de (1) y (2).

[37] La 'q' del párrafo anterior indica también una transformación de tipo análogo.

(16) $\mathfrak{S}^{AH} \rightarrow \mathfrak{S}_{\lambda}{}^{A\lambda}$ (teorema D 5),

(17) $\mathfrak{S}^{A\lambda} \rightarrow \mathfrak{S}_{H}{}^{AH}$ (teorema D 6),

(18) $\mathfrak{S}^{A\lambda} \rightarrow \mathfrak{S}^{T\lambda}$ (teorema 1),

(19) $\mathfrak{S}^{T\lambda} \rightarrow \mathfrak{S}_{H}{}^{TH}$ (teorema 2),

(20) $\mathfrak{S}^{TH} \rightarrow \mathfrak{S}^{AH}$ (teorema 3).

El resultado del teorema 4, que es una combinación de los teoremas 2, 3, y D5, puede escribirse así:

(21) $$\mathfrak{S}^{T\lambda} \rightarrow \mathfrak{S}_{H\lambda}{}^{A\lambda} \rightarrow \mathfrak{S}_{q}{}^{A\lambda}.$$

Las relaciones (17) y (19) son casos especiales de

(22) $$\mathfrak{S}^{\lambda} \rightarrow \mathfrak{S}_{H}{}^{H}.$$

En § 6E se mostró que $[x]\ \mathfrak{X}$ es una interpretación admisible de $\lambda x \mathfrak{X}$ por lo que hace a la relación cnv. Lo mismo puede afirmarse, por virtud de § 6F1, si red se interpreta en el sentido de la reducción fuerte ($>-$); pero no será, en cambio, verdadero si red se interpreta como reducción débil ($\geq$), puesto que esta última no tiene la propiedad (ξ) (§ 6E 5b). Además, (Fλ) se convierte por la transformación en un epiteorema demostrable de la teoría-H. Valdrá, por tanto (22), y las propiedades consideradas en la teoría-λ pasarán a la teoría-H correspondiente mientras se trate sólo de relaciones de igualdad o si la reducción se toma como reducción fuerte.

Pasamos ahora a discutir las relaciones de $\mathfrak{S}^{L}$ con $\mathfrak{S}^{T}$. Mostraremos (teorema 7) que

$$\mathfrak{S}^{L\lambda} \rightarrow \mathfrak{S}_{q}{}^{T\lambda}.$$

Pero la recíproca,

$$\mathfrak{S}^{T\lambda} \rightarrow \mathfrak{S}_{q}{}^{L\lambda},$$

se establece (teorema 8) sólo restringida a una base normal (definición 4).

TEOREMA 7. $$\mathfrak{S}^{L\lambda} \rightarrow \mathfrak{S}_{q}{}^{T\lambda}.$$

Demostración. *Sea* $\mathfrak{S}$

$$\mathfrak{M} \parallel\!\!-^{L} \xi X.$$

Demostraremos por inducción deductiva sobre la demostración de $\mathfrak{S}$

que hay un X' tal que $\mathfrak{S}'$, o sea,

$$\mathfrak{M} \parallel\!\!-^{T} \xi X' \text{ [38]},$$

vale, y

$$X' \operatorname{red}_{\beta} X. \tag{23}$$

Si $\mathfrak{S}$ es prima (es decir, si es un caso de (Fp)), entonces $\mathfrak{S}$ es también prima en la teoría-T. Por tanto, podemos tomar $X' \equiv X$.

Si $\mathfrak{S}$ se obtiene por (Kl) o (Cl), o por (Wl) en el caso de que los dos sujetos identificados sean constantes, entonces ξX es el mismo de la premisa. Por tanto, el X', que existe por la hipótesis de inducción para la premisa, será adecuado también para la conclusión.

Si $\mathfrak{S}$ se obtiene por una aplicación de Wl que identifique dos variables, entonces X se obtiene mediante la identificación de dos variables en el sujeto, Y, del constituyente derecho de la premisa. Supongamos que Y' está asociado a Y como se dice en nuestra tesis. Entonces obtenemos X' mediante una identificación de las mismas dos variables de Y'.

Si $\mathfrak{S}$ se obtiene mediante (Fr), la inferencia tiene que ser

$$\frac{\mathfrak{M}, \xi x \parallel\!\!-^{L} \eta\, \mathfrak{X}}{\mathfrak{M} \parallel\!\!- \mathsf{F}\xi\eta(\lambda x \mathfrak{X}).}$$

Supongamos que $\mathfrak{X}'$ está asociado con $\mathfrak{X}$ como en nuestra tesis. Entonces, puesto que x no está en $\mathfrak{M}$, la deducción

$$\frac{\dfrac{\mathfrak{M},\ \mathcal{X}.\ \xi x}{\eta \mathfrak{X}'}}{\mathsf{F}\xi\eta(\lambda x\, \mathfrak{X}')}\ \mathsf{Fi—1}$$

es válida en la teoría-T, con (Fi) que cancela la premisa ξx. Si tomamos $X' \equiv \lambda x\, \mathfrak{X}$,' (23) vale por la propiedad (ξ) para la reducción-λ.

Si $\mathfrak{S}$ se obtiene mediante (Fl), supongamos que la inferencia es

$$\frac{\mathfrak{M} \parallel\!\!- \xi X \quad \mathfrak{N}, \eta y \parallel\!\!- \zeta \mathcal{Y}}{\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathsf{F}\xi\eta y \parallel\!\!- \zeta \mathcal{Z},}$$

[38] En la teoría-T las repeticiones en $\mathfrak{M}$ no tienen especial significación. La $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{S}'$ se refiere al conjunto de proposiciones de $\mathfrak{M}$ sin tener en cuenta orden ni multiplicidad. No hemos creído necesario el indicarlo mediante una notación *ad hoc*.

con $\mathfrak{Z} \equiv [yX/y]\ \mathfrak{Y}$. Por la hipótesis inductiva existen un X' y un $\mathfrak{Y}'$ tales que X' red_β X, $\mathfrak{Y}'$ red_β $\mathfrak{Y}$, y

$$\mathfrak{M} \Vdash^T \xi X', \qquad \mathfrak{N}, \eta y \Vdash^T \zeta \mathfrak{Y}'.$$

Entonces la deducción siguiente es válida en la teoría-T:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{N}.\ X\ \eta y}{\zeta\ \mathfrak{Y}'}}{F\eta\zeta\ (\lambda y\ \mathfrak{Y}')}\ \text{Fi—1} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{M}}{F\xi\eta\ y} \qquad \dfrac{}{\xi\ X'}}{\eta(yX')}\ \text{Fe}}{\zeta(\ (\lambda y \mathfrak{Y}')\ (yX')\ ).}\ \text{Fe}$$

Esta argumentación establece $\mathfrak{S}'$ siempre que

$$\mathfrak{Z}' \equiv (\lambda y\ \mathfrak{Y}')\ (yX').$$

Es claro ahora que también vale el análogo de (23).

Esto completa la demostración del teorema 7.

Antes de tratar el teorema recíproco es necesario considerar unas pocas cuestiones preliminares. Recordaremos que la proposición

(24) $$\mathfrak{M} \Vdash^T T$$

significa que hay un esquema arborescente que termina en $\mathfrak{T}$ y cuyas premisas sin cancelar están incluidas en $\mathfrak{M}$. Aquí $\mathfrak{M}$ es una clase finita de premisas; no tienen significación especial las repeticiones de elementos de $\mathfrak{M}$; pero una premisa puede usarse en la demostración todas las veces que se desee. Evidentemente, podemos omitir de $\mathfrak{M}$ cualesquiera premisas que no se necesiten, efectivamente, para la demostración de $\mathfrak{T}$. Con ello no se afecta a la validez de la proposición (24).

Vamos a modificar ahora las reglas T en el sentido de exigir que no pueda usarse más de una premisa cuyo objeto sea una variable dada. Para recoger los casos en los que sin esa prohibición usaríamos varias veces una tal premisa vamos a introducir el mismo predicado con variables diferentes en cada caso, permitiendo luego la identificación de las variables mediante la regla siguiente:

Regla (We) *Si* $\xi x\ y\ \xi y$ *aparecen ambos como premisas por encima de* T, *podemos escribir* $[x/y]T$ *por debajo de* T *y cancelar la premisa* ξy.

La introducción de (We) no afecta a la sustancia de las demostraciones aceptables. Toda demostración válida en la vieja notación podrá

volverse a escribir en la notación nueva. Así, el ejemplo 2, en la nueva notación, resulta:

EJEMPLO 7.

$$\frac{\mathcal{X}.\quad F\alpha\,(F\alpha\beta)\,x, \qquad \mathcal{Z}.\quad \alpha y, \qquad \mathcal{Z}.\quad \alpha z.}{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{1}{F\alpha\,(F\alpha\beta)x}\,Fp \qquad \dfrac{2}{\alpha y}\,Fp}{F\alpha\beta\,(xy)}\,Fe \qquad \dfrac{3}{\alpha z}\,Fp}{\beta\,(xyz)}\,We\text{—}3}{\beta\,(xyy)}\,Fi\text{—}2}{F(F_2\,\alpha\alpha\beta)\,(F\alpha\beta)\,(\lambda^2\,xy.xyy).}\,Fi\text{—}1$$

La anterior discusión justifica la siguiente definición:

DEFINICIÓN 4. Una *base normal* es una base $\mathfrak{B}$ tal que: (a) el sujeto de toda proposición de $\mathfrak{B}$ es una constante o una variable; (b) si el sujeto es una constante, el predicado es simple-F; y (c) no hay más de una proposición de $\mathfrak{B}$ con la misma variable como sujeto. Los sujetos constantes de $\mathfrak{B}$ se llamarán *elementos* [39] de $\mathfrak{B}$ y de toda argumentación basada en ella.

Nuestro teorema recíproco es entonces:

TEOREMA 8. *Si* $\mathfrak{B}$ *es una base normal y*

$$\mathfrak{B} \parallel\!\!-^{T\lambda} \xi X; \tag{25}$$

entonces hay un X' *tal que*

$$X \operatorname{red}_\beta X',$$

y

$$\mathfrak{B} \parallel\!\!-^{L\lambda} \xi X'.$$

Demostración. Sea $\mathfrak{T}$ una proposición tal que en la demostracion de (25) tenemos un árbol que termina en $\mathfrak{T}$; y sean $\mathfrak{M}$ las premisas sin cancelar por encima [40] de $\mathfrak{T}$ que son necesarias para la demostración

[39] Esto amplía la definición informal de § 3c.

[40] Si $\mathfrak{T}$ es una premisa, $\mathfrak{M}$ incluye a $\mathfrak{T}$.

de $\mathfrak{T}$[41]. Entonces mostramos por inducción deductiva, recorriendo la demostración de (25), que hay un $\mathfrak{T}'$ tal que T red_β T' y

$$\mathfrak{M} \parallel\!\!-^{L\lambda} T'.$$

llamamos $\mathfrak{S}$ a esa proposición.

Sea $\mathfrak{T}$ una premisa de (25). Entonces $\mathfrak{M}$ consta exclusivamente de $\mathfrak{T}$. Sea $T' \equiv T$. Si $\mathfrak{T}$ está en $\mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{S}$ es válida por (Fp). Si no, $\mathfrak{T}$ tiene que cancelarse en el curso de la demostración de (25). Pero las únicas cancelaciones posibles se producen por (We) y (Fi); en cualquiera de esos casos el sujeto es una variable y $\mathfrak{S}$ vuelve a ser válida por (Fp).

Supongamos que $\mathfrak{T}$ se obtiene de $\mathfrak{T}_1$ por la regla (We). Entonces $\mathfrak{T}$ se ha obtenido mediante la identificación de dos variables de $\mathfrak{T}_1$. Supongamos que $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{T}_1'$, $\mathfrak{S}_1$ se asocian con $\mathfrak{T}_1$ como lo estaban $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{S}$, con $\mathfrak{T}$. Supongamos que $\mathfrak{T}'$ se obtiene por la misma sustitución en $\mathfrak{T}_1'$. Si $\mathfrak{M}_1$ contiene los ξx y ξy de la regla (We), entonces $\mathfrak{S}$ se obtiene de $\mathfrak{S}_1$ por (Wl). Si no se presenta ξy, $\mathfrak{S}$ es la misma $\mathfrak{S}_1$; si no se presenta ξx, $\mathfrak{S}$ se obtiene de $\mathfrak{S}_1$ mediante cambio de variables. En cualquier caso vale $\mathfrak{S}$.

Supongamos que $\mathfrak{T}$ se obtiene de $\mathfrak{T}_1$ por la regla (Fi). Entonces el extremo del árbol que termina en $\mathfrak{T}$ será

$$\frac{\eta\mathfrak{X}}{\mathsf{F}\xi\eta\,(\lambda x.\mathfrak{X}).}$$

Sean $\mathfrak{M}_1$ las premisas situadas por encima de $\mathfrak{T}_1$, y sean T_1' y $\mathfrak{X}.'$ Sea T $\mathsf{F}\xi\eta\,(\lambda x\,\mathfrak{X}')$. Por la hipótesis inductiva tenemos

$$\mathfrak{M}_1 \parallel\!\!-_\eta^{L} \mathfrak{X}'.$$

Si ξx está en $\mathfrak{M}_1$, tenemos $\mathfrak{S}$ por (Fr). Si no, entonces x no se presenta en $\mathfrak{M}_1$, y, por tanto, tampoco en $\mathfrak{X}$ o $\mathfrak{X}'$; introducimos entonces ξx en $\mathfrak{S}_1$ por (Kl) y aplicamos (Fr). En cualquier caso vale $\mathfrak{S}$.

Por último, supongamos que $\mathfrak{T}$ se obtiene de $\mathfrak{T}_1$ y $\mathfrak{T}_2$ mediante (Fe). Entonces la terminación de la demostración de $\mathfrak{T}$ es

---

[41] En la formulación de las reglas T en § 1 no se exigió que todas las premisas indicadas (elementos de $\mathfrak{M}$ o su análogo) se usaran en la derivación de la hipótesis; en realidad, podían añadirse libremente otras premisas. Análogamente, en la regla Wl podría ocurrir que ξy, por ejemplo, no fuera realmente necesario para la derivación de $\mathfrak{T}$. Pero aquí $\mathfrak{M}$ no contiene más que los elementos efectivamente necesarios. Según esto, en las demostraciones que siguen tenemos que dejar abierta la posibilidad de que algunas de las premisas necesitadas para una inferencia no se den en $\mathfrak{M}$.

$$\frac{\begin{array}{cc}\mathfrak{M}_1 & \mathfrak{M}_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \mathsf{F}\xi\eta X & \xi Y\end{array}}{\eta(XY)}$$

Sean X', Y' tales que X red_β X', Y red_β Y' y

$$\mathfrak{M}_1 \parallel\!\!-^L \mathsf{F}\xi\eta X',$$
$$\mathfrak{M}_2 \parallel\!\!-^L \xi Y'.$$

Por el corolario 6.1 y (Kl) hay un Z tal que XY red_β Z y

$$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \parallel\!\!-^L \eta Z.$$

Podemos tomarlo como $\mathfrak{S}$. Esto completa la demostración.

En lo que antecede nos hemos tomado el trabajo de formular de tal modo nuestros teoremas que sigan siendo aplicables con adecuadas modificaciones a casos en los cuales la teoría se debilite de un modo u otro. No hemos insistido mucho en ello porque los usos principales que tenemos en cuenta para las formulaciones inferenciales consisten en la derivación de ciertas condiciones necesarias de deducibilidad (cfr. § 6); y si éstas valen para el sistema fuerte valen también para el más débil. Teniendo esto en cuenta no hemos desarrollado en detalle el estudio de estos sistemas debilitados ni hemos formulado teoremas formales sobre ellos. Pero considerando el hecho de que $\mathscr{F}_1{}^f$ (S, K) es inconsistente, los sistemas débiles pueden tener interés suficiente como para justificar una recapitulación, aunque sin detalles, de algunos de sus rasgos.

Si se omite el esquema (FK) [42] tomamos como combinadores primitivos B, C, I y S o W. En términos de esos combinadores podemos definir $[x]\,\mathfrak{X}$ para todo $\mathfrak{X}$ que contenga x, y de tal modo que sea válido el corolario D1.1. Tenemos una equivalencia esencial con la teoría λ de Church. El álgebra profesional correspondiente es la teoría débil de la implicación de Church [WTI]. En la teoría-T tenemos que exigir que $\mathfrak{M}$ no contenga más que las premisas, efectivamente, necesarias para la demostración; en particular, la premisa ξx de (Fi) tiene que haber sido usada previamente, de modo que la x se presente en T. En la teoría-L

[42] Nótese que esto no exige la omisión de K como combinador en $\mathscr{H}$.

hay que omitir (Kl). En la discusión del teorema 6 hemos visto que el caso más general del teorema de eliminación puede demostrarse sin (Kl) [43].

Si se omite el esquema (FW) podemos tomar como primitivas B, I, C, K. Puede mostrarse que $[x]\,\mathfrak{X}$ puede definirse en términos de estos combinadores de tal modo que satisfaga el corolario D1.1 para cualquier caso en el cual x no se presente más de una vez en $\mathfrak{X}$. La correspondiente teoría de conversión λ no ha sido estudiada que sepamos, ni tampoco lo ha sido el álgebra proporcional correspondiente [44]. En la teoría-T tenemos que excluir (We), pues en otro caso podría demostrarse (FW); análogamente, en la teoría-L tenemos que excluir (Wl), por lo menos para el caso de que los componentes tengan sujetos variables. Esta exclusión invalida la demostración del teorema 6; pero el teorema 5 sigue siendo válido. No conocemos por ahora el estatuto de (Wl) para sujetos constantes, ni si todas las premisas pueden usarse sólo una vez en la teoría-T [45].

6. Tipificación

Vamos a considerar ahora algunos teoremas que se refieren a la teoría básica y resultan de las conexiones que acabamos de establecer con la formulación-L. Describiremos, entre otras cosas, una forma típica de deducción-F en la cual puede transformarse, dadas ciertas circunstancias, cualquier deducción-F; esta transformación puede conseguirse mediante la reducción de sujeto. La discusión se realiza apuntando a ciertas generalizaciones que nos serán útiles más adelante. Pero algunos teoremas se formulan explícitamente sólo para $\mathscr{F}_1{}^b$ (S, K); su ampliación a sistemas débiles es en algunos casos trivial, y en otros no tiene la importancia suficiente como para mencionarla de un modo explícito.

Algunos de estos teoremas suponen la noción de reducción fuerte (§ 6F). Como se ha observado en § C6, esta noción exige que se tome I como combinador independiente. Los cambios de formulación que ello acarrea son de naturaleza tan trivial que no se han hecho siempre explícitamente. Así, seguimos hablando del sistema $\mathscr{F}_1{}^b$ (S, K) aunque no consideramos ya a I definido en términos de S y K.

---

[43] Esto sugiere, dicho sea de paso, una solución al problema de hallar una aproximación inferencial a Church [WTI] en lo que respecta a la implicación. Cfr. Curry y Craig [res. C].

[44] La primera persona que propuso formalmente un sistema sin W fue Fitch. Cfr. su [SFL], [SCL]. Cfr. también Ackermann [WFL. 1], Church [MiL].

[45] Tampoco han sido exploradas varias posibilidades sugeridas por analogías con Ackermann.

Será necesario contar con unas cuantas definiciones. Algunas de ellas son revisiones de definiciones ya hechas. Como las nuevas significaciones son generalizaciones de las antiguas, no hay peligro de confusión. Las definiciones se aplican a la formulación λ o a la formulación A, según el contexto.

DEFINICIÓN 5. Una *base radical* es una base $\mathfrak{B}$ que satisface las dos condiciones siguientes: (a) puede haber en $\mathfrak{B}$ un conjunto de proposiciones, llamadas *proposiciones variables* (de $\mathfrak{B}$) cuyos sujetos son variables; si los hay, no son más de una por cada variable, y ninguna variable aparece en ningún otro lugar de $\mathfrak{B}$. (b) Entre las demás proposiciones (de $\mathfrak{B}$), a las que llamamos *proposiciones constantes*, se define un subconjunto, llamado de las *proposiciones radicales*, mediante algún método que no se especifica aquí. (Esto difiere de nuestra anterior práctica sólo en la admisión de proposiciones constantes no radicales; en las aplicaciones principales se tratará de los axiomas.)

DEFINICIÓN 6. Una *base normal* se define ahora nuevamente como una base radical tal que, (a) todas las proposiciones radicales son simples-F, y (b) todas las proposiciones constantes son radicales. (Esto equivale a la definición 4 con la estipulación adicional de que vale (b).)

DEFINICIÓN 7. Sea $\mathfrak{D}$ una deducción-F de una base radical $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{T}$. Supongamos dada $\mathfrak{D}$ en forma arborescente sin premisas superfluas. Si hay premisas de $\mathfrak{D}$ que sean proposiciones radicales de $\mathfrak{B}$, sus sujetos serán componentes del sujeto X de $\mathfrak{T}$. Llamamos a estos componentes *elementos radicales* de $\mathfrak{D}$, y de $\mathfrak{T}$ o X. Como es natural, X puede incluir componentes que sean idénticos a los elementos radicales de $\mathfrak{B}$ sin haber sido introducidos en $\mathfrak{D}$ del modo dicho; tales componentes, si los hay, no deben considerarse elementos radicales de $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{D}$ o X.

TEOREMA 9. *Sea* $\mathfrak{B}$ *una base normal. Sea*

$$\vdash \eta X \tag{26}$$

deducible mediante una deducción básica a partir de $\mathfrak{B}$ *y esquemas axiomáticos de* $\mathscr{F}_1^b$ (S, K). *Entonces puede hallarse constructivamente un ob-*λ *A tal que*:

(I) *A está construido a partir de los elementos radicales* [46] *y variables mediante las operaciones del cálculo* λ *y está en forma normal-*β *respecto de los elementos radicales*;

(II) $$X_\lambda \operatorname{red}_\beta A;$$

(III) $$\mathfrak{L}_\lambda \Vdash \eta A$$

es válido en la teoría Lλ.

---

[46] ... mente : las transformaciones-λ de esos elementos radicales.

Demostración. Sea $\mathfrak{S}$ la proposición

$$\mathfrak{B} \parallel\!\!-^{AH} \eta X.$$

Entonces $\mathfrak{S}$ es verdadera por hipótesis. Por tanto, por (16), (18) y el teorema 8, tenemos en Lλ una proposición $\mathfrak{S}_{\lambda q}$. Sea A el sujeto del constituyente derecho de esta proposición. Entonces (III) es verdadero. De esto se sigue (I) por la discusión de § 3, especialmente § 3d.

Por lo que hace a la condición (II), puede comprobarse su verdad siguiendo la argumentación del párrafo anterior y observando que las conversiones necesarias para formar $\mathfrak{S}_{\lambda q}$ tratan los elementos radicales como todos indivisos. Por tanto, los elementos radicales pueden subrogarse por indeterminadas sin afectar por ello a la validez de la argumentación. Entonces, puesto que X_λ cnv A (por definición del subíndice q), tenemos que llegar a una reducción (II).

En los corolarios siguientes suponemos satisfechas las hipótesis del teorema 9.

COROLARIO 9.1. *Si los elementos radicales se tratan como indeterminadas, la reducción fuerte normal de X termina eventualmente en A_H; además,*

$$\mathfrak{B} \parallel\!\!-^{AH} \eta A_H. \tag{27}$$

Demostración. Se sigue de los teoremas C5 y 6F6. (Haciendo, como es natural, las modificaciones indicadas al comienzo de § C6.)

Como el corolario no se aplica sólo a X, sino también a cualquier componente de X, es probable que toda reducción, fuerte o débil, de X tenga terminación. Pero no nos es necesario demostrarlo.

COROLARIO 9.2. *Si* (26) *es deducible en la teoría básica, X_λ tiene una forma normal-*β, *y, consiguientemente, X tiene una forma fuerte normal.*

Demostración. La primera parte es la conclusión (I) para el caso de que $\mathfrak{B}$ sea vacía. La segunda parte se sigue del teorema 6F6.

DEFINICIÓN 8. Sean $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{B}$ como en la definición 7, y sea X el sujeto de $\mathfrak{T}$. Entonces X es *irreducible* respecto de $\mathfrak{B}$ si —y sólo si— X es irreducible excepto para reducciones en el interior de los elementos radicales.

DEFINICIÓN 9. Sea $\mathfrak{B}$ una base radical. Entonces una *deducción-F típica* respecto de $\mathfrak{B}$ es una deducción-F $\mathfrak{D}$ tal que el sujeto X de su conclusión $\mathfrak{T}$ es irreducible respecto de $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{D}$. Una *proposición típica* respecto de $\mathfrak{B}$ es una proposición que es final de una deducción-F típica;

y una *proposición tipificable* es una proposición que puede reducirse a una proposición típica mediante reducción de sujeto. Por último, una *base típica* $\mathfrak{B}$ es una base tal que toda consecuencia-F de $\mathfrak{B}$ es tipificable. (Por el toerema de construcción de sujeto toda proposición de una deducción típica es una proposición típica.)

DEFINICIÓN 10. Sean $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ bases radicales sin variables comunes. Entonces $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ es la base radical formada tomando las proposiciones de $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ a la vez, siendo las proposiciones radicales las que lo son en $\mathfrak{B}$ o $\mathfrak{C}$. Si $\mathfrak{B}$ es una base radical, una *extensión normal* de $\mathfrak{B}$ es una base $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ tal que $\mathfrak{C}$ es normal. (Si $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ contienen variables comunes, $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ no está definida; ordinariamente, $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ no tendrán ninguna proposición común.)

DEFINICIÓN 11. Una *base tipificadora* es una base $\mathfrak{B}$ cuyas proposiciones radicales son simples-F, de tal modo que toda extensión normal de $\mathfrak{B}$ es típica.

OBSERVACIÓN. En las anteriores definiciones la reducción puede entenderse en sentido fuerte o débil, según las circunstancias; pero en las aplicaciones más importantes se trata de la reducción fuerte. En el teorema siguiente la reducción es la fuerte; pero en los teoremas posteriores, aunque suponemos que es la fuerte, los teoremas mismos pueden aplicarse también a la débil con modificaciones adecuadas.

TEOREMA 10. *Sea* $\mathfrak{A}$ *una base que consta de los axiomas de* $\mathscr{F}_1$ (S, K) *tomados como proposiciones no radicales. Entonces* $\mathfrak{A}$ *es tipificadora, entendiéndose la reducción en sentido fuerte.*

Demostración. Sea $\mathfrak{B}$ una extensión normal de $\mathfrak{A}$, y supongamos que (26) es una consecuencia-F de $\mathfrak{B}$. Por el corolario 9.1 hay un Y, irreducible respecto de $\mathfrak{B}$, y tal que $X \succ Y$. Por el teorema B1 ningún elemento radical puede entonces presentarse en posición funcional (§ 5C6) en el sujeto X; por tanto, ningún combinador que forme la cabeza de un extenso puede ser parte de un elemento radical a menos que el extenso entero sea parte de dicho elemento. Se sigue de esto que la hipótesis (primera proposición) del teorema C2, generalizada tal como lo fue en § C2, observación 1, queda satisfecha respecto de los elementos radicales tomados como cuasi-primitivas. Por tanto, por los teoremas C2 y C5, $\vdash \eta Y$ es una consecuencia-F de $\mathfrak{B}$. Como $\vdash \eta Y$ es entonces típica, (26) es tipificable, q. e. d.

TEOREMA 11. *Sea* $\mathfrak{B}$ *una base tipificadora, y sea* $\mathfrak{T}$ *deducible-F de* $\mathfrak{B}$. *Entonces hay un entero* $m \geq 0$, *y obs-F* $\xi_1, \ldots, \xi_m$, *un* θ *simple-F, un ob* X *y una combinación* $\mathfrak{X}$ *de ciertas variables* $x_1, \ldots, x_m$ *que no se presentan en* X, *junto con algunos componentes de* X, *todos determinados unívocamente, excepto* $\mathfrak{X}, x_1, \ldots, x_m$, *y tales que*

(I) $\quad T \equiv \mathsf{F}_m\, \xi_1 \ldots \xi_m\, \theta\, X,$

(II) $\quad X x_1 x_2 \ldots x_m \succ \mathfrak{X},$

(III) $\mathfrak{X}$ es estratificada respecto de $\mathfrak{B}$ en base a $\xi_1, \ldots, \xi_m, \theta,$

(IV) $\mathfrak{X}$ es irreducible respecto de $\mathfrak{B}$.

Demostración. Está claro que $m, \xi_1, \ldots, \xi_m, \theta, X$ están unívocamente determinados por la exigencia de que valga (I) y de que θ sea simple-F. Si añadimos a $\mathfrak{B}$ las premisas

$$\vdash \xi_i\, x_1, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{28}$$

entonces la nueva base $\mathfrak{B}'$ será típica por la definición 11. Pero de $\mathfrak{T}$ y m aplicaciones de la regla F podemos derivar

$$\vdash \theta\,(X x_1 \ldots x_m).$$

Como esto es una consecuencia-F de $\mathfrak{B}'$ es tipificable (definición 9). Se sigue (definición 9) que hay un $\mathfrak{X}$ que satisface (II) y tal que $\mathfrak{T}'$, con $T' \equiv \theta\, \mathfrak{X}$, es típica respecto de $\mathfrak{B}'$. De esto pasamos a (III) por la definición B1 y a (IV) por la definición 9.

TEOREMA 12. *Sea $\mathfrak{B}$ una base tipificadora, y supongamos que las proposiciones constantes y no radicales de $\mathfrak{B}$ son compuestas y tales que la reducción* (II) *del teorema* 11 *asociada a cada una de ellas es débil, y supone, por lo menos, una contracción de un extenso que no sea interior a un elemento radical*[47]. *Sea $\mathfrak{T}$ una consecuencia-F de $\mathfrak{B}$. Entonces la $\mathfrak{X}$ asociada con $\mathfrak{T}$ por el teorema* 11 *es un elemento radical o empieza con una variable.*

Demostración. Supongamos a $\xi_1 \ldots, \xi_m, \theta, X, \mathfrak{X}$ determinados a partir de $\mathfrak{T}$ como en el teorema 11. Sea $\mathfrak{B}'$ la base formada al añadir (28) a $\mathfrak{B}$, y sea $T' \equiv \theta\, \mathfrak{X}$.

Supongamos primero que $\mathfrak{T}'$ está en $\mathfrak{B}'$. Si $\mathfrak{T}'$ es una proposición variable, entonces $\mathfrak{X}$ es una variable y nuestra tesis es verdadera. En otro caso, $\mathfrak{T}'$ es una proposición constante de $\mathfrak{B}$. Entonces $\mathfrak{T}'$ tiene que ser una proposición constante, puesto que es simple; $\mathfrak{X}$ es, por tanto, un elemento radical y la tesis es también verdadera en este caso.

Si $\mathfrak{T}'$ no está en $\mathfrak{B}'$, es el término de una deducción-F cuya rama principal (§ A4) tiene $r > 0$ pasos. Sea $\mathfrak{T}_0$ la premisa del comienzo de esta rama principal, y supongamos que las premisas menores son, de

---

[47] Esto se cumple si la $\mathfrak{X}$ en cuestión es una combinación de $x_1, \ldots, x_m$ y, por tanto, en particular, si las proposiciones constantes no radicales son axiomas.

izquierda a derecha, $\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}r$. Entonces $\mathfrak{T}_0$ está en $\mathfrak{B}'$; además, existen obs $\mathfrak{Y}_0, \mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_r$ y obs-F $\eta_1, \ldots, \eta_r$ tales que

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &\equiv \mathfrak{Y}_0\, \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_r \\ T_0 &\equiv \mathsf{F}_r\, \eta_1 \ldots \eta_r\, \theta\, \mathfrak{Y}_0, \\ T_j &\equiv \eta_j\, \mathfrak{Y}_j, \qquad\qquad j = 1, 2, \ldots, r. \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{T}_0$ es compuesta, no es una proposición radical. Si es una proposición variable, entonces $\mathfrak{Y}_0$ es una variable y nuestra tesis es verdadera. La única posibilidad restante es que $\mathfrak{T}_0$ sea una proposición constante no radical de $\mathfrak{B}$. Por el teorema 11 hay entonces un $\mathfrak{Z}$ tal que

$$\mathfrak{Y}_0\, y_1 \ldots y_r \succ \mathfrak{Z},$$

y por la hipótesis de este teorema esa expresión es débil y supone una reducción efectiva. Si sustituimos las y_j, respectivamente, por los obs $\mathfrak{Y}_j$, esto mostrará que $\mathfrak{X}$ es reducible, contra el tenor del teorema 11 (IV).

COROLARIO 12.1 *Supongamos que $\mathfrak{B}$ es como en el teorema y que no contiene ninguna proposición variable. Supongamos que $\mathfrak{T}$ es simple-F y consecuencia-F de $\mathfrak{B}$. Entonces $\mathfrak{T}$ se obtiene a partir de una proposición radical mediante expansión de sujeto.*

Demostración. Si $\mathfrak{T}$ es simple-F, $m = 0$. Entonces $\mathfrak{Y}_0$ no puede ser una variable, y tenemos una contradicción a menos que $\mathfrak{T}'$ esté en $\mathfrak{B}$.

Terminaremos esta sección con un teorema que es, en varios respectos, menos general que el corolario C5.1, pero que es, en cambio, más útil en el próximo capítulo.

TEOREMA 13. *Sea $\mathfrak{B}$ una base tipificadora, y sea*

$$\vdash \mathsf{F}\xi\eta\mathsf{I}$$

deducible-F a partir de alguna extensión normal de $\mathfrak{B}$. Entonces $\xi \equiv \eta$.

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{B}'$ es la extensión normal dada de $\mathfrak{B}$. Añadiendo a $\mathfrak{B}'$ la premisa

$$\vdash \xi\, x,$$

siendo x una variable que no se presenta de ningún otro modo, tenemos otra extensión normal de $\mathfrak{B}$ a partir de la cual es deducible-F

$$\vdash \eta\, (\mathsf{I}x)$$

Como la base ampliada es típica, se sigue de la definición 9 que

$$\mathfrak{B}', \xi x \vdash \eta x.$$

Por el teorema de la construcción de sujeto esto sólo es posible si $\xi \equiv \eta$, q. e. d.

S. TEMAS SUPLEMENTARIOS

Para la historia de la teoría de la funcionalidad cfr. § 8S1.

1. La noción de estratificación de Quine

Como ya se ha dicho, el término *estratificación* fue introducido por Quine en su [NFM]. Para justificar nuestro uso del término aquí vamos a presentar la noción de Quine como un caso especial de la que hemos introducido.

En la formulación de Quine las fórmulas se construyen mediante las conectivas del cálculo de predicados de primer orden a partir de constituyentes de la forma $x \varepsilon y$ siendo x e y variables. Una fórmula es estratificada si es posible asignar números a las variables de tal modo que 1) la misma variable tenga el mismo número en todos sus casos, y 2) siempre que se presenta una combinación $x \varepsilon y$, y tenga asignado un número superior al de x exactamente en una unidad.

Para incluir esta idea en nuestra teoría supongamos que ponemos en lugar de la notación '$x \varepsilon y$' la notación 'yx' (y análogamente con todos los pares de símbolos de variables). Introduzcamos entonces dos categorías básicas, M y H, y definamos la secuencia $\{\mu_n\}$ por

$$\mu_0 = M, \quad \mu_{n+1} = \mathsf{F}\mu_n H.$$

Si asignamos el entero n a x podemos considerar esto como equivalente a la postulación de

$$\vdash \mu_n x$$

Entonces una fórmula es estratificada si —y sólo si— para todo caso de un par del tipo yx tenemos

$$\vdash H(yx).$$

Para completar la representación asignamos caracteres funcionales a las conectivas proposicionales diciendo que son funciones de H a H; por ejemplo, para la implicación (P) y la negación (N) [48],

$$\vdash \mathsf{F}_2 HHHP,$$
$$\vdash \mathsf{F}HHN.$$

Si tomamos esto como base de nuestra estratificación, entonces una fórmula X sin cuantificadores es estratificada en la definición de Quine si —y sólo si— es estratificada según nuestra definición con $\eta = H$ y eligiendo los ξ entre los μ.

Análogamente podemos tratar a los cuantificadores. Se presentan con ellos algunos puntos complejos, pero sin real dificultad de principio.

---

[48] Esta asignación es provisional, para este contexto sólo.

Las teorías fuertes de la funcionalidad

Vamos a considerar en este capítulo teorías que difieren de las del capítulo 9 en dos respectos. En primer lugar, admitimos la regla general Eq, de tal modo que ahora tenemos una teoría en la cual la igualdad combinatoria desempeña el papel de la identidad lógica. En segundo lugar, eliminamos la restricción de que los simples-F sean indeterminadas; postulamos, en lugar de ello, o bien que los simples-F son obs cualesquiera —en cuyo caso tenemos una teoría libre—, o bien que los simples-F son obs sujetos a determinadas condiciones, en cuyo caso hablamos de teorías restringidas.

Comprobaremos (§ A) que una teoría libre en la cual (FW) (o (FS), (FI)) sea admisible como esquema axiomático —y, por tanto, *a fortiori* si se trata de una teoría plena— es inconsistente. Es, pues, necesario considerar teorías debilitadas de un modo u otro. Nos ocuparemos de dos clases de debilitación. Por una parte, mostramos en § C que una teoría parcial libre que no contenga (FW) o (FS) es consistente. Por otro lado, en § D demostramos la consistencia de ciertas teorías restringidas. Resultará que el (FI) sin restringir no ofrece peligros en una tal teoría restringida; y una teoría así restringida resulta adecuada para los fines analíticos mencionados en § 9A.

La primera sección (§ A) trata algunos temas preliminares, con la formulación y el análisis de la inconsistencia, y la motivación de las concretas restricciones que se adoptan luego. La última sección (§ E) tratará algunas cuestiones referentes a una formulación finita, por un lado, y a relaciones con otros conceptos ilativos, por otro.

La mayor parte de este capítulo se refiere a cuestiones de consistencia. De acuerdo con la norma general de § 8S3, no vacilamos en dejar abiertas algunas de estas cuestiones. Aspiramos sólo a discutir las cuestiones más importantes y fundamentales; en algunos casos, especialmente en § E, nos contentamos con respuestas meramente heurísticas. Por lo que hace a la posibilidad de que los teoremas puedan ser superados por otros más fuertes cfr. § 9A1.

A. PRELIMINARES

En esta sección consideramos las convenciones fundamentales para todo el capítulo; las notaciones de los varios sistemas; algunas cuestiones generales referentes a la relación entre los sistemas de este capítulo y la teoría básica del capítulo **9**; la inconsistencia del sistema pleno sin restringir y la motivación consiguiente de las detalladas formulaciones de las últimas secciones; y, finalmente, la consistencia de ciertos sistemas rudimentarios que son suficientes para la formulación de la teoría de combinadores. La discusión complementa la de § **9A**, que fue una introducción al conjunto de la teoría de la funcionalidad.

1. Convenciones fundamentales

Las diferentes teorías de la funcionalidad tienen en común los rasgos siguientes: sobre la base de $\mathscr{F}_0$ (§ **8E2**) admite el ob primitivo F y la regla F referente al mismo; formulan una clase de obs llamados simples-F, y en términos de los mismos la categoría de los obs-F, producidos a partir de los simples-F por medio de la operación que pasa de α y β a $F\alpha\beta$; y aceptan como axiomas las proposiciones formadas a partir de ciertos esquemas axiomáticos de la forma (FX) por la sustitución de las variables indicadas por letras griegas por obs-F. Estas cuestiones se expusieron en § **9A**. Las convenciones allí adoptadas y que no se restringían explícitamente a la teoría básica siguen vigentes aquí.

Las varias teorías difieren entre sí en tres aspectos, a saber: 1) en la extensión en que permiten la regla Eq; 2) en la formulación de los simples-F; y 3) en los esquemas axiomáticos admisibles.

Distinguiremos entre teorías que difieren en los dos primeros respectos mediante el uso de índices literales. Algunos de ellos se explicaron ya en § **9A2**. Así, por ejemplo, $\mathscr{F}_1{}^b$ es la teoría básica de § **9**; en ella la regla Eq se limita a la regla Eq', y los simples-F son indeterminadas. Las teorías que estudiamos en este capítulo admitirán la regla Eq en toda su generalidad. Si los obs-F están libres de toda restricción decimos que se trata de la *teoría libre*, y la designamos por $\mathscr{F}_1{}^{f*}$; un caso especial de la

---

* En la notación dejamos varios signos —como el índice '*f*' de '$\mathscr{F}_1 f$'— que son obvios en la lengua inglesa y podrían sustituirse en la española por letras iniciales correspondientes. Pero —dejando aparte el hecho de que la '*l*' es usada por el autor con otra significación— hemos creído que la alteración de la notación sería perjudicial para las referencias en la literatura.—*N. del T.*

misma en el designado por $\mathscr{F}_1^g$ en § C. Si los obs-F están sujetos a alguna restricción (que se formulará más adelante), la teoría se llamará *restringida*. En § D se definen concretas teorías restringidas $\mathscr{F}_1^r$, $\mathscr{F}_1^s$, $\mathscr{F}_1^t$. Las notaciones '$\mathscr{F}_1^x$', '$\mathscr{F}_1^y$', etc., designarán una teoría sin especificar.

La distinción entre teorías que difieran en cuanto a los esquemas axiomáticos se hará como en § 9A3. Así, $\mathscr{F}_1^x$ (K, S) será la teoría $\mathscr{F}_1^x$ producida por los esquemas axiomáticos (FK) y (FS). Los términos 'teoría plena' y 'teoría parcial' se usarán como en § 9A3, de tal modo que $\mathscr{F}_1^x$ (K,S) es una teoría plena, mientras que $\mathscr{F}_1^x$ (I) es una teoría parcial.

Cualquiera de estas teorías puede tomarse en la forma λ. Podríamos indicar dicha forma λ escribiendo una 'λ' entre paréntesis a continuación de '$\mathscr{F}_1$' y antes de los nombres de los combinadores que producen el sistema $\mathscr{H}$ correspondiente. Pero usaremos poco o nada este detalle notacional.

Necesitamos unas cuantas observaciones más por lo que hace a los términos simple-F, compuesto-F, etc.

En $\mathscr{F}_1^f$ el término 'ob-F' no tiene contenido, pues es sinónimo de 'ob'. Pero los términos 'simple-F' y 'compuesto-F' tienen, a pesar de ello, significación. Según la definición (§ 9A2), todo ob que no sea de la forma FXY es un simple-F de $\mathscr{F}_1^f$; así, si X, Y, Z son obs cualesquiera, los obs F, FX, FXYZ e I(FXYZ) son simples-F, mientras que FXY es compuesto-F. Un simple-F puede, pues, contener como parte un compuesto-F; además, un simple-F I(FXY) puede reducirse a un compuesto-F (FXY), de tal modo que la propiedad de ser simple-F no es invariante respecto de la regla Eq.

Los términos 'simple-F' y 'compuesto-F' son, por otra parte, relativos al sistema que se considere. Esta relatividad puede indicarse por el procedimiento de poner a la 'F' el índice adecuado; y así lo haremos cuando sea conveniente una indicación muy explícita. Pero seguramente será superfluo usar de un modo general tan precisa indicación. El mayor peligro de ambigüedad se presenta cuando intentamos usar esos términos, tal como han quedado definidos respecto de $\mathscr{F}_1^f$, en un sentido absoluto, al hablar de algún otro sistema, $\mathscr{F}_1^x$. Pero nuestras formulaciones serán tales que un simple-F^x sea siempre un simple-F^f; como la afirmación análoga es entonces necesariamente verdadera para compuestos-F, el mayor peligro que arriesgamos es que los términos absolutos se apliquen a algo que no sea siquiera un ob-F^x. Por eso estipularemos que cuando estos términos se usen como sustantivos se tomen respecto de la teoría concreta que se esté discutiendo; cuando se usan como adjetivos se tomarán en sentido absoluto —es decir, respecto de

$\mathscr{F}_1^f$. Esto basta para la mayoría de los casos y fines; a veces se usan los términos 'ob-F simple' y 'ob compuesto-F'.

Los términos 'función-F' y 'componente-F' se usarán también como queda explicado en § 9A2. Estos términos son absolutos por naturaleza y su relatividad no presenta dificultades. Definiremos también el término *argumento*-F del modo siguiente: si ξ es un ob-F, los argumentos-F de ξ son los simples-F que son componentes-F de ξ; si $\mathfrak{T}$ es una proposición tal que $T = \xi X$, los argumentos-F de $\mathfrak{T}$ son los de ξ; y los argumentos-F de una deducción $\mathfrak{D}$ son los de sus proposiciones constituyentes tomadas conjuntamente [1].

2. Igualdad

En la teoría libre podemos definir la igualdad por

$$(1) \qquad \mathsf{Q} \equiv [x, y] \,.\, \mathsf{F}(\mathsf{C}\mathsf{I}x)\,(\mathsf{C}\mathsf{I}y)\,\mathsf{I}.$$

Adoptando esta definición, la propiedad Q^{P} se sigue sin más si tenemos (FI); mientras que Q^{T} se sigue por la regla del modo siguiente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \mathsf{Q}XY}{\vdash \mathsf{F}(\mathsf{C}\mathsf{I}X)\,(\mathsf{C}\mathsf{I}Y)\,\mathsf{I}}\,\mathsf{Eq} \qquad \dfrac{\vdash ZX}{\vdash \mathsf{C}\mathsf{I}XZ}\,\mathsf{Eq}}{}\,\mathsf{F}}{\dfrac{\vdash \mathsf{C}\mathsf{I}Y(\mathsf{I}Z)}{\vdash ZY.}\,\mathsf{Eq}}$$

Las aplicaciones de la regla Eq en la anterior demostración pueden realizarse directamente mediante las reglas combinatorias.

Si adoptamos, además, la definición

$$(2) \qquad \mathsf{E} \equiv \mathsf{W}\mathsf{Q} \qquad\qquad (\text{o } \mathsf{S}\mathsf{Q}\mathsf{I}),$$

entonces se hacen superfluas las reglas E, puesto que toda proposición $\vdash \mathsf{E}X$ resulta una instancia de (FI). Si adoptamos la definición (2) o postulamos E y las reglas E, todo sistema libre que contenga (FI) es un sistema $\mathscr{Q}$. (Cfr. § 8E3.)

El objeto de este capítulo es demostrar la consistencia-Q de ciertos

---

[1] (Añadido en galeradas.) Según § 9A2, esto incluye a ξ mismo si es simple-F.

sistemas, esto es, la propiedad de que

(3) $$\vdash \mathsf{Q}XY$$

sólo si

(4) $$X = Y.$$

Demostraremos esto estableciendo otra forma de consistencia a la que llamaremos consistencia-I, a saber, la propiedad según la cual se tiene

(5) $$\vdash \mathsf{F}XY\mathsf{I}$$

sólo si vale (4). Esta consistencia-I ha sido demostrada para la teoría básica por dos métodos diferentes en el corolario 9C5 y el teorema 9F13; más adelante la estableceremos para varias teorías más fuertes.

La propiedad de consistencia-I es más fuerte que la de consistencia-Q. Lo mostraremos del modo siguiente. Supongamos que vale (3). Por (1) esto es lo mismo que

$$\vdash \mathsf{F}(\mathsf{C}\mathsf{I}X)\ (\mathsf{C}\mathsf{I}Y)\mathsf{I}.$$

Por la consistencia-I y la regla Eq podemos argumentar así:

$$\begin{aligned} \mathsf{C}\mathsf{I}X &= \mathsf{C}\mathsf{I}Y. \\ \mathsf{C}\mathsf{I}X\mathsf{I} &= \mathsf{C}\mathsf{I}Y\mathsf{I}, \\ \mathsf{I}X &= \mathsf{I}Y \\ X &= Y. \end{aligned}$$

Hemos visto (§ 8E3) que la consistencia-Q es una propiedad indispensable para la aceptabilidad. En cambio, consistencia-I es una indicación de debilidad excesiva. Pues (5) es intuitivamente verdadero no sólo cuando X e Y significan lo mismo, sino también siempre que X e Y son categorías tales que X está incluido en Y. Por eso una teoría consistente-I es incapaz de expresar inclusiones propias. De todos modos, la consistencia-I establece que no hay inconsistencia en nuestro formalismo lógico; y esto, como veremos, no es cosa trivial.

3. Inconsistencia de la teoría libre plena

Mientras la paradoja de § 8B no pareció derivable en esa formulación estando definida P a base de F, se tuvo la esperanza de que la teoría

libre plena fuera consistente. Pero el siguiente teorema muestra que no es tal el caso [1 bis].

TEOREMA 1. *Si una teoría libre admite el esquema* (FW), *entonces es inconsistente aunque la regla* Eq *quede restringida por la exigencia de que* $X \geq Y$.

Demostración. Sea β un ob cualquiera. Entonces el ob $Y(SF(CF\beta))$ se reduce a un ob α tal que $\alpha \geq F\alpha(F\alpha\beta)$. Por tanto, si definimos

$$\sigma \equiv F\alpha(F\alpha\beta), \qquad \tau \equiv F\sigma(F\sigma\beta), \tag{6}$$

tenemos

$$\alpha \geq \sigma \geq \tau. \tag{7}$$

Y entonces

	$\vdash F(F\alpha(F\alpha\beta))(F\alpha\beta)W$	por (FW),
	$\vdash F\sigma(F\alpha\beta)W$	por (6),
	$\vdash F\sigma(F\sigma\beta)W$	por (7),
(8)	$\vdash \tau W$	por (6),
	$\vdash F(F\sigma(F\sigma\beta))(F\sigma\beta)W$	por (FW),
	$\vdash F\tau(F\sigma\beta)W$	por (6),
	$\vdash F\sigma\beta(WW)$	por (8) y regla F,
	$\vdash F\tau\beta(WW)$	por (7),
(9)	$\vdash \beta(WWW)$	por (8) y regla F.

Sea X un ob dado, y sea

$$\beta \equiv KX.$$

Entonces inferimos de (9) por reducción

$$\vdash X. \tag{10}$$

Como X es un ob cualquiera, esto demuestra la inconsistencia.

Pueden hacerse varias observaciones sobre esta inconsistencia.

En primer lugar, hemos usado K al pasar de (9) a (10). Pero (9) es ya paradójico. Afirma, en efecto, que un cierto combinador sin forma

---

[1 bis] La primera contradicción conocida en la teoría libre plena se descubrió el 18 de julio de 1954 y se expuso en [IFT]. (Obsérvese que el término 'teoría plena' usado en ese texto significa lo que aquí 'teoría libre'). La contradicción se basaba en una analogía con la paradoja de § 8B. Se usaban los esquemas axiomáticos (FW) y (FI); en vez de (2) se tenía $\alpha \geq F\alpha\beta$; y en vez de WWW se usaba el combinador WI(WI). Aunque la argumentación del texto es un poco más compleja, da un resultado más fuerte, pues no se necesita (FI). Una contradicción análoga puede derivarse de (FS) y (FI) usando SII (SII) y $\alpha \geq F\alpha\beta$. [Por § 9E podríamos usar el mismo método para derivar la contradicción de § 8A a partir de (PW) y la regla P sola, sin usar (PI).]

normal (WWW) tiene todas las propiedades que puedan formularse en el sistema. En particular, si formulamos la igualdad como en § 2, se seguirá de (9) que

$$\vdash \mathsf{Q}X\,(\mathsf{WWW})$$

vale para todo X; y, por tanto, para todo X e Y,

$$\vdash \mathsf{Q}YX.$$

Supongamos que Y es tal que vale

$$\vdash Y.$$

Entonces, puesto que Q tiene la propiedad Q^0, podemos derivar (10). Esta argumentación no exige la presencia de K en el sistema, ni siquiera en la teoría subyacente de combinadores.

En segundo lugar, en el teorema 9F13 demostramos la consistencia de $\mathscr{F}_1{}^b$ (S, K) utilizando la teoría inferencial de § 9F. El teorema clave de esta teoría inferencial es el teorema de eliminación de § 9F4. Sin duda, es natural asombrarse de que no pueda establecerse una argumentación análoga para la teoría libre con la igualdad en el lugar de la identidad. Pero un breve examen basta para mostrar el punto esencial de que un ob como el anterior α no tiene un orden definido (en el sentido de número de F que contiene), mientras que el teorema de eliminación dependía de una inducción respecto del orden, en el estadio 3. Si éste es el punto esencial podemos esperar que una teoría restringida en la cual todos los obs-F tengan un orden determinado —y, en particular, en la cual un simple-F no pueda reducirse a un compuesto-F— tendrá bastantes posibilidades de ser demostrativamente consistente.

En tercer lugar, la anterior argumentación supone (FW). Se observó en § 9C5 que algunos teoremas sobre terminaciones, que demostramos sólo para el caso general por medio de la teoría inferencial de § 9F, pueden demostrarse también por métodos mucho más elementales en el caso de que se excluyan esquemas combinatorios relacionados con combinadores de los que producen repeticiones. Esto sugiere que una teoría parcial con dicha exclusión pueda ser consistente y libre al mismo tiempo. Tal es el motivo del estudio realizado en § C.

4. Consistencia de $\mathscr{F}_1{}^f$ (I)

Vamos a establecer ahora el teorema siguiente, referente al sistema en el cual no se añade supuesto alguno a los hechos en § 2.

TEOREMA 2. *La teoría* $\mathscr{F}_1^f$ (I) *es consistente*-I.

Demostración. Empezaremos por mostrar que si $\mathfrak{T}$ es un teorema elemental, entonces hay un ob X tal que

$$T = \mathsf{F}XX\mathsf{I}. \tag{11}$$

Esto es, sin duda, verdadero si $\mathfrak{T}$ es un caso de (FI); además, si $\mathfrak{T}$ satisface a (11) y $\mathfrak{T}'$ se deriva de $\mathfrak{T}$ mediante la regla Eq, entonces $T' = T$ y $\mathfrak{T}'$ satisface a (11).

Para completar la demostración por inducción deductiva supongamos que $\mathfrak{T}_3$ se obtiene de $\mathfrak{T}_1$ y $\mathfrak{T}_2$ por una inferencia-F, y que (11) vale para $\mathfrak{T}_1$ y $\mathfrak{T}_2$. Tenemos entonces

$$T_1 \equiv \mathsf{F}XYZ, \quad T_2 \equiv XU, \quad T_3 \equiv Y(ZU).$$

Por la hipótesis inductiva hay un V tal que

$$T_1 \equiv \mathsf{F}XYZ = \mathsf{F}VV\mathsf{I}.$$

Se sigue por el lema de § 8E4 que

$$X = Y = V, \qquad Z = \mathsf{I};$$

y, por tanto, que

$$T_3 = T_2.$$

Por lo que hemos mostrado más arriba, $\mathfrak{T}_3$ satisface a (11).

El rudimentario sistema $\mathscr{F}_1^f$(I) puede formularse también de un modo estrictamente finitista. Lo estableceremos así como indicación preliminar de estudios más detallados sobre este carácter:

TEOREMA 3. *Supongamos un sistema* $\mathfrak{S}$ *formado mediante el añadido a* $\mathscr{F}_0$ *del ob primitivo* F, *tal vez* E *como primitiva, la regla* F *y los siguientes axiomas* [2]:

(a) $\vdash \mathsf{E}X$ *para toda primitiva* X,
(b) $\vdash \mathsf{FEI}(\mathsf{FEE})$ $(\vdash \mathsf{FE}(\mathsf{FEE})\mathsf{I})$,
(c) $\vdash \mathsf{FEI}(\mathsf{C}(\mathsf{WF})\mathsf{I})$ $(\vdash \mathsf{FE}(\mathsf{C}(\mathsf{WF})\mathsf{I})\mathsf{I})$.

Supongamos a Q *definida por* (1), *y* E, *si no se ha tomado como primitiva,*

[2] Las formas entre paréntesis son otras posibilidades. Si se toman éstas no vale la consistencia-I, pero puede demostrarse la consistencia-Q mediante una argumentación análoga.

definida por (2). *Entonces el sistema es consistente-*I *y contiene al sistema* $\mathscr{F}_1^f$ (I).

Demostración. Consideremos las siguientes formas-tipo de proposiciones:

I.	$\vdash$ F*XX*I.	
II.	$\vdash$ FEI (FEE)	($\vdash$ FE (FEE)I).
III.	$\vdash$ FE*EX*.	
IV.	$\vdash$ FEI(C(WF)I)	($\vdash$ FE(C(WF)I)I).
V.	$\vdash$ E*X*.	

Diremos que una proposición $\mathfrak{T}$ que pueda convertirse en una de estas formas-tipo es una proposición del tipo correspondiente. Mostraremos que todo teorema elemental del sistema en discusión es de uno de esos cinco tipos. Obsérvese que si E está definido por (2), el tipo V queda incluido en el tipo I.

Los axiomas (a), (b), (c) son de los tipos V, II y IV, respectivamente. Por tanto, nuestra tesis es verdadera para todos los axiomas [3]. Además, si $\mathfrak{T}$ es de un tipo dado y $T = T'$, entonces $\mathfrak{T}'$ es del mismo tipo; por tanto, la regla Eq no nos lleva fuera de los cinto tipos.

Para completar la inducción deductiva procedemos como en el teorema 2. Supongamos que $\mathfrak{T}_3$ se deriva de $\mathfrak{T}_1$ y $\mathfrak{T}_2$ por una inferencia-F. Por un método análogo a los usados en el teorema 2 vemos que si $\mathfrak{T}_1$ tiene el carácter que se muestra en la columna de la izquierda de la tabla siguiente, $\mathfrak{T}_3$ tiene el carácter correspondiente de la columna de la derecha:

$\mathfrak{T}_1$	$\mathfrak{T}_3$
Tipo I	$T_3 = T_2$
Tipo II	Tipo III
Tipo III	Tipo V
Tipo IV	Tipo I

El caso en el cual $\mathfrak{T}_1$ es de tipo V queda excluido si E es primitiva, y queda incluido en el tipo I si E está definido por (2). Por tanto, en todos los casos $\mathfrak{T}_3$ es de uno de los cinco tipos (suponiendo, naturalmente, que también $\mathfrak{T}_2$ lo es), lo cual completa la inducción.

Para mostrar la consistencia-I supongamos que vale (5). Si es de tipo I o tipo III tenemos (4) por el lema de § 8E4. Si fuera de tipo II ten-

---

[3] Si desarrollamos el proceso un estadio más adelante (cfr. § 8E3), los axiomas combinatorios serán de tipo I.

dríamos $\mathsf{FEE} = \mathsf{I}$ por el mismo lema; pero esto es imposible, puesto que $(\mathsf{FE})_\lambda$ e I_λ tienen formas normales diferentes. También es imposible el tipo IV, por razón análoga. Y el tipo V es imposible si E es un átomo. Por tanto, vale (4), y tenemos consistencia-I.

En este sistema tenemos $\vdash \mathsf{E}X$ para todo ob X porque (b) nos da, en realidad, la regla E. Por tanto, toda proposición elemental de $\mathscr{F}_1{}^f(\mathsf{I})$ puede obtenerse de (c) mediante las reglas F y Eq.

Estos dos teoremas muestran que no es del todo desesperada la búsqueda de sistemas de carácter finito que puedan usarse para la formulación de sistemas fuertes.

B. PROPIEDADES GENERALES DE LAS DEDUCCIONES

En esta sección consideramos principios generales comunes a todos los sistemas. Empezamos (§ 1) con propiedades de deducciones-F en los sistemas fuertes, y formulamos un proceso —al que llamamos sustitución-F— para la transformación de tales deducciones. El caso especial del mismo en el cual el ob sustituido a otro se obtiene por reducción fuerte del ob eliminado será importante más adelante; este caso especial se estudia en § 2. Luego formulamos (§ 3) un proceso de tipificación y damos postulados suficientes para el mismo. En § 4 mostramos que si se establece la tipificación se sigue la consistencia-I y ciertas otras propiedades relacionadas con ella.

1. SUSTITUCIÓN-F

Una deducción de $\mathscr{F}_1{}^f$ que proceda según las reglas de $\mathscr{F}_1{}^b$ se llamará *deducción básica*; si procede según la regla *F* exclusivamente, se llamará (como en $\mathscr{F}_1{}^b$) *deducción*-F. Examinamos en este artículo algunos temas referentes a la validez de tales deducciones en los sistemas fuertes.

Estará claro que si tenemos una deducción $\mathfrak{D}$ en $\mathscr{F}_1{}^b$ y si interpretamos los θ_i que se presentan en $\mathfrak{D}$ como simples-F cualesquiera de $\mathscr{F}_1{}^x$, entonces $\mathfrak{D}$ se convertirá en una deducción básica $\mathfrak{D}'$ que es válida en $\mathscr{F}_1{}^x$; además, si $\mathfrak{D}$ es una deducción-F, $\mathfrak{D}'$ lo será también. Se sigue de esto que todo teorema elemental de $\mathscr{F}_1{}^b$, una vez interpretado de ese modo, es un teorema de $\mathscr{F}_1{}^x$.

Vamos a considerar ahora la relación recíproca. Acabamos de ver que la propiedad de ser simple-F no es invariante si admitimos inferencias por la regla Eq. Pero en una deducción básica los argumentos-F pre-

servan siempre su identidad; en la práctica resultan funcionar como indeterminadas, sustituibles por cualquier ob-F. Es necesario examinar detalladamente la cuestión de cómo y cuándo funcionan así.

Consideremos una inferencia-F, por ejemplo,

$$\text{(1)} \qquad \mathsf{F}\alpha\beta f,\ \alpha X \vdash \beta(fX).$$

Puede ocurrir que $\beta\ (fX)$ sea simple-F. En este caso no podemos sustituirla por ninguna otra cosa, y esperamos que la inferencia sea válida. Análogamente, $\mathsf{F}\alpha$, según la anterior definición, es simple-F; pero su sustitución por alguna expresión puede invalidar la inferencia. No obstante, estos simples-F, aunque se presentan como componentes en (1), no son argumentos-F de (1); y lo único que nos interesa aquí son los argumentos-F.

Está claro que los argumentos-F de (1) son precisamente los argumentos-F de α o β, o ambos. Si se sustituyen esos argumentos-F por obs-F cualesquiera, la inferencia (1) seguirá siendo, en efecto, válida. Es esencial, naturalmente, que los mismos simples-F sean sustituidos por los mismos obs en todos sus casos como argumentos-F, y en ningún otro lugar. Así, los dos casos de α tienen que seguir siendo idénticos, pero si hay un caso de $\mathsf{F}\alpha$ como componente-F de β, entonces no sólo no hay que hacer sustituciones de componentes de ese caso de α, sino que, además, puede haber una sustitución de $\mathsf{F}\alpha$ mismo considerado como argumento-F; y en el último caso no hay que hacer sustitución alguna del caso de $\mathsf{F}\alpha$ que aparece al principio de la premisa mayor. Así, tenemos un tipo peculiar de sustitución permisible aquí. Llamaremos a este proceso *sustitución*-F [4].

De este modo pasa una inferencia-F, por sustitución-F, a otra inferencia-F. Como lo mismo vale de cualquier Eq'-inferencia, y como una instancia de un esquema axiomático pasa a otra instancia del mismo esquema [5], y la sustitución-F no cambia el sujeto, tenemos el teorema siguiente:

TEOREMA 1. *Sea* $\mathfrak{D}$ *una deducción básica válida en* $\mathscr{F}_1^{\ x}$ *sobre una base* $\mathfrak{B}$. *Supongamos que una sustitución-F cualquiera de los argumentos-F de* $\mathfrak{D}$ *por obs-F convierte a* $\mathfrak{D}$ *en una secuencia de proposiciones* $\mathfrak{D}'$, *y a* $\mathfrak{B}$ *en un conjunto de proposiciones* $\mathfrak{B}'$. *Entonces* $\mathfrak{D}'$ *es una deducción básica válida en* $\mathscr{F}_1^{\ y}$ *sobre la base* $\mathfrak{B}'$. *Además, si* $\mathfrak{D}$ *es una deducción-F,*

---

[4] Puede definirse por inducción sobre la estructura de un ob-F, igual que en § 2C2.

[5] Obsérvese que esta fase del proceso es la única que requiere que los obs con los cuales se sustituye sean obs-F, puesto que en las reglas no hay restricción a obs-F.

$\mathfrak{D}'$ también lo es; si $\mathfrak{D}$ es típica, también lo es $\mathfrak{D}'$. Análogamente, si $\mathfrak{D}$ es una derivación y si los esquemas axiomáticos son los mismos en las dos teorías, entonces $\mathfrak{D}'$ es una derivación.

En el caso especial en el cual los obs-F colocados por sustitución son simples-F distintos, la sustitución-F es reversible. Esto da el siguiente corolario:

COROLARIO 1.1. *Si $\mathfrak{D}$ es una deducción básica (deducción-F) válida en $\mathscr{F}_1^x$, entonces hay una deducción básica (deducción-F) $\mathfrak{D}'$ válida en $\mathscr{F}_1^b$ y tal que $\mathfrak{D}'$ pasa a $\mathfrak{D}$ por una sustitución-F.*

2. SUSTITUCIÓN-F REDUCTIVA

Un importante caso especial de sustitución-F es aquel en el cual todo ob introducido por sustitución se obtiene del argumento al que sustituye por una reducción. En el caso que aquí nos interesa se trata de la reducción fuerte ($\succ$) definida en § **6F**, y no de la reducción débil ($\geq$) de la que nos ocupábamos ante todo en el capítulo anterior.

TEOREMA 2. *Sea $\mathscr{F}_1^x$ tal que todo ob obtenido por reducción de un simple-F es un ob-F. Sean ξ y η obs-F tales que*

$$\xi = \eta. \tag{2}$$

Entonces hay un ob-F ζ tal, que ζ se obtiene de ξ por sustitución-F reductiva, y

$$\eta \succ \zeta.$$

Demostración. Por la propiedad de Church-Rosser (R4 de § **8E4**) existe un ζ' tal que

$$\xi \succ \zeta', \quad \eta \succ \zeta'.$$

Sean $\theta_1, \ldots, \theta_m$ distintos argumentos-F de ξ. Supongamos que $\xi_1, \ldots, \xi_n$ se obtienen repitiendo los θ_i, de tal modo que haya un ξ_j único para cada intancia de θ_i como argumento en ξ. Entonces, por la propiedad R3 de § **8E4**, hay unos $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ tales que $\xi_j \succ \zeta_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, y ζ' se obtiene de ξ por subrogación de cada ξ_j por ζ_j. Consideremos ahora los índices j tales que todos los ξ_j son instancias diversas de un mismo θ_i. Por la propiedad de Church-Rosser hay un φ_i tal que para todas esas j

$$\zeta_j \succ \varphi_i. \tag{3}$$

Todos los φ_i son obs-F, puesto que $\theta_i \succ \varphi_i$. Supongamos que ζ se obtiene de ζ' subrogando cada ζ_j por el φ_i correspondiente. Entonces ζ se

obtiene de ξ por sustitución-F de $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, respectivamente, por $\theta_1, \ldots, \theta_m$ y, además,

$$\eta \succ \zeta' \succ \zeta.$$

Por tanto, ζ tiene las propiedades requeridas.

No es posible, en general, encontrar un ζ que pueda obtenerse de ξ y η por sustitución-F reductiva. Esto puede verse mediante el siguiente contraejemplo. Supongamos dados a α y β, y sean ρ y σ tales que

$$\rho \geq \mathsf{F}\alpha\sigma, \qquad \sigma \equiv \mathsf{F}\rho\beta.$$

Un tal ρ puede construirse mediante el combinador paradójico; en efecto, $\mathsf{Y}(\mathsf{B}(\mathsf{F}\alpha)\,(\mathsf{C}\mathsf{F}\beta))$ se reduce a un tal ρ. Sea

$$\xi \equiv \mathsf{F}\rho\,(\mathsf{F}\rho\beta), \qquad \eta \equiv \mathsf{F}(\mathsf{F}\alpha\sigma)\sigma.$$

Entonces $\xi = \eta = \mathsf{F}\rho\sigma$. Supongamos que ζ se obtuviera de ξ y η por una sustitución-F reductiva. Supongamos que las sustituciones sobre ξ convierten a ρ en ρ' y a β en β'; y supongamos que las sustituciones sobre η convierten a α en α' y a σ en σ'. Entonces

$$\zeta \equiv \mathsf{F}\rho'\,(\mathsf{F}\,\rho'\beta') \equiv \mathsf{F}(\mathsf{F}\alpha'\sigma')\sigma'.$$

Por tanto,

$$\sigma' \equiv \mathsf{F}\rho'\beta',$$
$$\rho' \equiv \mathsf{F}\alpha'\,\sigma' \equiv \mathsf{F}\alpha'\,(\mathsf{F}\rho'\beta'),$$

lo cual es imposible [6].

La siguiente definición y el siguiente teorema dan un caso en el cual podemos derivar ese resultado fuerte.

DEFINICIÓN 1. Un *simple-F estricto* es un ob tal que todo ob obtenido de él por reducción es simple-F. Análogamente, una *proposición estrictamente simple-F* es una proposición tal que toda proposición obtenida de ella por reducción es simple-F.

Así, el ρ del anterior contraejemplo (como el α de § A3) es simple-F, pero no estrictamente simple-F. Por otro lado, cualquier ob de la forma $aX_1 \ldots X_m$, siendo a una indeterminada, es estrictamente simple-F.

TEOREMA 3. *Supongamos que los argumentos-F de* ξ *y* η *son simples-F estrictos, y que vale* (2). *Entonces hay un* ζ *tal que* ζ *puede obtenerse de* ξ *o* η *por sustitución-F reductiva.*

Demostración. Las ζ_j de la demostración del teorema 2 son ahora necesariamente simples-F y constituyen en su totalidad todos los ar-

---

[6] Este ejemplo no es un contraejemplo del teorema 2. La ζ del teorema 2 puede tomarse como $\mathsf{F}(\mathsf{F}\alpha\sigma)\,(\mathsf{F}(\mathsf{F}\alpha\sigma)\beta)$, en la cual $\mathsf{F}\alpha\sigma$ sustituye a ρ en ξ.

gumentos-F de ζ'. Además, todo argumento-F de η tiene que reducirse a un argumento-F de ζ', y, por tanto, a uno de ζ_j. Ahora bien, si dos de ellos, por ejemplo ζ_j y ζ_k, proceden de idénticos argumentos-F de ξ o η, entonces $\zeta_j = \zeta_k$. Por tanto, por la propiedad de Church-Rosser podemos encontrar un φ_i que satisface a (3) y tal que tenemos el mismo φ_i no sólo cuando los argumentos correspondientes son idénticos en ξ, sino también cuando son idénticos en η. Entonces el ζ del teorema 2 tendra las propiedades exigidas por el teorema 3.

3. Tipificación-FQ

Definiremos una *deducción-FQ* como una deducción que procede por inferencias-F y conversiones. Se trata, naturalmente, de la deducción más general permitida en $\mathscr{F}_1$. Para tales deducciones definimos más abajo cierta forma típica. Dado un sistema $\mathscr{F}_1^x$, la aserción de que toda proposición deducible en $\mathscr{F}_1^x$ a partir de una cierta base $\mathfrak{B}^x$ es convertible con otra obtenible de $\mathfrak{B}^x$ mediante una deducción-FQ típica se conocerá con el nombre de teorema de tipificación para $\mathscr{F}_1^x$. Aunque la demostración de este sistema es un tanto diferente para los dos sistemas discutidos en §§ C-D, su formulación y su demostración presentan en ambos casos un esquema general. Discutiremos aquí este esquema general, dejando los detalles para más tarde.

Definición 2. Sea $\mathfrak{B}$ un base dada. Llamamos *deducción-FQ típica* a una deducción $\mathfrak{D}$ tal que: (a) toda proposición simple de $\mathfrak{D}$ o bien está en $\mathfrak{B}$ o bien se obtiene por conversión de alguna proposición anterior [7]; (b) toda proposición compuesta de $\mathfrak{D}$ o bien está en $\mathfrak{B}$ o bien se obtiene a partir de proposiciones de $\mathfrak{B}$ y de proposiciones simples anteriores mediante una deducción-F típica (definición 9F9); y (c) la conclusión no se obtiene por conversión. Una *deducción-FQ semitípica* es una deducción que satisface (a) y (b), pero no necesariamente (c). Una *proposición (semi)típica* es una proposición que se obtiene de $\mathfrak{B}$ mediante una deducción (semi)típica; una *proposición tipificable* es una proposición que puede obtenerse de una proposición típica por conversión [8]. Todos estos términos son, naturalmente, relativos a $\mathfrak{B}$; esta relatividad puede mencionarse o no explícitamente, según las circunstancias.

---

[7] Si la proposición anterior es simple y no está en $\mathfrak{B}$ se obtiene mediante conversión, y las dos conversiones pueden combinarse en una. Por tanto, podemos suponer, si resulta oportuno, que la proposición anterior está en $\mathfrak{B}$ o es compuesta.

[8] Por tanto, una proposición semitípica es una proposición que es típica o bien es tipificable y simple-F.

Sea $\mathfrak{B}^*$ una base que contiene todos los axiomas de $\mathscr{F}_1^*$. Sobre esta base el teorema de tipificación es como sigue:

TEOREMA DE TIPIFICACIÓN. *Si* $\mathfrak{T}$ *es deducible de* $\mathfrak{B}^*$ *en* $\mathscr{F}_1^*$, *entonces* $\mathfrak{T}$ *es tipificable respecto de* $\mathfrak{B}^*$.

Para dar el esquema de la demostración de este teorema postulamos una relación $\boldsymbol{R}$ que tiene las propiedades R2-R4 de § 8E4. En base a la misma postulamos las propiedades siguientes para $\mathfrak{B}^*$:

B1. La base $\mathfrak{B}^*$ es una base tipificadora (definición 9F11).

B2. Si $\mathfrak{T}_1$ está en $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{T}_1$ es simple-F, $\mathfrak{T}_2$ es compuesto, y $T_1 \succ T_2$, entonces $\mathfrak{T}_2$ está en $\mathfrak{B}^*$.

B3. Si $\mathfrak{T}$ es típica, $T \equiv \mathsf{F}\xi\eta f$ y $\xi \boldsymbol{R} \xi'$, entonces hay un η' tal que $\mathsf{F}\xi\eta \boldsymbol{R} \mathsf{F}\xi'\eta'$ y, para todo η tal, $\mathfrak{T}_2$, con $T_2 \equiv \mathsf{F}\xi'\eta' f$, es típica.

Con esos postulados podemos demostrar el teorema de tipificación mediante inducción deductiva. La demostración se da en la siguiente serie de lemas, el 1, el 2 y el 5, de los cuales dan los pasos principales de la inducción.

LEMA 1. *Si* $\mathfrak{T}$ *está en* $\mathfrak{B}^*$ *es tipificable.*

Demostración. $\mathfrak{T}$ es típica por definición. Por tanto, es *a fortiori* tipificable.

LEMA 2. *Si* $\mathfrak{T}_1$ *es tipificable y* $T_1 = T_2$, *entonces* $\mathfrak{T}_2$ *es tipificable.*

Demostración. Por definición hay una $\mathfrak{T}_1'$ típica tal que $T_1 = T_1'$. Entonces $T_2 = T_1'$ y $\mathfrak{T}_2$ resulta tipificable.

LEMA 3. *Si* $\mathfrak{T}_1$ *es tipificable y compuesta-F, entonces hay una compuesta-F típica* $\mathfrak{T}_1'$ *tal que* $T_1 = T_1'$.

Demostración. Por definición hay una $\mathfrak{T}_2$ típica tal que $T_1 = T_2$. Si $\mathfrak{T}_2$ no es compuesta, tiene que estar en $\mathfrak{B}^*$. Por la propiedad de Church-Rosser hay una $\mathfrak{T}_1'$ tal que $T_1 \succ T_1'$, $T_2 \succ T_1'$. Por la primera de estas reducciones $\mathfrak{T}_1'$ es compuesta; por la segunda y B2 está, además, en $\mathfrak{B}^*$, y es, por tanto, típica.

LEMA 4. *Si* $\mathfrak{T}_1$ *es típica,* $\mathfrak{T}_2$ *es tipificable y* $\mathfrak{T}_3$ *se obtiene de* $\mathfrak{T}_1$ *y* $\mathfrak{T}_2$ *por una inferencia-F, entonces* $\mathfrak{T}_3$ *es tipificable.*

Demostración. Por hipótesis tenemos que tener

$$(4) \qquad T_1 \equiv \mathsf{F}\xi\eta f, \qquad T_2 \equiv \xi X,$$

$$T_3 \equiv \eta\,(fX).$$

Se presentan entonces dos casos.

Caso 1. El ob ξ es simple-F. Entonces $\mathfrak{T}_2$ es semitípica. Además, $\mathfrak{T}_3$ se obtiene mediante una deducción-F a partir de premisas que, o bien están en $\mathfrak{B}^*$, o bien son simples-F. Tipificando esta deducción-F

mediante B1, tenemos una $\mathfrak{T}_3'$ típica tal que $T_3 = T_3'$. El lema es, por tanto, verdadero en este caso.

Caso 2. El ob ξ es compuesto-F. Entonces, por el lema 3, hay una $\mathfrak{T}_2''$ típica compuesta tal que $T_2 = T_2''$. Sea $T_2'' \equiv \zeta\, Z$. Entonces, por el lema de § 8E4,

(5) $$\xi = \zeta, \quad X = Z,$$

siendo ζ compuesto. Por la propiedad R4 de nuestra relación $\boldsymbol{R}$, existe un ξ' tal que

(6) $$\xi\, \boldsymbol{R}\, \xi', \qquad \zeta\, \boldsymbol{R}\, \xi'.$$

Supongamos que η' está determinado como en B3, y supongamos también

$$T_1' \equiv \mathsf{F}\xi'\eta' f \qquad T_2' \equiv \xi'\, Z,$$
$$T_3' \equiv \eta'\,(fZ).$$

Entonces, por B3[9], $\mathfrak{T}_1'$ y $\mathfrak{T}_2'$ son típicas. Por tanto, $\mathfrak{T}_3'$ se obtiene mediante una deducción-F a partir de premisas que son simples o están en $\mathfrak{B}^x$. Tipificando esta deducción-F (mediante B1) tenemos una $\mathfrak{T}_3''$ típica tal que $T_3' = T_3''$. Como $T_3 = T_3'$ por (5) y la propiedad R2[10], $T_3 = T_3''$, y, por tanto, $\mathfrak{T}_3$ es tipificable.

LEMA 5. *Si* $\mathfrak{T}_1$ *y* $\mathfrak{T}_2$ *son tipificables, y* $\mathfrak{T}_3$ *se obtiene a partir de* $\mathfrak{T}_1$ *y* $\mathfrak{T}_2$ *mediante una inferencia-F, entonces* $\mathfrak{T}_3$ *es tipificable.*

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ son como en la hipótesis y que vale (4). Por el lema 3 hay una $\mathfrak{T}_1'$ compuesta y típica tal que $T_1 = T_1'$. Por el lema de § 8E4 tenemos que tener

$$T_1' \equiv \mathsf{F}\xi'\eta' f',$$

con $$\xi \equiv \xi', \eta = \eta', f = f'.$$

Sea $$T_2' \equiv \xi' X, \qquad T_3' \equiv \eta'\,(f'\, X).$$

Entonces $\mathfrak{T}_2'$ es tipificable por el lema 2, $\mathfrak{T}_3'$ por el lema 4 y $\mathfrak{T}_3$ por el lema 2.

Esto completa la demostración del teorema de tipificación bajo las hipótesis indicadas.

OBSERVACIÓN. En lo que precede no hemos precisado el sentido de la reducción. Pensábamos, ante todo, en la reducción fuerte, y sólo

---

[9] Obsérvese que si $\zeta \equiv \mathsf{F}\rho\sigma$, entonces $\xi' \equiv \mathsf{F}\rho'\sigma'$ por la propiedad R3. Tanto ρ' como σ' son dados, y no necesitamos $\mathfrak{T}_2'$ con toda la fuerza de B3.

[10] Para mostrar $\eta = \eta'$.

en sentido fuerte hemos mostrado que una base axiomática es en la teoría básica tipificadora (teorema 9F10). Pero aunque necesitamos la reducción fuerte en los lugares en que hemos usado el teorema de Church-Rosser, no nos es necesaria la reducción fuerte a propósito de las deducciones-F típicas implícitas en la condición (b) de la definición 2 y el postulado B1. En § C haremos una aplicación de esta idea.

4. Consecuencias del teorema de tipificación

Algunas consecuencias del teorema de tipificación valen independientemente del sistema que se considere. Por eso es oportuno considerarlas aquí.

Teorema 4. *Si* $\mathfrak{B}^*$ *tiene las propiedades* B1 *y* B2, *y si el teorema de tipificación vale para* $\mathfrak{F}_1^*$ *respecto de* $\mathfrak{B}^*$, *entonces* $\mathfrak{F}_1^*$ *es consistente-*I.

Demostración. Supongamos que

$$\vdash \mathsf{F}XY\mathsf{I}$$

es derivable de $\mathfrak{F}_1^*$. Por el lema 3 y el lema de § 8E4 existen X' e Y tales que

(7) $$X = X', \qquad Y = Y',$$

y que (el sujeto tiene que ser I, puesto que es irreducible)

$$\vdash \mathsf{F}X'Y'\mathsf{I}$$

es típica. Por el teorema 9F13 y B1, $X' = Y'$. De esto y (7) inferimos $X = Y$, q. e. d.

Teorema 5. *Supongamos que* $\mathfrak{B}^*$ *es tipificadora fuerte* [11] *y que vale la propiedad* B2. *Supongamos que el teorema de tipificación vale para* $\mathfrak{F}_1^*$ *respecto de* $\mathfrak{B}^*$. *Sea* a *un átomo cualquiera, y supongamos que*

(8) $$\vdash \mathsf{F}XYa$$

vale en $\mathfrak{F}_1^*$. *Entonces* (8) *es convertible en una proposición de* $\mathfrak{B}^*$.

Demostración. Por el lema 3 de § 3 y el lema de § 8E4 hay una proposición típica

(9) $$\vdash \mathsf{F}\xi\eta f$$

---

[11] Es decir, que es tipificadora tal como se definió en definición 9F11, con la reducción tomada en sentido fuerte.

tal que $X = \xi$, $Y = \eta$, $a = f$. Como a es irreducible, $f \succ a$. Si (9) no está en $\mathfrak{B}^x$, es la conclusión de una deducción-F típica no trivial cuyas premisas están en $\mathfrak{B}^x$ o son proposiciones simples semitípicas. Por el carácter tipificador fuerte de $\mathfrak{B}^x$ tenemos $f \equiv a$. Pero esto es imposible en razón del teorema de la construcción de sujeto.

COROLARIO 5. 1. *La conclusión del teorema* 5 *se aplica en particular a la proposición*

(10) $\qquad \vdash Fala.$

C. DEDUCCIONES-FR

Llamaremos *deducción-FR* a una deducción que proceda por inferencias-F y reducciones de predicados. Estudiaremos esas deducciones en la presente sección, junto con algunas materias relacionadas con ellas. El objetivo de la discusión será demostrar la consistencia-I del sistema $\mathscr{F}_1{}^f$ (B, I, C, K). Pero no haremos explícitamente la suposición de que estamos tratando precisamente ese sistema hasta que ello resulte relevante; así, algunos teoremas seguirán siendo válidos en otros sistemas, aunque tal vez no sean interesantes en ellos. Las conclusiones de esta sección no se usan sino ocasionalmente en otras posteriores.

1. EL TEOREMA DE NORMALIZACIÓN

Hemos definido una deducción-FR como una deducción en la cual todas las inferencias son inferencias-F, o reducciones de predicado. Nuestro primer teorema afirma que una tal deducción puede disponerse de tal modo que nunca se encuentre una inferencia-F por encima de una reducción:

TEOREMA 1. *Sea* $\mathfrak{D}$ *una deducción-FR de* $\mathfrak{T}$ *a partir de una base* $\mathfrak{B}$. *Entonces hay una deducción-F,* $\mathfrak{D}'$ *de* $\mathfrak{T}$ *a partir de una base* $\mathfrak{B}'$ *y que consta de proposiciones obtenidas de proposiciones de* $\mathfrak{B}$ *mediante reducción de predicado.*

Demostración. Si una inferencia-F va seguida por una reducción de predicado la argumentación tiene que ser del siguiente aspecto [12]:

$$\dfrac{\dfrac{\vdash F\alpha\beta f \qquad \vdash \alpha X}{\vdash \beta(fX)}\,F}{\vdash \beta'(fX),}\,R$$

[12] 'R' indica aquí reducción de predicado.

con $\beta \succ \beta'$. En lugar de esta argumentación puede ponerse

$$\dfrac{\dfrac{\vdash F\alpha\beta f}{\vdash F\alpha\beta' f}\ \mathrm{R} \qquad \vdash \alpha X}{\vdash \beta'(fX).}\ \mathrm{F}$$

Este proceso —que consiste, por así decirlo, en pasar una reducción inmediatamente posterior a una inferencia-F a la premisa mayor de dicha inferencia-F— puede proseguirse hasta que no haya más reducciones. En ese momento $\mathfrak{D}$ habrá sido transformada en una deducción-F $\mathfrak{D}'$ cuyas premisas son premisas de $\mathfrak{D}$ o se han derivado de dichas premisas mediante reducción de predicado exclusivamente. Como toda serie de tales reducciones de predicado puede sintetizarse en una reducción sola, esto demuestra el teorema.

Observación 1. Las únicas proposiciones que quedan alteradas en el proceso son las que forman la premisa mayor de alguna inferencia-F. Las premisas reducidas se presentarán, por tanto, en las extremidades de las ramas principales (§ 9A4) que nacen de los puntos en los que en $\mathfrak{D}$ había reducciones. Salvo por la posibilidad de sintetización de reducciones, un argumento X se reduce a X' en $\mathfrak{D}'$ si —y sólo si— la misma reducción tenía lugar en $\mathfrak{D}$.

Este teorema muestra que la noción de deducción-FR a partir de una base $\mathfrak{B}$ es la misma que la de deducción-F a partir de una base $\mathfrak{B}'$ que sea el cierre de $\mathfrak{B}$ respecto de la reducción de predicado. Más adelante investigamos las condiciones en la cuales esta $\mathfrak{B}'$ es ella misma una base tipificadora en el sentido de la definición **9F11**.

2. El teorema de la reducción de sujeto.

Algunos de los teoremas sobre la conversión de sujeto de § 9C valen con modificaciones para deducciones-FR. El más interesante aquí es el teorema de la reducción de sujeto. Para explicitar la analogía con el teorema **9C2** lo demostraremos aquí para el caso en el cual los combinadores primitivos son S y K. Puede generalizarse a otros combinadores primitivos por el método de **9C4**; y lo usaremos particularmente para el caso en el cual dichos combinadores son B, I, C, K. A este teorema pueden aplicarse más o menos las mismas observaciones que al teorema **9C2**.

TEOREMA 2. *Sea* $\mathfrak{B}$ *una base*

$$\vdash \alpha_j\, a_j \qquad j = 1, \ldots, p. \tag{1}$$

tal que todos los a_j *son primitivas y que siempre que* a_j *es* K *o* S *la correspondiente proposición* (1) *es una instancia de* (FK) *o* (FS) *o es estrictamente simple. Supongamos que*

$$\vdash \eta X \tag{2}$$

puede obtenerse a partir de $\mathfrak{B}$ *mediante una deducción-FR* $\mathfrak{D}$, *y sea*

$$X \geq X'. \tag{3}$$

Entonces hay un η' *y una deducción-FR* $\mathfrak{D}'$ *tales que*

$$\eta \succ \eta', \tag{4}$$

además, $\mathfrak{D}'$ *se basa en* $\mathfrak{B}$ *y termina en*

$$\vdash \eta' X'. \tag{5}$$

Demostración. Por el teorema 1 podemos suponer que $\mathfrak{D}$ es una deducción-F basada en proposiciones derivadas de $\mathfrak{B}$ por medio de la reducción de predicado. Entre esas proposiciones, todas las compuestas cuyos sujetos son K o S se obtienen a partir de instancias de (FK) o (FS) mediante la reducción de predicado. Son, pues, de una de las formas

$$\vdash \mathsf{F}_2\, \alpha_1 \beta \alpha_2 \mathsf{K},$$
$$\vdash \mathsf{F}_3(\mathsf{F}_2 \alpha_1 \beta_1 \gamma_1)\,(\mathsf{F}\alpha_2\beta_2)\alpha_3\gamma_3\mathsf{S},$$

con

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3, \beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_3. \tag{6}$$

Procedemos ahora como en § 9C2, sin indicar más que los lugares de la argumentación en los que hay alguna diferencia.

En primer lugar tomamos ahora para $\mathfrak{T}_k'$

$$\vdash \eta_k'\, X_k', \tag{7}$$

con

$$\eta_k \succ \eta_k'. \tag{8}$$

Dada una deducción $\mathfrak{D}_k'$ de $\mathfrak{T}_k'$ conseguimos una deducción $\mathfrak{D}'$ del modo siguiente. Por el teorema B2 hay un η_k'' tal que $\eta_k' \succ \eta_k''$ y η_k'' se obtiene de η_k por sustitución-F reductiva. Sea $\mathfrak{D}_k''$ una deducción-FR de $\mathfrak{T}_k''$, es decir, de

$$\vdash \eta_k'' X_k'$$

(que se obtiene añadiendo una reducción al final de la deducción postulada de $\mathfrak{T}_k'$). Subroguemos $\mathfrak{D}_k$ por $\mathfrak{D}_k''$ en $\mathfrak{D}$, mientras que en el resto de $\mathfrak{D}$ realizamos las sustituciones-F reductivas que transforman a η_k en η_k''; por último, en la rama del árbol resultante por debajo de $\mathfrak{T}_k''$ subrogamos como antes X_k por X_k'. El resultado es la $\mathfrak{D}'$ buscada.

En segundo lugar, a causa de la forma de η_h no conseguimos ahora identidades, sino igualdades. La situación es, en los diversos casos, como sigue:

Caso 1. En lugar de § 9C(5) tenemos ahora

$$\eta_h \equiv \mathsf{F}\alpha_1(\mathsf{F}\beta\alpha_2),$$

valiendo las partes relevantes de (6). Identificando ésta con la otra expresión de η_h tenemos (por § 8E4)

$$\eta_i \equiv \alpha_1 = \alpha_2 \equiv \eta_k.$$

Tómese η_k' tal que

$$\eta_k \succ \eta_k', \qquad \eta_i \succ \eta_k'.$$

Entonces se obtiene $\mathfrak{D}_k'$ por una reducción del predicado bajo $\mathfrak{D}_i$.

Caso 2. Aquí obtenemos, en lugar de § 9C(6),

$$\begin{aligned} &\eta_i \equiv \mathsf{F}\alpha_1(\mathsf{F}\beta_1\gamma_1),\\ &\eta_j \equiv \mathsf{F}\alpha_2\beta_2,\\ &\eta_l \equiv \alpha_3, \qquad \eta_k \equiv \gamma_3. \end{aligned}$$

Sean α', β', γ' tales que

$$\text{(9)} \qquad \begin{aligned} &\alpha_1 \succ \alpha', \quad \alpha_2 \succ \alpha', \quad \alpha_3 \succ \alpha',\\ &\beta_1 \succ \beta', \quad \beta_2 \succ \beta',\\ &\gamma_1 \succ \gamma', \quad \gamma_3 \succ \gamma'. \end{aligned}$$

Tomamos $\eta_k' \equiv \gamma'$ y derivamos $\mathfrak{T}_k'$ del modo siguiente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{D}_i}{\eta_i X_i}\,\mathrm{R}}{\mathsf{F}_2\alpha'\beta'\gamma' X_i} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{D}_l}{\eta_l X_l}\,\mathrm{R}}{\alpha' X_l}}{\mathsf{F}\beta'\gamma'(X_i X_l)}\,\mathrm{F} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{D}_j}{\eta_j X_j}\,\mathrm{R}}{\mathsf{F}\alpha'\beta' X_j} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{D}_l}{\eta_l X_l}\,\mathrm{R}}{\alpha' X_l}}{\beta'(X_j X_l)}\,\mathrm{F}}{\gamma' X_k'}\,\mathrm{F}$$

3. El teorema de tipificación para el sistema libre parcial

Ahora podemos demostrar el teorema de tipificación para el sistema $\mathscr{F}_1{}^f(\mathsf{B}, \mathsf{I}, \mathsf{C}, \mathsf{K})$, al que llamaremos sistema $\mathscr{F}_1{}^g$.

Con este objeto recordamos el squema de § B3. Lo único necesario es demostrar que los postulados B1-B3 quedan satisfechos para una elección adecuada de $\boldsymbol{R}$ y $\mathfrak{B}^g$. Tomamos como $\boldsymbol{R}$ la reducción fuerte de predicado, y como $\mathfrak{B}^g$ el cierre respecto de $\boldsymbol{R}$ de los esquemas axiomáticos (FB), (FI), (FC) y (FK). Entonces los postulados se verifican del modo siguiente:

El postulado B1 se verifica por el teorema 2 en el sentido de la reducción débil (cfr. observación de § B3). El teorema 2 muestra, en efecto, que la base $\mathfrak{B}'$ es típica si el proceso de reducción no puede continuarse indefinidamente. Sabemos por el ejemplo de § A3 que el proceso puede continuarse indefinidamente si se admite (FW) o (FS); mas para el sistema $\mathscr{F}_1{}^g$ tenemos la garantía de una terminación finita por la argumentación de § 9C5.

El postulado B2 es vacío a causa de que $\mathfrak{B}^g$ no admite proposiciones simples [12 bis].

El postulado B3 se verifica del modo siguiente: podemos tomar como η' cualquier ob tal que $\eta \succ \eta'$, por ejemplo, el mismo η. Supongamos entonces que $T_1 \equiv \mathsf{F}\xi\eta f$, $T_2 \equiv \mathsf{F}\xi'\eta' f$, y que $\mathfrak{T}_1$ es típica. Para $\mathfrak{B}^g$ escribimos simplemente $\mathfrak{B}$. Si $\mathfrak{T}_1$ está en $\mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{T}_2$ está también en $\mathfrak{B}$, puesto que $\mathfrak{B}$ es cerrada respecto de la reducción de predicado. Si no, sea $\mathfrak{D}_1$ la deducción típica de $\mathfrak{T}_1$ y sea $\mathfrak{E}_1$ la parte de $\mathfrak{D}_1$ que constituye una deducción-F típica de $\mathfrak{T}_1$ a partir de premisas que o bien están en $\mathfrak{B}$ o bien son proposiciones simples de $\mathfrak{D}$. Así tenemos una deducción $\mathfrak{E}_1'$ que consta de $\mathfrak{E}_1$ seguida por una reducción de predicado y que lleva a $\mathfrak{T}_2$. Ahora aplicamos a $\mathfrak{E}_1'$ el proceso de normalización de § 1. Esto convertirá a $\mathfrak{E}_1'$ en una deducción-F típica $\mathfrak{E}_2$ que termina en $\mathfrak{T}_2$. El único cambio ocurrido en las premisas al pasar de $\mathfrak{E}_1$ a $\mathfrak{E}_2$ tiene lugar en la principal, la cual está en $\mathfrak{B}$. Como el cambio en cuestión es una reducción de predicado, la nueva premisa se encuentra también en $\mathfrak{B}$. Las premisas simples de $\mathfrak{E}_2$ son las mismas de $\mathfrak{E}_1$. Por tanto, la subrogación de $\mathfrak{E}_1$ por $\mathfrak{E}_2$ convierte a $\mathfrak{D}_1$ en una deducción típica $\mathfrak{D}_2$ de $\mathfrak{T}_2$.

La anterior argumentación constituye una demostración del teorema de tipificación para $\mathscr{F}_1{}^g$, a saber:

TEOREMA 3. *Sea $\mathfrak{B}^g$ el cierre respecto de la reducción de predicado del conjunto de todos los axiomas de $\mathscr{F}_1{}^g$. Entonces toda proposición $\mathfrak{T}$ que sea derivable en $\mathscr{F}_1{}^g$ es tipificable en sentido débil respecto de $\mathfrak{B}^g$.*

OBSERVACIÓN. El teorema seguiría siendo verdadero si añadiéramos a $\mathfrak{B}^g$ cualesquiera proposiciones estrictamente simples.

[12 bis] (Añadida en galeradas). La demostración del lema 3 (§ B3) con este cambio en B2 es trivial.

4. Tipificación fuerte

En el teorema B5 hemos usado la hipótesis de que $\mathfrak{B}$ es tipificadora en sentido fuerte. Tiene, por tanto, algún interés mostrar que $\mathfrak{B}$ tiene esa propiedad. Esto supone simplemente el establecimiento para las deducciones-FR de teoremas análogos a los de § 9C. No parece que ello conlleve dificultad especial alguna. De todos modos, no hemos examinado los detalles, y dejamos, consiguientemente, abierta la cuestión.

D. TEORIAS RESTRINGIDAS

Vamos a explorar ahora la segunda posibilidad mencionada en § A3, a saber, la de admitir todos los esquemas axiomáticos, pero imponiendo restricciones a los obs-F. La restricción natural sugerida por § A3 consiste en negar la posibilidad de que un ob-F pueda reducirse a un compuesto-F, o, dicho de otro modo, en exigir que todos los simples-F sean estrictos. La consistencia-I de una tal teoría —a la que llamamos $\mathscr{F}_1{}^r$— puede, efectivamente, demostrarse. De todos modos, $\mathscr{F}_1{}^r$ no puede dar una definición de igualdad del tipo considerado en § A2. Por esta razón es deseable —y resulta, además, factible— modificar la teoría de tal modo que pueda aceptarse con toda generalidad el esquema (FI). En esta sección demostraremos el teorema de tipificación para el sistema $\mathscr{F}_1{}^s$ modificado de dicho modo. Queda como cuestión abierta la de si puede o no hacerse lo mismo para la teoría fuerte $\mathscr{F}_1{}^t$, en la cual se aceptan todos los axiomas de $\mathscr{F}_1{}^g$.

1. Formulación

Como se ha dicho en la introducción, vamos a considerar una teoría en la cual hay dos clases de axiomas. Por una parte, aceptaremos axiomas de los esquemas (FS) y (FK), pero exigiendo que los simples-F lo sean estrictamente; por otro lado, aceptaremos, además, instancias cualesquiera del esquema (FI).

Para ordenar la situación distinguiremos entre dos teorías $\mathscr{F}_1{}^r$ y $\mathscr{F}_1{}^s$. En $\mathscr{F}_1{}^r$ exigimos que todos los simples-F sean estrictos sin excepción; $\mathscr{F}_1{}^s$ es la extensión de $\mathscr{F}_1{}^r$ en la que admitimos, además, instancias cualesquiera de (FI). Llamamos *propios* a los obs-F admisibles en $\mathscr{F}_1{}^r$, y a las proposiciones que los tienen como predicado; todos los demás son *impropios*.

La base $\mathfrak{B}^r$ de $\mathscr{F}_1{}^r$ será una base radical cuyas proposiciones no radicales serán todos los axiomas de los esquemas (FS) y (FK). Respecto de las proposiciones radicales imponemos las condiciones siguientes:

B4. *Si $\mathfrak{T}$ es una proposición radical y $T \succ T'$, entonces T' es también una proposición radical.*

B5. *Las proposiciones radicales son simples-F.*

Estas condiciones implican que todas las proposiciones radicales tienen predicados estrictamente simples-F; pero son algo más fuertes, pues el predicado I de I ($\mathsf{F}\alpha\beta X$) es estrictamente simple-F, aunque $\mathsf{I}(\mathsf{F}\alpha\beta X) \geq \mathsf{F}\alpha\beta X$, que es compuesto [13].

Al aplicar la definición de deducción típica (§ B3), al caso de $\mathscr{F}_1{}^r$, debe entenderse que las premisas simples de la deducción-F especificadas en la cláusula (b) de la definición B2 tienen que ser propias; además, el sentido en que debe entenderse la reducción a propósito de la exigencia de que esas deducciones-F sean típicas en el sentido fuerte.

Como $\mathfrak{B}^r$ es una extensión normal de una base axiomática, la condición B1 queda satisfecha con la reducción tomada en sentido fuerte. La condición B2 es vacía. Definimos $\xi \boldsymbol{R} \eta$ como significativa de que η se obtiene de ξ por sustitución-F reductiva. Esta relación $\boldsymbol{R}$ no tiene la propiedad R1 (en particular pueden faltar (μ) y (v)); pero tiene, obviamente, las propiedades R2 y R3, de lo que se sigue la propiedad R4 por el teorema B3. Por tanto, todo lo que se necesita para demostrar el teorema de tipificación es establecer la propiedad B3. Lo haremos en § 2.

La base $\mathfrak{B}^s$ para $\mathscr{F}_1{}^s$ se formará añadiendo a $\mathfrak{B}^r$ como axiomas (impropios) todas las proposiciones de la forma

$$(1) \qquad \vdash \mathsf{F}XY\mathsf{I},$$

con $X = Y$. Entonces B4 vale tanto para los axiomas impropios como para los radicales. La propiedad B2 vuelve a ser vacía. De todas maneras no está claro si B1 vale o no. Demostramos el teorema de tipificación para $\mathfrak{B}^s$ modificando la definición de deducción típica de tal modo que no tengamos que saber previamente si B1 vale o no vale para $\mathfrak{B}^s$. Esto se hará en § 3.

2. El teorema de tipificación para $\mathscr{F}_1{}^r$

Demostramos primero un teorema del que se sigue como corolario la propiedad B3.

---

[13] Como ejemplos de posibles proposiciones radicales mencionamos proposiciones de la forma $\vdash QXY$, con Q como ob primitivo y $X = Y$. Así tendríamos que tratar la igualdad si no tuviéramos $\mathscr{F}_1{}^s$.

TEOREMA 1. *Si* $\mathfrak{T}_1$ *es típica y* $T_1 = T_2$, *entonces hay una* $\mathfrak{T}_3$ *típica al que*

$$T_1 \succ T_3, \qquad T_2 \succ T_3. \tag{2}$$

Demostración. Por el teorema de Church-Rosser habrá una $\mathfrak{T}_3$ tal que (2) vale. Tenemos que mostrar que es posible encontrar una que sea típica.

Si $\mathfrak{T}_1$ es simple-F, es una proposición radical. Por tanto, de B4 se sigue que $\mathfrak{T}_3$ es una proposición radical y, consiguientemente, típica.

Si $\mathfrak{T}_1$ es compuesta tiene que haber un ξ, un η, un X y un Y tales que

$$T_1 \equiv \xi X, \qquad T_3 \equiv \eta Y.$$

con

$$\xi \succ \eta, \qquad X \succ Y. \tag{3}$$

Por el teorema B2 podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\xi \boldsymbol{R} \eta$. Sea $T_1' = \eta X$.

Sea $\mathfrak{D}_1$ la deducción típica que termina en $\mathfrak{T}_1$, y sea $\mathfrak{E}_1$ la parte de $\mathfrak{D}_1$ que constituye una deducción-F típica que termina en $\mathfrak{T}_1$ a partir de premisas que están en $\mathfrak{B}$ o son simples-F. Entonces la sustitución-F $\mathfrak{S}$ que pasa de ξ a η convertirá a $\mathfrak{E}_1$ en una deducción-F típica $\mathfrak{E}_1'$ que termina en $\mathfrak{T}_1'$. Como los simples-F lo son estrictamente, una premisa simple se convertirá por $\mathfrak{S}$ en una premisa simple de $\mathfrak{E}_1'$. Según esto, $\mathfrak{E}_1'$ será una deducción-F típica de base normal.

Por los teoremas de § 9F en términos de reducibilidad fuerte la reducción de la derecha de (3) tiene que proceder dentro de los elementos radicales de $\mathfrak{E}_1'$. Sean $U_1, \ldots, U_r$ los elementos radicales que no se reducen trivialmente, supongamos que hay un sufijo especial i, para cada instancia y supongamos que U_i de X queda subrogado por V_i en Y. Por el teorema de construcción de sujeto convertiremos a $\mathfrak{E}_1'$ en una deducción-F típica $\mathfrak{E}_3$ con terminación de $\mathfrak{T}_3$, si hacemos esas subrogaciones en los lugares correspondientes por todo $\mathfrak{E}_1'$.

Quedan por examinar las premisas de $\mathfrak{E}_3$. Sea $\mathfrak{T}_4$ una de las premisas de $\mathfrak{E}_1$, y $\mathfrak{T}_5$ la correspondiente premisa de $\mathfrak{E}_3$. Entonces $\mathfrak{T}_5$ se obtiene de $\mathfrak{T}_4$ mediante una sustitución-F reductiva en el predicado y reducción fuerte en el sujeto. Si $\mathfrak{T}_4$ es una instancia de (FK) o (FS) entonces es otro caso del mismo esquema. Por otro lado, si $\mathfrak{T}_4$ es simple, $\mathfrak{T}_5$ lo es también (puesto que los simples-F son estrictos); además, hay una $\mathfrak{T}_6$ típica por encima de $\mathfrak{T}_4$ en $\mathfrak{D}_1$ tal que $T_4 = T_6$. En este caso $T_5 = T_6$, y $\mathfrak{T}_5$ es semitípica como $\mathfrak{T}_4$. Se sigue de todo ello que la

conversión de $\mathfrak{E}_1$ en $\mathfrak{E}_3$ convierte a $\mathfrak{D}_1$ en una deducción típica $\mathfrak{D}_3$ con terminación en $\mathfrak{T}_3$, q. e. d.

COROLARIO 1. 1. *La base* $\mathfrak{B}^r$ *tiene la propiedad B3.*

COROLARIO 1.2. *Las conversiones permitidas en la definición de la deducción típica pueden reducirse a expansiones sin pérdida de generalidad.*

Teniendo en cuenta la discusión de § 2 tenemos ya el teorema de tipificación:

TEOREMA 2. *Si* $\mathfrak{T}$ *es deducible de* $\mathfrak{B}^r$, *entonces* $\mathfrak{T}$ *es tipificable respecto de* $\mathfrak{B}^r$.

OBSERVACIÓN. Si demostráramos que $\mathfrak{B}^s$ es tipificadora en sentido fuerte (cfr. § C4), entonces podríamos suplementar la verificación de B3 de § C3 con la misma argumentación que allí se usó respecto de las reducciones de sujeto. De este modo podría mostrarse que el teorema 1 se aplica al sistema $\mathscr{F}_1^s$.

3. EXTENSIÓN A $\mathscr{F}_1^s$

Como se ha dicho ya en § 1, modificamos la definición de deducción típica en relación con $\mathscr{F}_1^s$. Esta modificación se refiere a la cláusula (b) de la definición B2; insistimos en que una proposición compuesta tiene que estar en $\mathfrak{B}^s$ o ser la conclusión de una deducción-F típica (con reducción en el sentido fuerte) cuyas premisas sean proposiciones de $\mathfrak{B}^r$ o simples-F. Tenemos que examinar la demostración del teorema de tipificación para ver qué cambios son necesarios con esta modificación, observando que las deducciones-F mencionadas son esenciales como en $\mathscr{F}_1^r$.

Si realizamos este examen en la demostración de § B3, comprobamos que los lemas 1, 2, y 3 siguien siendo válidos y que, dado el lema 4, lo mismo puede decirse del lema 5. Igualmente, la demostración del teorema 1 (§ 2) queda sin afectar para una $\mathfrak{T}_1$ propia; para el caso de que $\mathfrak{T}_1$ sea impropia cfr. § A4. No queda por considerar más que la posibilidad de que $\mathfrak{T}_1$ o $\mathfrak{T}_2$ sean impropias en el lema 4.

Si $\mathfrak{T}_1$ es impropia, entonces (con referencia a la demostración del lema 4 en § B3) $\xi = \eta$ y $f = \mathrm{I}$. Entonces $T_3 = T_2$ y el lema se sigue por el lema 2.

Si $\mathfrak{T}_1$ es propia, entonces la demostración de § B3 no requiere cambio más que en el caso de que ξ sea compuesto y $\mathfrak{T}_2$ impropia. En este caso, en vez de derivar § B(6), determinamos ξ'' por el teorema B2, de tal modo que

$$\xi \boldsymbol{R} \xi'', \qquad \zeta \succ \xi''.$$

Entonces tiene que haber obs-F propios ρ, σ tales que $\rho = \sigma$ y $\xi'' \equiv \mathsf{F}\rho\sigma$. Por el teorema B3 determinamos τ de tal modo que $\rho \; \boldsymbol{R} \; \tau$ y $\sigma \; \boldsymbol{R} \; \tau$. Sea $\xi' \equiv \mathsf{F}\tau\tau$, y supongamos a $\mathfrak{T}_2'$ definida como en § B3. Entonces $\mathfrak{T}_2'$ es una instancia propia del esquema (FI) y es, por tanto, típica en $\mathscr{F}_1^{\,r}$ [14]. A partir de aquí podemos proceder como en § B3.

Por tanto, el teorema de tipificaión vale para $\mathscr{F}_1^{\,s}$:

TEOREMA 3. *Supongamos que* $\mathfrak{T}$ *es deducible de* $\mathfrak{B}^s$ *mediante las reglas* F *y* Eq. *Entonces* $\mathfrak{T}$ *es tipificable en el sentido modificado.*

La modificación no afecta a los teoremas de § B4.

4. UNA CUESTIÓN ABIERTA

El resultado obtenido en § 3 puede considerarse como una combinación del resultado de § 2 con el de § A4. Es natural preguntarse si no podemos formar una combinación análoga de los sistemas $\mathscr{F}_1^{\,g}$ y $\mathscr{F}_1^{\,r}$. Pues es plausible que el sistema —llamémosle $\mathscr{F}_1^{\,t}$— en el que aceptáramos todos los axiomas de $\mathscr{F}_1^{\,g}$ junto con los de $\mathscr{F}_1^{\,r}$ fuera consistente. Esta cuestión queda abierta.

E. FORMULACION FINITA

Los axiomas de las varias teorías consideradas hasta ahora, con la excepción de la del teorema A5, eran en número infinito, puesto que comprendían todas las instancias de los esquemas axiomáticos. Pero ya vimos en el capítulo **8** que la generalidad puede expresarse por medio de F y que, por tanto, tendría que ser posible establecer un conjunto finito de axiomas a partir de los cuales puedan deducirse formalmente todas las instancias de los primitivos esquemas axiomáticos. Esto se hizo en § A4 para el sistema $\mathscr{F}^f$ (I). En esta sección elaboraremos el aparato necesario para hacerlo con todos los sistemas. Al hacerlo derivaremos algunos elementales teoremas acerca de métodos de expresar la generalidad, los cuales pueden ser útiles también en otros contextos. La formulación finita se dará en § 4. La consistencia del sistema de § 4 se discute en § 5; demostramos la consistencia de un sistema considerablemente debilitado dejando abierto el problema de la consistencia del sistema pleno.

---

[14] Está en $\mathfrak{B}^r$ (cfr. segundo párrafo de § 9F6, pág. 419).

1. Métodos de expresar la generalidad

Sea ξ un ob tal, que vale la siguiente

Regla ξ. $\qquad \xi fg, fX \vdash gX.$

La proposición de $\vdash \xi fg$ expresa entonces la inclusión de f en g, ordinariamente simbolizada por $f \subseteq g$, y el ob ξf expresa la generalidad sobre la categoría de f. Si definimos

$$\Pi \equiv \xi \mathsf{E}, \tag{1}$$

entonces Π expresa la generalidad universal absoluta; y si definimos

$$\mathsf{P} \equiv [x, y]\, \xi\, (\mathsf{K}x)\, (\mathsf{K}y), \tag{2}$$

entonces P expresa la implicación y obedece a la regla

Regla P. $\qquad \mathsf{P}pq, p \vdash q.$

En relación con un tal ξ resulta conveniente definir otras notaciones, del modo siguiente:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{X} \supset_x \mathfrak{Y} \equiv \xi\, ([x]\, \mathfrak{X})\, ([x]\, \mathfrak{Y}), \\ &p \supset q \equiv \mathsf{P}pq. \end{aligned} \tag{3}$$

La última definición, si x no se presenta en p o q, es equivalente, por virtud de (3) a

$$p \supset q \equiv p \supset_x q.$$

Además, de acuerdo con la interpretación de $\xi\alpha$ como generalidad sobre α, definimos

$$(\forall fx)\, \mathfrak{X} \equiv fx \supset_x \mathfrak{X} \equiv \xi f([x]\, \mathfrak{X}). \tag{4}$$

Por último, definimos por inducción sobre m

$$(\forall f_1 x_1) \ldots (\forall f_m x_m)\, \mathfrak{X} \equiv (\forall f_1 x_1)\, ((\forall f_2 x_2) \ldots (\forall f_m x_m)\, \mathfrak{X}). \tag{5}$$

El desarrollo de estas definiciones para el caso de que ξ sea un ob primitivo nos ocupará en el segundo volumen. En la teoría de la fun-

cionalidad hay dos nociones distintas que pueden tomarse para ξ, a saber:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \xi' &\equiv [x,y] \,.\, \mathsf{F}xy\mathsf{I}, \\ \xi'' &\equiv [x]\mathsf{F}x\mathsf{I} \qquad (\equiv [x,y].\, \mathsf{F}x|y). \end{aligned}$$

Estas nociones no son las mismas en todo sistema para el que valga el esquema (FI) y el teorema de tipificación sea válido respecto de una base $\mathfrak{B}$ tipificadora en sentido fuerte. Pues ξ' es reflexivo por (FI), mientras que ξ'' no lo es, en general, por el teorema B5. Por tanto, tenemos que adoptar definiciones análogas a (1)-(6) tanto para ξ' cuanto para ξ'', distinguiendo mediante índices y dobles índices cual de los dos ξ' se toma como básico. Aunque la definición es algo más sencilla para ξ'' (podemos tomar $\xi'' = \mathsf{CFI}$), carece de ciertas simples propiedades que tienen, en cambio, ξ'.

2. Propiedades de ξ'

Vamos a demostrar aquí que la relación ξ' es reflexiva y transitiva, y que tiene una propiedad de subrogación en relación con F, propiedad que es a veces conveniente nombrar y a la que llamaremos propiedad (FP). Los teoremas se demuestran sobre la base de $\mathscr{F}_1^s$. Las letras griegas denotan obs-F propios.

Teorema 1. *La relación ξ' es reflexiva, es decir, para todo X tenemos*

$$(7) \qquad \vdash \xi' XX.$$

Demostración. Como ya se ha observado, (7) es una instancia (propia o impropia) de (FI).

Teorema 2. *La relación ξ' es transitiva para obs-F propios*[15], *es decir: si ξ, η, ζ son obs-F propios tales que*

$$\vdash \xi' \xi\eta \quad y \quad \vdash \xi' \eta\zeta,$$

entonces

$$\vdash \xi' \xi\zeta.$$

Demostración. Por hipótesis y la definición de ξ', tenemos

$$\vdash \mathsf{F}\xi\eta\mathsf{I}, \qquad \vdash \mathsf{F}\eta\zeta\mathsf{I}.$$

---

[15] La limitación a obs-F propios se impone en el uso del esquema (FB); en la teoría $\mathscr{F}_1^t$ no habría tal limitación.

Por el esquema (FB) tenemos

$$\vdash \mathsf{F}_2(\mathsf{F}\eta\zeta)\,(\mathsf{F}\xi\eta)\,(\mathsf{F}\xi\zeta)\mathsf{B}.$$

Por tanto, por dos aplicaciones de la regla F,

$$\vdash \mathsf{F}\,\xi\zeta(\mathsf{BII}).$$

Como $\mathsf{BII} = \mathsf{I}$, esto da la solución deseada por la regla Eq'.

TEOREMA 3. (Propiedad (FP)). Sea

$$\vdash \xi'\,\xi_i'\,\xi_i \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{8}$$

y

$$\vdash \xi'\,\eta\eta'. \tag{9}$$

Entonces

$$\vdash \xi'\,(\mathsf{F}_m\,\xi_1 \ldots, \xi_m\eta)\,(\mathsf{F}_m\xi_1' \ldots \xi_m'\eta'). \tag{10}$$

Demostración. Sea

$$\mathfrak{U} \equiv u(z(v_1x_1)\,(v_2x_2) \ldots (v_mx_m)),$$
$$U \equiv [z,x_1, \ldots, x_m]\,\mathfrak{U}.$$

Entonces sobre la base

$$\begin{matrix} \mathsf{F}\eta\eta'u, \\ \mathsf{F}\xi_i'\,\xi_i\,v_i \end{matrix} \qquad i = 1, 2, ..., m, \tag{11}$$

tenemos una deducción-F

$$\zeta\,z,\xi_1'x_1 \ldots, \xi_m'x_m \vdash \eta'\,\mathfrak{U},$$

con

$$\zeta \equiv \mathsf{F}_m\,\xi_1 \ldots \xi_m\eta.$$

Dicho de otro modo, $\mathfrak{U}$ es estratificada en términos de $\zeta, \xi_1', \ldots, \xi_m', \eta'$ sobre la base (11). Por el teorema de la estratificación se sigue de (11) que

$$\vdash \mathsf{F}_{m+1}\,\zeta\xi_1' \ldots \xi_m'\eta'U. \tag{12}$$

Si ponemos $u \equiv v_1 \equiv v_2 \equiv \ldots \equiv v_m \equiv \mathsf{I}$, las premisas (11) quedan satisfechas por (8) y (9). Por otro lado, $\mathfrak{U} \equiv zx_1 \ldots x_m$, y, por tanto, $U = \mathsf{I}$. Así (10) se sigue de (12) y la regla Eq'.

3. Propiedades de ξ''

Se ha observado ya que ξ'' no es reflexiva; esto se sigue del teorema B5 siempre que valga el teorema de tipificación y que la base sea tipificadora en sentido fuerte. Tampoco conocemos ninguna razón para pensar que sea transitiva.

Pero hay un caso en el cual ξ'' tiene una ligera ventaja sobre ξ'. Tenemos, en efecto, la inferencia sustitutiva

$$(13) \qquad (\forall \xi x)'' \mathfrak{X}, \mathsf{F}\eta\xi\,([y]\,\mathfrak{Y}) \vdash (\forall \eta y)''\,([\mathfrak{Y}/x]\,\mathfrak{X}).$$

Pues si ponemos

$$X \equiv [x]\,\mathfrak{X}, \qquad Y \equiv [y]\,\mathfrak{Y},$$
$$\mathfrak{Z} \equiv [\mathfrak{Y}/x]\,\mathfrak{X}, \qquad Z \equiv [y]\,\mathfrak{Z},$$

entonces la inferencia (13) resulta

$$\mathsf{F}\xi\mathsf{I}X, \mathsf{F}\eta\,\xi Y \vdash \mathsf{F}\eta\mathsf{I}Z,$$

que, puesto que $Z = \mathsf{B}XY$, se sigue por dos aplicaciones de la regla F a una instancia de (FB), a saber,

$$\mathsf{F}_2\,(\mathsf{F}\xi\mathsf{I})\,(\mathsf{F}\eta\xi)\,(\mathsf{F}\eta\mathsf{I})\mathsf{B}.$$

Pero esta propiedad no puede generalizarse a casos con más de un argumento. Ni ξ' ni ξ'' nos permiten derivar la siguiente propiedad, que es intuitivamente obvia: sea

$$Y_i \equiv [y_1, \ldots, y_n]\,\mathfrak{Y}_i, \qquad i = 1, \ldots, m.$$
$$\mathfrak{Z} \equiv [\mathfrak{Y}_1/x_1] \ldots [\mathfrak{Y}_m/x_m]\,\mathfrak{X},$$

y supongamos que

$$\vdash (\forall \xi_1 x_1) \ldots (\forall \xi_m x_m)\,\mathfrak{X},$$
$$\vdash \mathsf{F}_n\,\eta_1\eta_2 \ldots \eta_n\,\xi_i\,Y_i;$$

entonces

$$(\forall \eta_1 y_1) \ldots (\forall \eta_n y_n)\,\mathfrak{Z}.$$

La derivación de esta propiedad como regla derivada en la teoría de la

generalidad restringida es posible, pero no lo es, en cambio, en la teoría de la funcionalidad.

Estas consideraciones muestran la debilidad de la teoría de la funcionalidad, ya antes, por lo demás, comentada. También muestran que pocos motivos puede haber, si hay alguno, de preferir ξ'' a ξ'.

4. Formulación finita en base a L

Podemos conseguir una formulación finita para el sistema $\mathscr{F}_1^s$ introduciendo un nuevo ob primitivo L, cuya interpretación es la categoría de los obs-F propios. Como axiomas de la teoría podemos tomar los siguientes:

Ax. [FI]. $\vdash (\forall\, \mathsf{E}x)'.\ \mathsf{F}xx\mathsf{I}.$

Ax. [FE]. $\vdash (\forall\, \mathsf{E}x)'.\ \mathsf{FEE}x.$

Ax. [FL]. $\vdash \mathsf{FL(FLL)F}.$

Ax. [FK]. $\vdash (\forall\, \mathsf{L}x)'\ (\forall \mathsf{L}y)'.\ \mathsf{F}x(\mathsf{F}yx)\mathsf{K}.$

Ax. [FS]. $\vdash (\forall \mathsf{L}x)'\ (\forall \mathsf{L}y)'\ (\forall \mathsf{L}z)'.\ \mathsf{F}_3(\mathsf{F}_2xyz)\ (\mathsf{F}xy)xz\mathsf{S}.$

Además, para cada ob primitivo X,

Ax. [EX] $\vdash \mathsf{E}X,$

y para cada simple-F propio θ,

Ax. [Lθ]. $\vdash \mathsf{L}\theta.$

Podemos, además, admitir un conjunto cualquiera de axiomas de la forma

(14) $\vdash \theta X,$

siempre que se satisfagan las condiciones de § D.

Tenemos entonces

(15) $\vdash \mathsf{E}X$

para todo ob X, primitivo o no; pues mediante la argumentación siguiente (cuya premisa principal es Ax [FE]) conseguimos la regla E

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathsf{FE(FEE)I} \qquad \mathsf{E}X}{\mathsf{FEE}(\mathsf{I}X)}\,\mathsf{F}}{\mathsf{FEE}X}\,\mathrm{Eq} \qquad \mathsf{E}Y}{\mathsf{E}(XY).}\,\mathsf{F}$$

Análogamente, utilizando Ax. [Lθ] y Ax. [FL], tenemos

(16) $$\vdash \mathsf{L}\xi$$

para todo F-ob ξ.

No se ve entonces ninguna razón para no admitir a E, L e I como simples-F, tomando así Ax [Lθ] para los casos especiales en los cuales $\theta = \mathsf{E}$, $\theta \equiv \mathsf{L}$ y $\theta \equiv \mathsf{I}$. Esos tres obs tienen como interpretaciones la categoría de todas las entidades, la categoría de todas las categorías o propiedades [16], y la categoría de todas las proposiciones verdaderas, respectivamente. Otras nociones que también podríamos tomar como obs-F sin que parezcan causar deficultades no tienen la naturalidad intuitiva de esas tres.

Como un ob-F representa una propiedad, puede ser más natural llamar L_1 a la categoría de los obs-F, e introducir una nueva categoría L_0 correspondiente, aproximadamente, a las proposiciones. En este caso podemos postular

(17) $$\mathsf{L}_1 \equiv \mathsf{FEL}_0.$$

Por otro lado, podemos desear admitir en L_1 funciones que hacen una proposición no a partir de cualquier entidad, sino sólo a partir de entidades de alguna categoría determinada; esto equivaldría a tomar como primitivas tanto L_1 cuanto L_0 postulando

(18) $$\mathsf{FL}_1\mathsf{L}_1(\mathsf{CFL}_0).$$

Los supuestos hechos aquí respecto de L y otras nociones relacionadas con ella deben entenderse como hechos por vía de ensayo. En el segundo volumen tendremos ocasión de revisarlos.

---

[16] La noción de «término canónico» introducida en [ACT] por precaución corresponde a la misma noción intuitiva.

5. Cuestiones de consistencia

Aunque las relaciones del sistema de § 4 con el de § D presentan como muy plausible la afirmación de que el primero sea consistente, no conocemos demostración formal de la misma. Daremos aquí una demostración de consistencia que se aplica si el sistema queda un tanto debilitado previamente. Esta debilitación consiste en subrogar F en determinadas instancias por un nuevo ob primitivo F′ para el cual adoptamos una regla F′ análoga a la regla F.

$$\mathsf{F}'XYZ, XU \vdash Y(ZU).$$

Los F′ así introducidos son todos los de los cuantificadores $(\forall \mathsf{E}x)'$, $(\forall \mathsf{L}x)'$, etc., junto con los de Ax(FE) y Ax(FL) (excepto en que se encuentra en el extremo de la derecha).

Si partimos con los axiomas antes dados y aplicamos la regla F′ de todos los modos posibles, producimos quince tipos de proposiciones que se dan en la tabla de más abajo. En esta tabla ξ, η, ζ son obs-F propios, θ es un simple-F sujeto a las restricciones de § D, y {FK} y {FS} se definen del modo siguiente:

$$\{\mathsf{FK}\} \equiv [x,y].\ \mathsf{F}x(\mathsf{F}yx)\mathsf{K},$$
$$\{\mathsf{FS}\} \equiv [x,y,z]\ \mathsf{F}_3\,(\mathsf{F}_2xyz)\,(\mathsf{F}xy)xz\mathsf{S}.$$

Las formas-tipo se dan en la columna "$\mathfrak{T}_1$". En las columnas "$\mathfrak{T}_2$", "$\mathfrak{T}_3$" se dan los tipos de la premisa menor y la conclusión, respectivamente, de una inferencia-F′ válida cuya premisa mayor es $\mathfrak{T}_1$.

Al establecer esta tabla no se han tenido en cuenta aplicaciones de la regla Eq. Como en § A4, se entiende que una proposición pertenece a un tipo dado si es convertible con una proposición de la forma de dicho tipo indicada en la tabla. Si una tal proposición es premisa mayor, $\mathfrak{T}_1$, de una inferencia-F′, es compuesta-F′. Por el lema de § 8E4, $\mathfrak{T}_1$ no puede ser de los tipos III (si E es simple-F′), IX o XIV; IV y XV son imposibles porque también ellos son simples-F′. En los demás casos se sigue del mismo lema que $\mathfrak{T}_1$ puede diferir de la forma-tipo indicada sólo en el hecho de que algunos argumentos-F′ estén subrogados por otros iguales. Así, dos instancias de E pueden ser subrogadas por obs E_1 y E_2 tales que $E_1 = E_2 = \mathsf{E}$. Lo mismo dos instancias de L, de X, etc.

TABLA 1

Tipo	$\mathfrak{T}_1$	$\mathfrak{T}_2$	$\mathfrak{T}_3$
I	F′E([x] . Fxx!)I	III	IV
II	F′E(F′EE)I	III	V
III	EX	imposible	
IV	FXXI	(todo)	(= T_2)
V	F′EEX	III	III
VI	F′L(F′LL)F	IX	X
VII	F′L([x](∀Ly)′.{FK}xy)I	IX	XI
VIII	F′L([x](∀Ly)′ (∀Lz)′.{FS}xyz)I	IX	XII
IX	Lξ	imposible	
X	F′LL(Fξ)	IX	IX
XI	F′L({FK}ξ)I	IX	XV({FK}$\xi\eta$)
XII	F′L([y] (∀Lz)′.{FS}ξyz)I	IX	XIII
XIII	F′L{FS}$\xi\eta$)I	IX	XV ({FS}$\xi\eta\zeta$)
XIV	θX	imposible	
XV	Típica en $\mathfrak{F}_1^s$	imposible	

Observaciones a la tabla

Salvo por lo que hace a los índices puestos a algunos F, los tipos I, II, VI, VII, VIII son, respectivamente, Ax[FI], Ax[FE], Ax[FI], Ax[FK], Ax[FS], mientras que los tipos III, IX y XIV incluyen Ax(EX], Ax[Lθ] y (14). Las indicaciones entre paréntesis de las columnas $\mathfrak{T}_2$ y $\mathfrak{T}_3$ del tipo IV son otras posibilidades para el caso de que el segundo F del tipo I —y, por tanto, también el de tipo IV— lleven índice. El tipo XV se especifica más exactamente a continuación.

Conclusiones

Si tomamos F′ como ob primitivo distinto de F, entonces todas las proposiciones de las formas-tipo I-III, V-XIV son simples-F; y éstas, junto con las obtenidas a partir de ellas mediante reducciones, satisfacen todas las condiciones puestas a las proposiciones radicales de la base $\mathfrak{B}^s$ (§ D3). Según esto, el teorema de tipificación vale respeto de esta base para inferencias mediante las reglas F y Eq. Consideramos que el tipo XV consta de todas las proposiciones típicas del $\mathfrak{F}_1^s$ así constituido. Entonces, el conjunto de proposiciones de los quince tipos, tomados

conjuntamente, contiene todos los axiomas y es cerrado respecto de las reglas Eq, F y F′. Esto demuestra la consistencia del sistema modificado, y más precisamente su consistencia-I respecto de F [17].

Esto no demuestra, empero, la consistencia del sistema original a causa de la dificultad siguiente. Supongamos que X' se obtiene de X mediante subrogación de una o más instancias de F por F′. Entonces la inferencia

$$\mathsf{F}XYZ, X'U \vdash Y(ZU)$$

no es válida en el sistema modificado, pero resulta válida si se identifican F y F′. Esta dificultad queda sin resolver [18].

---

[17] El sistema no es consistente-I respecto de F′, pues contiene inclusiones propias.

[18] [En § A4 se halló que la formulación finita de $\mathfrak{F}_1\mathsf{f}(\mathsf{I})$ en términos de ξ'' tenía algunas ventajas de que carece la formulación en términos de ξ'. La posibilidad análoga en este caso está aún por estudiar.]

Lista de constantes básicas

La tabla 1 relaciona todas las letras y otros símbolos análogos usados para formar nombres de obs determinados a menudo en combinación con diversos afijos. La tabla incluye no sólo los símbolos ya usados en este volumen, sino también los que reservamos para uso posterior, junto con indicaciones acerca de notaciones correspondientes usadas en otras obras.

Explicación de las columnas.

La columna 1 da la notación adoptada. Los símbolos entre paréntesis no han sido usados en el presente volumen, o no lo han sido más que ocasionalmente; la asignación de esos símbolos se hace, desde luego, a título de ensayo.

La columna 2 da una breve explicación. Para ulteriores explicaciones hay que consultar el índice analítico.

La columna 3 representa el uso seguido en anteriores publicaciones de Curry, principalmente [CFM], [PKR]. Las notaciones entre paréntesis no se propusieron formalmente, sino que sólo se usaron en las notas.

La columna 4 es la notación de Cogan [FTS].

La columna 5 es la notación de Schönfinkel [BML].

La columna 6 presenta la notación de la escuela de Church. Las notaciones se toman, principalmente, de Church (CLC]; pero muchas de ellas aparecieron inicialmente en su [SPF], en Rosser [MLV] o en Kleene [TPI].

La columna 7 da la notación de Rosenbloom [EML].

La columna 8 da la notación de las operaciones ilativas usada por Lukassiewicz.

Observaciones sobre la tabla

1. No se afirma que las notaciones dispuestas en la misma línea en las varias columnas sean sinónimas, sino sólo que están relacionadas.

En varios casos una fila no representa un mero ob, sino un complejo de nociones interrelacionadas y que hay que distinguir mediante afijos.

2. Varias de las letras están asociadas con infijos binarios que se usan generalmente para indicar el resultado de la aplicación de la función de que se trate a dos argumentos. Así 'Q' está asociada con '=', 'P' con '$\supset$', etc. Sería posible también usar el infijo como nombre de la función; así hace, por ejemplo, Rosenbloom. Esto sería aceptable si se aboliera el infijo en todas partes, es decir, si escribiéramos, por ejemplo, plo, siempre '$+xy$' en vez de '$x+y$'. Pero creemos que conviene alterar lo menos posible las notaciones ya tradicionalmente aceptadas en matemática (ésta es una de las razones por las cuales usamos mayúsculas); por tanto, es conveniente usar como nombre de la función un símbolo bien identificado y diverso del infijo. Un tal símbolo puede conseguirse, por ejemplo, incluyendo el infijo en una llave. Así, Rosser [MLV] usa '$\{=\}$' para 'Q'. Pero hemos creído que esas notaciones son poco prácticas para funciones que se presenten con frecuencia, por lo menos en textos escritos. La notación puede, en cambio, tenerse en cuenta para análogos combinatorios de funciones numéricas que no vayan a presentarse con mucha frecuencia.

3. Las letras 'D' y 'T' han sido usadas de varios modos hasta el presente. Church usó 'D' por W_*, Rosenbloom por BB en [PKR] para un par ordenado y en una obra inédita de Curry se usa por B' ($\equiv$ CB); por otro lado, 'T' ha sido usada por Rosser [MLV] para indicar C_*, y en [PKR] para indicar una enumeración gödeliana. Nos hemos decidido a usar 'D' como la 'D' de [PKR], dejando, en cambio, 'T' por el momento.

4. No se da ninguna explicación de 'T', 'X', 'T', 'Δ', 'ω'. Consideramos el uso de algunos de esos símbolos en el segundo volumen; pero nuestros planes son por el momento demasiado nebulosos como para dar ya precisiones. Las letras 'T', y 'Δ', se usaron para ciertos permutadores en [GKL] y en Rosser [MLV]; pero este uso debe sustituirse por el de § 5E2.

5. El lector observará que hay varias importantes nociones lógicas para las cuales no se suministran símbolos. Dos de éstas, que han sido importantes en anteriores trabajos de Curry, se incluyen al final de la tabla. Cierto número de otras, que pertenecen al ámbito de la teoría de conjuntos, aparecen en Cogan [FTS]. Posponemos al segundo volumen la decisión sobre los símbolos de esas nociones. Por lo que hace a la función sucesor para los números naturales —interpretada como el iterando de la secuencia Z_n— mostramos en § 5E5 que esta función es SB; esta notación es tan breve que puede dudarse de la conveniencia de un símbolo especial para dicho combinador.

TABLA 1

1	2	3	4	5	6	7	8
(A)	Abstracción	(A)			A[1]		
B	$\lambda xyz.\ x(yz)$	B	B	Z	B	B	
B′	$\lambda xyz.\ x(zy)$ (= CB)	(D)					
C	$\lambda xyz.\ xzy$	C	C	T	C	C	
C_*	$\lambda xy.\ yx$ (= C!)		C_*		T[2]	T	
D	n-tuplo ordenado	D	D, $\mathcal{T}$[3]		[4]	[[5]	
E	Categoría universal	E	E		E[6]	E	
F	Primitiva de funcionalidad	F	F			F	
(G)	Función generalizada	(G)					
(H)	Proposición	H	H			P	
I	$\lambda x.\ x$	I	I	I	I	I	
I_η	$\lambda xy.\ xy$				1		
J	$\lambda uxyz.\ ux(uzy)$				J[2]		
K	$\lambda xy.\ x$	K	K	C	K		
L	F-ob propio	(L)	(L)			P_1	
(M)	Conjunto	(M)	M				
(N)	Negación	N	N			$\sim$[7]	N
(O)	Conjunto nulo		$\varnothing$				
P	Implicación	P	P			$\supset$[7]	C
Q	Igualdad	Q	Q		$\{=\}$[2]	Q	Θ
(R)	Combinador de recursión	R				R	
S	$\lambda xyz\ .\ xz(yz)$	S	S	S		A	
(T)							
(U)	Suma de conjuntos (binario)		U				
(V)	Disyunción	(V)	V				A
W	$\lambda xy.\ xyy$	W	W		W	W	
W_*	$\lambda x.\ xx$ (= WI)				D		
(X)						Θ	
Y	Combinador paradójico						
Z	Iteradores	$\mathscr{Z}$	$\mathscr{Z}$		[8]	[8]	
($\mathcal{T}$)							
(Δ)							
(Θ)	Operador de descripción	Θ					
(Λ)	Conjunción	Λ	Λ				K
ξ	Generalidad restringida	ξ	ξ		Π	ξ	
Π	Generalidad universal	Π	Π				Π
(Σ)	Cuantificador existencial	(Σ)	Σ				
Φ	$\lambda xyzu.\ x(yu)\ (zu)$	Φ	Φ				
Ψ	$\lambda xyuv.\ x\ (yu)\ (yv)$	Ψ	Ψ				
ω							
	Sucesor (= SB)	S			S[6]	S	
	Número natural	$\mathscr{N}$			N[1]	$\mathfrak{N}$	

1 Church [SPF]; no usado en [CLC]. 2 Rosser [MLV]. 3 No es necesario más que un símbolo básico para las ideas interrelacionadas expresadas por 'D', 'T'. 4 Simbolizada por métodos heterogéneos con los principios de esta tabla. 5 Un corchete izquierdo usado como nombre. 6 Church [SPF]. 7 Cfr. nota 2. 8 No usa más que cifras ordinarias.

Lista de propiedades de relaciones

A continuación se representan propiedades de una relación $\boldsymbol{R}$ sin especificar. Llamamos reglas a esas propiedades, aunque no siempre lo son en sentido estricto. Muchas de ellas se hacen reglas, efectivamente, cuando se especializa $\boldsymbol{R}$. Son de dos clases: reglas generales, indicadas por minúsculas griegas entre paréntesis, y reglas de reducción para combinadores indicadas por el símbolo del combinador puesto entre paréntesis.

Se adoptan sobre esas reglas las convenciones siguientes: 1) Si $\boldsymbol{R}$ es una relación dada, definimos la relación $[\boldsymbol{R}]$ por la exigencia

$$X\ [\boldsymbol{R}]\ Y \rightleftarrows ZX\ \boldsymbol{R}\ ZY \text{ para todo ob } Z.$$

2) Para indicar que la propiedad $\boldsymbol{R}$ tiene ciertas propiedades añadimos al símbolo de $\boldsymbol{R}$ los nombres de las propiedades como índices y sin paréntesis, sustituyendo, además, las letras redondas por las correspondientes cursivas; así, la notación '$[\vdash]^{\rho\tau B\Phi\prime\prime}$', indica que la relación $[\vdash]$ tiene las propiedades (ρ), (τ), (B) y (Φ). 3) Cuando una regla contiene una implicación expresada por '$\rightarrow$', la regla es a veces muy útil con '$\Rightarrow$' en lugar de '$\rightarrow$'; en tal caso, la última forma se llama fuerte, y la forma inicial débil. Ordinariamente la distinción entre ambas se hace por el contexto; cuando es necesario ser explícitos la forma fuerte se indica mediante un índice: (σ').

Reglas generales

(α) (Regla I de Church). Si y no está libre en M,

$$\lambda y[y/x]M\ \boldsymbol{R}\ \lambda xM.$$

(β) (Regla II de Church).

$$(\lambda xM)N\ \boldsymbol{R}\ [N/x]M.$$

(γ) (Propiedades del prefijo de sustitución).

(γ_1) $[M/x]x \; \boldsymbol{R} \; M$.
(γ_2) $[M/x]y \; \boldsymbol{R} \; y$, si $x \neq y$.
(γ_3) $[M/x]\,(YZ) \; \boldsymbol{R} \; ([M/x]Y)\,([M/x]Z)$.
(γ_4) $[M/x]\,\lambda x X \; \boldsymbol{R} \; \lambda x X$.
(γ_5) $[M/x]\,\lambda y X \; \boldsymbol{R} \; \lambda z [M/x]\,[z/y]X$, con $y \neq x$ y z definido como en definición **3** E1.

(δ) Regla de reducción-δ: cfr. § 3D6.
(ε) Si $\boldsymbol{R}$ es producida por $\boldsymbol{R}_0$, $X \; \boldsymbol{R}_0 \; Y \rightarrow X \; \boldsymbol{R} \; Y$.
(ζ) (Principio de extensionalidad). Si x no se presenta en X o en Y, $Xx \; \boldsymbol{R} \; Yx \rightarrow X \; \boldsymbol{R} \; Y$.
(η) (Regla de reducción-η). Si x no se presenta libre en M, $\lambda x(Mx) \; \boldsymbol{R} \; M$.
(θ) $X \; \boldsymbol{R} \; Y \rightarrow X \vdash Y$.
(μ) (Monotonía izquierda) $X \; \boldsymbol{R} \; Y \rightarrow ZX \; \boldsymbol{R} \; ZY$.
(ν) (Monotonía derecha) $X \; \boldsymbol{R} \; Y \rightarrow XZ \; \boldsymbol{R} \; YZ$.
(ξ) $X \; \boldsymbol{R} \; Y \rightarrow \lambda x X \; \boldsymbol{R} \; \lambda x Y$.
(ρ) (Reflexividad) $X \; \boldsymbol{R} \; X$.
(σ) (Simetría) $X \; \boldsymbol{R} \; Y \rightarrow Y \; \boldsymbol{R} \; X$.
(τ) (Transitividad) $X \; \boldsymbol{R} \; Y \;\&\; Y \; \boldsymbol{R} \; Z \rightarrow X \; \boldsymbol{R} \; Z$.
(φ) $X \; \boldsymbol{R} \; Y \rightarrow X \; [\vdash] \; Y$.
(ψ) $X \; [\vdash] \; Y \rightarrow X \; \boldsymbol{R} \; Y$.
(χ) Propiedad de Church-Rosser: cfr. § 4A1, pág. 147.
(ω) Si $X = Y$ por virtud de un axioma combinatorio, $X \; \boldsymbol{R} \; Y$.

Reglas de reducción de combinadores

(B) $\mathsf{B}xyz \; \boldsymbol{R} \; x(yz)$.
(C) $\mathsf{C}xyz \; \boldsymbol{R} \; xzy$.
(C*) $\mathsf{C}_*xy \; \boldsymbol{R} \; yx$.
(I) $\mathsf{I}x \; \boldsymbol{R} \; x$.
(J) $\mathsf{J}uxyz \; \boldsymbol{R} \; ux(uzy)$.
(K) $\mathsf{K}xy \; \boldsymbol{R} \; x$.
(S) $\mathsf{S}xyz \; \boldsymbol{R} \; xz(yz)$.
(W) $\mathsf{W}xy \; \boldsymbol{R} \; xyy$.
(Φ) $\Phi xyzu \; \boldsymbol{R} \; x(yu)\,(zu)$.
(Ψ) $\Psi xyuv \; \boldsymbol{R} \; x(yu)(yv)$.

Bibliografía

Esta bibliografía no recoge, en principio, más que títulos citados en el texto. Los títulos se citan por el nombre del autor y el título mismo abreviado y entre corchetes. Estos títulos abreviados se relacionan aquí alfabéticamente bajo cada autor.

Para algunas obras básicas se usan las siguientes abreviaturas sin indicar el nombre del autor:

[CB] = Church [BSL].
[HA] = Hilbert y Ackermann [GZT].
[HB] = Hilbert y Bernays [GLM].
[PM] = Whitehead y Russell [PMth].

En cualquier otro caso una referencia sin nombre de autor (expreso o implícito) es a algún trabajo de Curry.

Las reseñas se indican mediante el título abreviado con 'res' delante. Se relacionan en la bibliografía al final de los demás títulos del mismo autor.

Cuando una obra es de más de un volumen, la referencia a un volumen determinado se hace escribiendo el número del volumen después del título abreviado y de un punto, todo ello dentro de los corchetes. Así, los dos volúmenes de [HB] son [HB. I] y [HB. II]. El mismo expediente se usa cuando una memoria aparece en diversas partes sueltas, tratando dichas partes como volúmenes. Las ediciones se indican por subíndices numéricos; así [PM. I_2] es la segunda edición del vol. I de *Principia Mathematica*, [HA_3] es la tercera edición de [HA].

Las referencias a partes determinadas de una obra se hacen por números de páginas, como es frecuente, o mediante las divisiones del autor mismo.

De vez en cuando ha resultado conveniente escribir entre corchetes el nombre del autor, las referencias a partes de su obra o ambas cosas a la vez. Así, [Church, CLC, p. 64] es una referencia a la página 64 de Church [CLC].

Las siguientes siglas se usan para algunas revistas:

Jsl. Jornal of Symbolic Logic.
MRv. Mathematical Reviews.
ZbM. Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete.

En general, los títulos de revista se abrevian según las normas de MRv. (cfr. vol. 15, páginas 1128-1138, publicado como Part II del vol. 16, núm. 4; también, para revistas más antiguas, listas análogas allí citadas en volúmenes anteriores). Cuando una revista no está relacionada en MRv., utilizamos una abreviatura según principios corrientes. Las referencias a partes de revistas, la transliteración del ruso, etc., se conformarán a la misma práctica, excepto en el detalle de que usamos una coma entre el número del volumen y el de la página al citar artículos de revistas.

Para más información bibliografica puede verse [CB], MRv. (con índices anuales),

la sección de reseñas de Jsl. (con índices por autores cada dos años y por temas cada cinco años), y otros instrumentos bibliográficos habituales. Otras bibliografías generales se citan en § 1S1.

ACKERMANN, W.
[MTB] Mengentheoretische Begründung der Logik. *Math. Ann.* **115** : 1-22 (1937).
[STF] Ein System der typenfreien Logik. *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, n. F.*, **7** (1941).
[WFL] Widerspruchsfreier Aufbau der Logik I. Typenfreies System ohne Tertium non datur. *Jsl.* **15** : 33-57 (1950).
[WFT] Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreier Logik. I. *Math. Z.* **55** : 364-384 (1952). II. Ibid. **57** : 155-166 (1953).
AJDUKIEWICZ, K.
[SKn] Die syntaktische Konnexität. *Studia Philos.* **1** : 1-27 (1935).

BAR-HILLEL, Y.
[SCt] On syntactical categories. *Jsl.* **15** : 1-16 (1950).
BECKER, OSKAR.
[SMF] Einige Schriften über moderne formale Logik und Methodologie der exakten Wissenschaften. *Philos. Rundschau* **2** : 184-192 (1954-5).
BEHMANN, H.
[WLM] Zu den Widersprüchen der Logik und der Mengenlehre. *Jber. Deutsch. Math. Verein.* **40** : 37-48 (1931).
BELL, E. T.
[DMth] The development of mathematics. New York, 1940; 2nd ed., 1945.
[MQS] Mathematics, queen and servant of science. New York, 1951.
BERNAYS, P.
[HUG] Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik. *David Hilberts Gesammelte Abhandlungen* **3** : 196-216, Berlin, 1935.
[PEM] Quelques points essentiels de la métamathématique. *Enseignement Math.* **34** : 70-95 (1935).
[PMth] Sur le platonisme dans les mathématiques. *Enseignement Math.* **34** : 52-69 (1935).
[SAS] A system of axiomatic set theory. *Jsl.* **2** : 65-77 (1937); **6** : 1-17 (1941); **7** : 65-89 (1942); **7** : 133-145 (1942); **8** : 89-106 (1943); **13** : 65-79 (1948); **19** : 81-96 (1954).
[res CR] Review of Church and Rosser [PCn]. *Jsl.* **1** : 74f (1936).
BETH, E. W.
[SLG] Symbolische Logik und Grundlegung der exakten Wissenschaften. *Bibliographische Einführungen in das Studium der Philosophie* **3**. Bern, (1948).
BIRKHOFF, GARRET.
[CSA] On the combination of subalgebras. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **29** : 441-464 (1933).
[LTh] Lattice Theory. *Amer. Math. Soc. Colloquium Publications* **25**, 1940; revised ed., 1948.
BOCHENSKI, I. M.
[SCt) On the syntactical categories. *The New Scholasticism* **23** : 257-280 (1949).
BÔCHER, M.
[FCM] The fundamental conceptions and methods of mathematics. *Bull. Amer. Math. Soc.* **11** : 115-135 (1904-5).
BOOLE, G.
[MAL] The mathematical analysis of logic. London and Cambridge, 1847.
BROUWER, L. E. J.
[IBF] Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus. *S.-B. Preuss Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl.* 1928 : 48-52.

[IFr] Intuitionisme en formalisme. Groningen, 1912, English translation by Arnold Dresden, *Bull. Amer. Math. Soc.* **20** : 81-96 (1913).

BURALI-FORTI, C.

[LMt.] Logica matematica. Milan, 1894; 2nd ed., 1919.

CAJORI, F.

[HMth] A history of mathematics. New York, 1893; 2nd ed., 1919.

CARNAP, R.

[FLg] Formalization of logic. Cambridge, Mass, 1943.

[ISm] Introduction to semantics. Cambridge, Mass, 1942.

[LSL] The logical syntax of language. (Translation of [LSS] by Amethe Smeaton). London and New York, 1937.

[LSS] Logische Syntax der Sprache. Viena, 1934.

CAVAILLÈS, J.

[MAF] Méthode axiomatique et formalisme. *Actualités Sci. Ind.* **603-610**, Paris, 1938.

CHURCH, A.

[Abs] Abstraction. In Runes, D. [DPh], p. 3.

[AZA] Alternatives to Zermelo's assumption. *Trans. Amer. Math. Soc.* **29** : 178-208 (1927).

[BBF] Brief bibliography of formal logic. *Proc. Amer. Acad. Arts Sci.* **80** : 155-172 (1952).

[BSL] A bibliography of symbolic logic. **1** : 121-218 (1936). Additions and corrections, Ibid. **3** : 178-212 (1938). De vez en cuando se publican desde entonces en el *Jsl.* suplementos.

[CLC] The calculi of lambda-conversion. *Ann. of Math. Studies* **6.** Princeton, N. J., 1941; 2nd ed., 1951.

[CLS] Combinatory logic as a semigroup. (Abstract.) *Bull. Amer. Math. Soc.* **43** : 333 (1937).

[CNE] Correction to "A note on the Entscheidungsproblem". *Jsl.* **1** : 101-102 (1936).

[CSN] The constructive second number class. *Bull. Amer. Math. Soc.* **44** : 224-232 (1938).

[FLS] A formulation of the logic of sense and denotation. *Structure, Method, and Meaning*, (Essays in Honor of Henry M. Sheffer), New York, 1951, pp. 3-24.

[IML] Introduction to mathematical logic. Part I. *Ann. of Math. Studies* **13.** Princeton N. J., 1944; 2nd. ed. (muy aumentada como vol. I de una obra de dos volúmenes en las Princeton Mathematical Series), Princeton, N. J., 1956.

[LEM] On the law of the excluded middle. *Bull. Amer. Math. Soc.* **34** : 75-78 (1928).

[MiL] Minimal logic. (Abstract.) *Jsl.* **16** : 239 (1951).

[MLg] Mathematical logic. (Mimeographed.) Princeton, N. J., 1936.

[NEP] A note on the Entscheidungsproblem. *Jsl.* **1** : 40-41 (1936).

[PFC] A proof of freedom from contradiction. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **21** : 275-281 (1935).

[RPx] The Richard paradox. *Amer. Math. Monthly* **41** : 356:361 (1934).

[SPF.I] A set of postulates for the foundation of logic. *Ann. of Math.* (2) **33** : 346-366 (1932).

[SPF.II] A set of postulates for the foundation of logic. (Second paper.) *Ann. of Math.* (2). **34** : 839-864 (1933).

[UPE] An unsolvable problem of elementary number theory. *Amer. J. Math.* **58** : 345-363 (1936).

[WTI] The weak theory of implication. *Kontrolliertes Denken, Untersuchungen zum Logikkalkül und zur Logik der Einzelwissenschaften* edited by A. Menne, A.

Wilhelmy, Helmut Angstl (Festgabe zum 60. Geburtstag von Prof. W. Britzelmayr), Munich, 1951, pp. 22-27. [rev. HA] Review of [HA_3]. *Jsl.* **15** : 59 (1950).

CHURCH, A. and KLEENE, S. C.

[FDT] Formal definitions in the theory of ordinal numbers. *Fund. Math.* **28** : 11-21 (1937).

CHURCH, A. and ROSSER, J. B.

[PCn] Some properties of conversion. *Trans. Amer. Math. Soc.* **39** : 472-482 (1936).

CHWISTEK, LEON.

[GNk] Granice Nauki. Zarys logiki i metodologji nauk scislych. Warsaw and Lwów, 1935.

[LSc] The limits of science. Outline of logic and of the methodology of the exact sciences. (Translation of [GNk] by Helen C. Brodie and Arthur P. Coleman.) London and New York, 1948.

CHWISTEK, LEON, and HETPER, W.

[NFF] New foundation of formal metamathematics. *Jsl.* **3** : 1-36 (1938).

COGAN, EDWARD J.

[FTS] A formalization of the theory of sets from the point of view of combinatory logic. (Thesis, The Pennsylvania State University, 1955.) *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* **1** : 198-240 (1955).

CURRY, H. B.

[ACT] Some advances in the combinatory theory of quantification. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **28** : 564-569 (1942).

[ADO] Abstract differential operators interpolation formulas. *Portugal. Math.* **10** : 135-162 (1951).

[ALS] An analysis of logical substitution. *Amer. J. Math.* **51** : 363-384 (1929).

[APM] Some aspects of the problem of mathematical rigor. *Bull. Amer. Math. Soc.* **47** : 221-241 (1941).

[ATC] Some additions to the theory of combinators. *Amer. J. Math.* **54** : 551-558 (1932).

[AVS] Apparent variables from the standpoint of combinatory logic. *Ann. of Math.* (2) **34** : 381-404 (1933).

[CCT] Consistency and completeness of the theory of combinators. *Jsl.* **6** : 54-61 (1941).

[CFM] The combinatory foundations of mathematical logic. *Jsl.* **7** : 49-64 (1942).

[CTF] Consistency of the theory of functionality. (Abstract.) *Jsl.* **21** : 110 (1956).

[DSR] On the definition of substitution, replacement and allied notions in an abstract formal system. *Rev. Philos. Louvain.* **50** : 251-269 (1952).

[ETM] The elimination theorem when modality is present. *Jsl.* **17** : 249-265 (1952).

[FCL] Functionality in combinatory logic. *Proc. Nat. Acab. Sci. U. S. A.* **20** : 584-590 (1934).

[FPF] First properties of functionality in combinatory logic. *Tôhoku Math. J.* **41** : 371-401 (1936).

[FRA] A formalization of recursive arithmetic. *Amer. J. Math.* **63** : 263-282 (1941).

[FTA] Foundations of the theory of abstract sets from the standpoint of combinatory logic. (Abstract.) *Bull. Amer. Math. Soc.* **40** : 654 (1934).

[GKL] Grundlagen der kombinatorischen Logik. *Amer. J. Math.* **52** : 509-536, 789-834 (1930).

[IFI] The interpretation of formalized implication. Not yet published.

[IFL] The inconsistency of certain formal logics. *Jsl.* **7** : 115-117 (1942).

[IFT] The inconsistency of the full theory of combinatory functionality (Abstract.) *Jsl.* **20** : 91 (1955).

[LCA] La logique combinatoire et les antinomies. *Rend. Mat. e Appl.* 5*s.* **10** : 360-370 (1951).
[LFS] Languages and formal systems. *Proc. Xth International Congress of Philosophy* 1949 : 770-772.
[LLA] Leçons de logique algébrique. Paris and Louvain, 1952.
[LMF] Language, metalanguage, and formal system. *Philos. Rev.* **59** : 346-353 (1950).
[LPC] The logic of program composition. *Applications Scientifiques de la Logique Mathématique* (*Actes du* 2*e Colloque International de Logique Mathématique, Paris*, 1952) pp. 97-102. Paris and Louvain, 1954.
[LSF] L-semantics as a formal system. *Actualités Sci. Ind.* **1134** : 19-29 (1951).
[MSL] Mathematics, syntactics and logic. *Mind* **62** : 172-183 (1953).
[NPC] A new proof of the Church-Rosser theorem. *Nederl. Akad. Wetensch. Ser.* A **55.** (*Indag. Math.* **14**) : 16-23 (1952).
[OFP] Outlines of a formalist philosophy of mathematics. Amsterdam, 1951.
[PBP] Philosophische Bemerkungen zu einigen Problemen der mathematischen Logik. *Arch. für Philos.* **4** : 147-156 (1951).
[PEI] Some properties of equality and implication in combinatory logic. *Ann. of Math.* (2) **35** : 849-860 (1934).
[PKR] The paradox of Kleene and Rosser. *Trans. Amer. Math. Soc.* **50** : 454-516 (1941).
[PRC] The permutability of rules in the classical inferential calculus. *Jsl.* **17** : 245-248 (1952).
[RDN] Remarks on the definition and nature of mathematics. *J. Unified Sci.* **9** : 164-169 (1939). (Todos los ejemplares de esta edición fueron destruidos durante la segunda guerra mundial, pero el Congreso Internacional por la Unidad de la Ciencia había recibido previamente separatas en septiembre de 1939). Reimpreso con algunas correcciones de menor entidad en *Dialectica* **8** : 228-233 (1954).
[RFR] A revision of the fundamental rules of combinatory logic. *Jsl.* **6** : 41-53 (1941).
[SFL] Les systèmes formels et les langues. *Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique*, **36**, Paris, 1950, pp. 1-10 (1953).
[STC] A simplification of the theory of combinators. *Synthese* **7** : 391-399 (1949).
[TCm] La théorie des combinateurs. *Ren Mat. e Appl.* 5*s.* **10** : 347-359 (1951).
[TEx] Theory and experience. *Dialectica* **7** : 176-178 (1953).
[TFD] A theory of formal deducibility. *Notre Dame Mathematical Lectures* **6**, Notre Dame, Indiana, 1950.
[UDB] On the use of dots as brackets in logical expressions. *Jsl.* **2** : 26-28 (1937).
[UQC] The universal quantifier in combinatory logic. *Ann. of Math.* (2) **32** : 154-180 (1931).
[res A] Review of Ackermann [WFL]. *MRv.* **12** : 384 (1951).
[res R] Review of Rosser [NSP]. *MRv.* **3** : 289 (1942).
[res Z] Review of Zubieta [SVF]. *MRv.* **12** : 790 (1951).

CURRY, H. B. AND CRAIG, W.
[res C] Review of Church [WTI]. *Jsl.* **18** : 177,326 (1953).

DICKSON, L. E.
[DGF] Definitions of a group and of a field by independent postulates. *Trans. Amer. Math. Soc.* **6** : 198-204 (1905).

DODGSON, C. L. (pseudonym LEWIS CARROLL).
[WTS] What the tortoise said to Achilles. *Mind* (n. s.) **4** : 278-280 (1895).

DRESDEN, A.
[PAM] Some philosophical aspects of mathematics. *Bull. Amer. Math. Soc.* **34** : 438-452 (1928).

DUBISLAV, W.
[PMG] Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart. Berlin, 1932.
DUBS, HOMER H.
[NRD] The nature of rigorous demonstration. *Monist* **40** : 94-130 (1930).

EATON, R. M.
[STr] Symbolism and truth; an introduction to the theory of knowledge. Cambridge, Mass., 1925.
ENRIQUES, F.
[HDL] The historic development of logic (English translation of author's
[SLg] New York, 1929.
[SLg] Per la storia della logica. I principii e l'ordine della scienza nel concetto dei pensatori matematici. Bologna, 1922.

FEYS, R.
[LGL] Logistiek. Geformaliseerde lociga I. Antwerp and Nijmegen, 1944.
[PBF] Peano et Burali-Forti, précurseurs de la logique combinatoire. *Actes du XIème Congrès International de Philosophie* **5** : 70-72 (1953).
[TLC] La technique de la logique combinatoire. *Rev. Philos. Louvain* **44** : 74-103 and 237-270 (1946).
FEYS, R. and LADRIÈRE, J.
[RDL] Recherches sur la déduction logique. (Translation of Gentzen, G.
[ULS], with supplementary notes.) Paris, 1955.
FITCH, F. B.
[SCL] Systems of "complete logic" not within the scope of Gödel's theorem (Abstract.) *Jsl.* **2** : 63 (1937).
[SFL] A system of formal logic without an analogue to the Curry W operator. *Jsl.* **1** : 92-100 (1936).
[SLg] Symbolic logic, an introduction. New York, 1952.
[SRR] Self-referential relations. *Actes du XIème Congrès International de Philosophie* **14** : 121-127 (1953).
FRAENKEL, A.
[AST] Abstract set theory. Amsterdam, 1953.
[ATG] Axiomatische Theorie der geordneten Mengen. *J. reine angew. Math.* **155** : 129-158 (1926).
[ATW] Axiomatische Theorie der Wohlordnung. *J. reine angew. Math.* **167** : 1-11 (1932).
[EML_3] Einleitung in die Mengenlehre. 3d ed., Berlin, 1928.
[UGL] Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. *Math. Z.* **22** : 250-273 (1925).
FREGE, G.
[FBg] Function und Begriff. (Vortrag). Jena, 1891.
[SBd] Über Sinn und Bedeutung. *Z. Philos. und Philos. Kritik, n. s.*, **100** : 25-50 (1892).

GENTZEN, G.
[ULS] Untersuchungen über das logische Schliessen. *Math. Z.* **39** : 176-210, 405-431 (1934) trad. francesa, V. Feys y Ladrière ([RDL].)
GÖDEL, K.
[CAC] The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory. *Ann. of Mah. Studies* **3.** Princeton, N. J., 1940.
[FUS] Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I. *Monatsh. Math. Phys.* **38** : 173-198 (1931).

[VAL] Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatsh. Math, Phys.* **37** : 349-360 (1930).

GOODMAN, N.

[SAp] The structure of appearance. Cambridge, Mass., 1951.

HARDY, G. H.

[MPr] Mathematical proof. *Mind*, (n. s.) **38** : 1-25 (1929).

HERBRAND, J.

[RTD] Recherches sur la théorie de la démonstration. *Trav. Soc. Sci. Lett. de Varsovie, Classe III*, **33** (1930).

HERMES, H.

[EVT] Einführung in die Verbandstheorie. Berlin, 1955.

[Smt] Semiotik. *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, n. F.*, **5** : 5-22 (1938).

HEYTING, A.

[FRI] Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. *S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl.* 1930 : 42-56.

[Int] Intuitionism. An introduction. Amsterdam, 1956.

[MGL] Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie. *Ergeb. der Math. und ihrer Grenzgebiete* **3**, No. 4. Berlin, 1934.

HILBERT, DAVID.

[ADn] Axiomatisches Denken. *Math. Ann.* **78** : 405-415 (1918).

[GLG] Grundlagen der Geometrie. 7e. Auflage. Leipzig and Berlin, 1930. (Appeared first in 1899).

[NBM] Neubegründung der Mathematik. *Abg. Math. Sem. Univ. Hamburg* **1** : 157-177 (1922).

[Und] Über das Unendliche. *Math. Ann.* **95** : 161-190 (1925).

HILBERT, D. and ACKERMANN, W.

[GZT] Grundzüge der theoretischen Logik. Berlin, 1928; 2nd ed., Berlin, 1938; 3rd ed., Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1949.

[PML] Principles of mathematical logic. New York, 1950.

HILBERT, D., and BERNAYS, P.

[GLM] Grundlagen der Mathematik. Vol. 1, Berlin, 1934; vol. 2, ibid, 1939.

HUNTINGTON, E. V.

[CTS] The continuum and other types of serial order. 2nd ed., Cambridge, Mass., 1917.

[FPA] The fundamental propositions of algebra. In J. W. A. Young, Monographs on Topics of Modern Mathematics, pp. 151-207. New York, 1911.

JORGENSEN, J.

[TFL] A treatise of formal logic. 3 vol., Copenhagen and London, 1931.

JOURDAIN, P. E. B.

[DTM] The development of theories of mathematical logic and the principles of mathematics. *Quart. J. Pure Appl. Math.* **41** : 324-352 (1910); **43** : 219-314 (1912); **44** : 113-128 (1913).

KERSHNER, R. B. and WILCOX, L. R.

[AMth] The anatomy of mathematics. New York, 1950.

KEYSER, C. J.

[MPh] Mathematical philosophy. New York, 1922.

KLEENE, S. C.

[FPT.I] On the forms of the predicates in the theory of constructive ordinals. *Amer. J. Math.* **66** : 41-58 (1944).

[FPT.II] On the forms of the predicates in the theory of constructive ordinals (second paper). *Amer. J. Math.* **77** : 405-428 (1955).
[IMM] Introduction to metamathematics. Amsterdam and Groningen, 1952.
[LDR] λ-definability and recursiveness. *Duke Math. J.* **2** : 340-353 (1936).
[NON] On notation for ordinal numbers. *Jsl.* **3** : 150-155 (1938).
[PCF] Proof by cases in formal logic. *Ann. of Math.* (2) **35** : 529-544 (1934).
[PIG] Permutability of inferences in Gentzen's calculi LK and LJ. *Memoirs Amer. Math. Soc.* **10** : 1-26 (1952).
[TPI] A theory of positive integers in formal logic. *Amer. J. Math.* **57** : 153-173, 219-244 (1935).
[rev C] Review of [APM] *Jsl.* **6** : 100-102 (1941).

KLEENE, S. C. and Rosser, J. B.
[IFL] The inconsistency of certain formal logics. *Ann. of Math.* (2) **36** : 630-636 (1935).

LADRIÈRE, J.
[TFG] Le théorème fondamental de Gentzen. *Rev. Philos. Louvain* **49** : 357-384 (1951).

LEWIS, C. I.
[SSL] A survey of symbolic logic. Berkeley, Cal., 1918.

LORENZEN, P.
[EOL] Einführung in die operative Logik und Mathematik. Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.
[KBM] Konstruktive Begründung der Mathematik. *Math. Z.* 53: 162-202 (1950).

LUKASIEWICZ, JAN
[FTM] Sur la formalisation des théories mathématiques. *Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche scientifique* **36**, Paris, 1950, pp. 11-19 (1953).

MCKINSEY, J. C. C.
[NDT] A new definition of truth. *Synthese* **7** : 428-433 (1949).

MACLANE, SAUNDERS.
[ABL] Abgekürzte Beweise im Logikkalkul. (Inaugural-Dissertation). Göttingen, 1934.

MARKOV, A. A.
[TAl-1951] Teoriya algorifmov (Teoría de algoritmos). *Trudy Mat. Inst. Steklov* **38** : 176-189 (1951).
[TAl-1954] Teoriya algorifmov (Teoría de algoritmos). *Trudy Mat. Inst. Steklov* **42**. Moscow-Leningrad, 1954.

MENGER, K.
[AAn] Algebra of analysis. *Notre Dame Mathematical Lectures* **3**, Notre Dame, Indiana, 1944.
[AVr] Analysis without variables. (Abstract.) *Jsl.* **11** : 30-31 (1946).
[BCM. I] The basic concepts of mathematics. Part I. Algebra. Chicago, 1956.
[CMA] Calculus, a modern approach. Chicago, 1952; 2nd ed., ibid., 1953; 3rd ed., Boston, Mass, 1955.
[GAA] General algebra of analysis. *Rep. Math. Colloquium* **7** : 46-60 (1946).
[ICP] Is calculus a perfect tool? *J. Engineering Education* **45** : 261-264 (1954).
[IVF] The ideas of variable and function. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **39** : 956-961 (1953).
[SDA] A simple definition of analytic functions and general multifunctions. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **40** : 819-821 (1854).
[TOA] Tri-operational algebra. *Rep. Math. Colloquium* **5** : 1-13 (1944).
[VDN] Variables, de diverses natures. *Bull. Sci. Math.* (2) **78** : 229-234 (1954).
[VMN] On variables in mathematics and in natural science. *British J. Philos. Sci.* **5** : 134-142 (1954).

[VNC] Are variables necessary in calculus? *Amer. Math. Monthly* **56** : 609-620 (1949).
[WAV] What are variables and constants? *Science* **123** : 547-548 (1956).
[WAX] What are x and y? *Math. Gazette* **40** : 246-255 (1956).
[WJH] Why Johnny hates Math. *Math Teacher* **49** : 578-584 (1956).

MOORE, E. H.
[IFG] Introduction to a form of general analysis. *Amer. Math. Soc. Colloquium Publications* **5** : 1-150 (1910).

MORRIS, C. W.
[FTS] Foundations of the theory of signs. Chicago, 1938.
[SLB] Signs, language, and behavior. New York, 1946.

MOSTOWSKI, A.
[PSI] The present state of investigations in the foundations of mathematics. *Rozprawy Mat.* **9**, 48 pp. (1955). Este trabajo está escrito en colaboración con varios otros autores. Apareció, también, en ruso, alemán y polaco. Para citas cfr. *MRv.* **16** : 552 (1955).

NAGEL, E.
[FMC] The formation of modern conceptions of formal logic in the development of geometry. *Osiris* **7** : 142-224 (1939).

VON NEUMANN, J.
[AML] Die Axiomatisierung der Mengenlehre. *Math. Z.* **27** : 669-752 (1928).
[HBT] Zur Hilbertschen Beweistheorie. *Math. Z.* **26** : 1-46 (1927).

NEWMAN, M. H. A.
[TCD] On theories with a combinatorial definition of "equivalence". *Ann. of Math.* (2) **43** : 223-243 (1942).

PEANO, G.
[FMt] Formulaire de mathématiques. Turin, vol. I - 1895, vol. II - 1898, vol. III - 1901, vol. IV - 1902, vol. V - 1908.

PÉTER, R.
[RFn] Rekursive Funktionen. Budapest, 1951.

PIERPONT, J.
[MRP] Mathematical rigor, past and present. *Bull. Amer. Math. Soc.* **34** : 23-53 (1928).

POST, E. L.
[FRG] Formal reductions of the general combinatorial decision problem. *Amer. J. Math.* **65** : 197-215 (1943).
[IGT] Introduction to a general theory of elementary propositions. *Amer. J. Math.* **43** : 163-185 (1921).

QUINE, W. V.
[CBA] Concatenation as a basis for arithmetic. *Jsl.* **11** : 105-114 (1946).
[LPV] From a logical point of view. Nine logico-philosophical essays. Cambridge, Mass, 1953.
[MLg] Mathematical logic. New York, 1940; 2nd ed., Cambridge, Mass., 1951.
[NFM] New foundations for mathematical logic. *Amer. Math. Monthly* **44** : 70-80. (1937). Reimpreso con nuevas observaciones in Quine [LPV], pp. 80-101.
[RSL] A reinterpretation of Schönfinkel's logical operators. *Bull. Amer. Math. Soc.* **42** : 87-89 (1936).
[SLg] A system of logistic. Cambridge, Mass., 1934.
[TCP] A theory of classes presupposing no canons of type. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **22** : 320-326 (1936).
[Unv] On universals. *Jsl.* **12** : 74-84 (1947).

ROSENBLOOM, P. C.
[EML] The elements of mathematical logic. New York, 1950.
ROSSER, J. B.
[DEL] Deux esquisses de logique. Paris and Louvain, 1955.
[LMth] Logic for mathematicians. New York, 1953.
[MLV] A mathematical logic without variables. *Ann. of Math.* (2) **36** : 127-150 (1935) and *Duke Math. J.* **1** : 328-355 (1935).
[NSP] New sets of postulates for combinatory logics. *Jsl.* **7** : 18-27 (1942).
[res A] Review of Ackermann [WFL]. *Jsl.* **16** : 72 (1951).
RUNES, D.
[DPh] The dictionary of philosophy. New. York, 1942.
RUSSELL, B.
[IMP] Introduction to mathematical philosophy. London, 1919.

SCHOLZ, H.
[GLg] Geschichte der Logik. Berlin, 1931.
[WIK] Was ist ein Kalkül und was hat Frege für eine pünktliche Beantwortung dieser Frage geleistet? *Semester-Berichte* (Münster) **7** : 16-47 (1935).
SCHÖNFINKEL, M.,
(BSM) Über die Bausteine der mathematischen Logik. *Math. Ann.* **92** : 305-316 (1924).
SCHRÖTER, K.
[AKB] Ein allgemeiner Kalkülbegriff. *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, n. F.*, **6** (1941).
[WIM] Was ist eine mathematische Theorie? *Jber. Deutsch. Math. Verein.* **53** : 69-82 (1943).
SHEFFER, H. M.
[GTN] The general theory of notational relativity. Unpublished manuscrip, 1921.
SKOLEM, TH.
[BAB] Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. *5ter Kongress der Skand. Mathematiker* (Helsingfors, 1923) : 217-232.

TARSKI, A.
[BBO] Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollständigkeit. *Monatsh. Math. Phys.* **40** : 97-112 (1933).
[FBM] Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften I. *Monatsh. Math. Phys.* **37** : 361-404 (1930).
[GZS] Grundzüge des Systemenkalküls, Erster Teil. *Fund. Math.* **25** : 503-526 (1935).
[ILM] Introduccion a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas. Traducción al inglés por Olaf Helmer, New York, 1941 (La obra original en Polonia en 1936, vertida después, al alemán en 1937).
[WBF] Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. *Studia Philos.* **1** : 261-405 (1936).
TURING, A. M.
[CNA] On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proc. London Math. Soc.* (2). **42** : 230-265 (1936).
[UDB] The use of dots as brackets in Church's system. *Jsl.* **7** : 146-156 (1942).
VEBLEN, OSWALD
[DTO] Definition in terms of order alone in the linear continuum and in well-ordered sets. *Trans. Amer. Math. Soc.* **6** : 165-171 (1905).
[SAG] A system of axioms for geometry. *Trans. Amer. Math. Soc.* **5** : 343-384 (1904).
[SRR] The square root and the relations of order. *Trans. Amer. Math. Soc.* **7** : 197-199 (1906)..

VEBLEN, O. and YOUNG, J. W.
[PGm.I] Projective Geometry, Vol. I. New York, 1910.

WEISS, P.
[NSs] The nature of systems. *The Monist.* **39** : 281-319, 440-472 (1929).

WEYL, H.
[DHM] David Hilbert and his mathematical work. *Bull. Amer. Math. Soc.* **50** : 612-654 (1944).
[PMN] Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. Munich and Berlin 1926. (English translation by Olaf Helmer, revised and augmented, Philosophy of mathematics and natural science, Princeton, N. J., 1949.)

WHITEHEAD, A. N. and RUSSELL, B.
[PMth] Principia mathematica. 3 vol. Cambridge, England, 1910-1913; 2nd ed., 1925-1927.

WILDER, R. L.
[IFM] Introduction to the foundations of mathematics. New York and London, 1952.

YOUNG, J. W.
[LFC] Lectures on fundamental concepts of algebra and geometry. New York, 1911.

ZUBIETA, R., G.
[SVF] Sobre la substitución de las variables funcionales en el cálculo funcional de primer orden. *Bol. Soc. Math. Mexicana* 7 : 1-21 (1950).

Indice

El índice incluye, en una única lista, autores, materias y símbolos. Con esto se tienen referencias de todas las páginas en que venga citado un autor y de todas las que contengan información que concierna al significado o uso de un término o de un símbolo. Aunque no tan sistemáticamente, el índice ofrece otros tipos de información, referidos siempre a las páginas correspondientes.

La bibliografía no está referida a las páginas del libro. En ella aparecen los nombres de los autores en orden alfabético, por lo que pueden ser localizados sin necesidad de ver el índice. Las referencias de un lugar a otro, que aquí se dan, ayudarán a localizar co-autores, traductores, etc.

Tampoco se citan las páginas en que aparecen las letras negritas verticales sin modificar, correspondientes a la columna izquierda de la tabla I, apéndice A.

Una entrada del índice se compone normalmente de un encabezamiento, referencias y referencias de un lugar a otro. El final del encabezamiento viene indicado por los primeros dos puntos (:); nada de lo que sigue a la derecha de los dos puntos (:) se toma en cuenta para el orden del índice. El final de las referencias se indica por un punto. Las explicaciones que puedan aparecer anteriores a su grupo de referencias sólo son aplicables hasta el primer punto y coma (;) o punto que limita el grupo; una explicación (entre paréntesis) que acompaña a una referencia de página sólo es válida para esta referencia; a veces se intercalarán entre los primeros dos (:) puntos y un punto algunas explicaciones aplicables a todo el conjunto de referencias. No especificaremos ningún orden para los grupos de referencias. Cuando una referencia de página precede a otra que, sin embargo, aparece antes en el texto, la información más esencial (definiciones, enunciados en forma, etc.) se encontrará bajo la primera. Un guión indicará la repetición del encabezamiento.

En el caso de conceptos formados por varias palabras, deberá buscarse la información que se desea bajo la palabra más específica. Por ejemplo, la definición de 'secuencia constructiva normal' debe ser buscada por 'normal'.

Los argumentos de los functores estarán indicados, a veces, por guiones. Igualmente se insertan comas entre los nombres de co-autores para conseguir una ordenación alfabética más natural.

Ordenación de encabezamientos.—Se ha seguido un proceso de dos etapas. En la primera se ordena lexicográficamente, de acuerdo con un alfabeto, llamado alfabeto primario, que se obtiene incluyendo nuevos caracteres en el alfabeto normal y desechando la posibilidad de efectuar ciertos tipos de modificaciones (de inmediato veremos el sentido y alcance de estas modificaciones).

En la segunda etapa, encabezamientos que son iguales según los criterios de la primera, se ordenan lexicográficamente entre sí, de acuerdo con ciertas modificaciones.

Modificaciones consideradas.

Cambios en el tipo de imprenta, corchetes por la derecha (por corchetes entenderemos de ahora en adelante cualquier pareja de símbolos, incluidas las comillas), superíndices y subíndices.

En ambos casos se ignoran:

— los espacios entre palabras, puntos, guiones, corchetes por la izquierda;
— modificaciones diacríticas en lenguajes extranjeros, excepto alfabetizar "ä" por "ae", "ö" y ∅ como "oe", "ü" por "ue" y "Mc" (como prefijo nominal) por "Mac".

Detallemos las reglas por las que se lleva a cabo la ordenación:

Primera etapa.—El alfabeto primario consta de los siguientes caracteres, ordenados según se indica en cada caso:

1. : (dos puntos) , (coma).
2. Letras corrientes (ordenadas alfabéticamente).
3. Letras griegas (según el alfabeto griego).
4. Números árabes (ordenación numérica).
5. Números romanos (ordenados numéricamente).
6. Acentos (utilizados al ordenar superíndices en la regla II, 5).
7. Signos de referencia *, †, §.
8. Símbolos arbitrarios, según el orden en que van apareciendo en el texto a partir de la página 1.

Segunda etapa.—Las modificaciones consisten en cambiar el tipo de imprenta de los caracteres primarios y en incluir nuevos caracteres (caracteres secundarios) entre los primarios (o, en el caso más sencillo, precediendo al primero de éstos). Así quedan formadas en estos intersticios ciertas palabras secundarias. Las palabras secundarias así obtenidas se ordenan lexicográficamente y los caracteres primarios modificados se ordenan también lexicográficamente, de acuerdo con las siguientes reglas:

1. El orden de las letras de imprenta es: a) romana, b) cursiva (bastardilla), c) negrita (incluida la cursiva negrita), d) gótica, e) negrita mayúscula vertical, f) inglesa, g) invertida.
2. Entre letras primarias de un mismo tipo una mayúscula precede a una minúscula.
3. El orden de los caracteres secundarios es: a) "cero", b) corchete por la derecha, c) superíndice, d) subíndice.

Entendemos por "cero" la ausencia de un carácter secundario antes del carácter primario siguiente (que pueden ser los dos puntos); un $\left\{ \begin{matrix} \text{super} \\ \text{sub} \end{matrix} \right\}$ índice es cualquier serie continua de signos $\left\{ \begin{matrix} \text{superiores} \\ \text{inferiores} \end{matrix} \right.$

(Cuando un superíndice viene detrás de un subíndice, el principio lexicográfico exige que se considere el subíndice primero.)

4. El orden interno de los corchetes (que están definidos según un criterio muy general) es: a) comillas simples, b) comillas, c) paréntesis, d) corchete cuadrado, e) llave y demás signos o parejas de signos que podamos utilizar.
5. Los superíndices (subíndices) se ordenan entre ellos como si fueran palabras independientes.

Nótese que cuando un functor sea una modificación que haya que añadir al argumento, lo cual se indica según estas reglas por un guión, el encabezamiento no contendrá ningún carácter primario salvo los dos puntos; este tipo de encabezamiento ha sido colocado al comienzo del índice.

Indice analítico

(—) : v. Paréntesis
[—] : v. Corchetes
{—} : v. Llave
— *A*: 412
— *C*: 306
— *H*:
— *L*: 413
— ^{n}: 212
— [*n*]: 221, 224
— *P*: 389
— *T*: 413
— λ: 413
— [0]: 224
—′ 33: 47, 262, 465
— *: 131, 174, 252
— +: 181
— -1: 217
— *H*: 267, 269
— *J*: 267
— *L*: 267
— *M*: 267
— $_{n}$: v. secuencia
— n^{m}: 16
— (*n*): 213
— $(n)^{m}$: 213
— [*n*]: 219, 223
— $[n]^{m}$: 222
— $[n]^{[m]}$: 222
q: 412
— β: 125, 174, 339 — [*n*] [*m*] : 222
— δ: 125, 177
— η: 125, 173 s.
— θ: v, > θ
— λ: 268, s.
— [0]: 223
— *: 215

(A): = (χ) 146
(a): 242

A: 91, 118, 155, 199, 268
a: 196
𝔄: 268
a: 164
A; 120, 342 s.
∀: 16, 120, 453.
(abcdef): 247
(abcdf): 247
(abcf): 246; adoptado para la reducción fuerte, 280
(abde): 244
aberrantes, casos: de sistemas formales, 36
(abf): 244
absoluta, o: (algebra de la) implicación, 389 ss.
estratificación, 362
abstracción: v. A; Church, A. [Abs]: abstracción funcional
abstracta, o: álgebra, 37
sistema axiomático, 36
sistema formal, 34, 40
aceptabilidad: 35 s., 58 s., 345 s.
v. t. β-aceptabilidad. h-aceptabilidad
Ackermann, W.: 30, 57, 327 s., 419 s.
v. t. HA, [res. A.]; Rosser [res. A.]
[ACT]: 110, 336, 343, 381, 458
adjuntor: 344 s.
v. t. operador
[ADO]: 114
adventicio, combinador: 246
afijo: 16, 46
v. t. infijo, prefijo, sufijo
afirmado, ob: 51-52
Ajdukiewicz, K.: 60, 342, 343
A:-lenguaje: 47 s., 60
aletheútico: sistema, 60
aletheutica: 59
álgebra: 37 n.
absoluta de la implicación, 391 n.

algebraica: estructura, 110
algoritmo: 60
v. t. Markov [TAL]
[ALS]: 20, 28, 58, 220.
amplio sentido: de traducción, 319
análisis: de una construcción, 68 s.
de una demostración, 39, 58-59
de la completud combinatoria, 239-248.
analogía entre **F** y **P**: 390 - 392
anillo: 111
anterioridad, de puntos: 75
de extensos, 183
anticipación: de h-contracciones, 178
antinomia: v. paradoja
Añadida, indeterminada: 83
[APM]: 34, 37, 42, 50, 58.
v. t. Kleene [res. C].
aparente: variable, 299
v. t. ligada, variable
aplicación: 23, 30, 53-54, 116-118, 121, 143
aplicacional: combinación, 207
sistema, 53
a priori: ausencia de presuposiciones a. p. en un sistema formal, 32-33, 40, 58-59
arborescente, diagrama: de una construcción, deducción, 68, 72
de reducciones definicionales, 93
de la reducción fuerte, 282
de F-deducciones, 350 s.
de reglas Y, 392
argumento: componente, 210
de una operación, 70-71.
de un extenso, 127 s.
posición de, 210
v. t.: F-, principal-, mayor-, menor-.
argumento principal: 210
componente, 284
aritmética: 107-108.
v. t. combinatoria, aritmética, recursiva, artimética.
aritmetización: v. gödelización
artículo: 13
A- sentido: (de una proposición) A, 411-412
aserción: 51-52
v. t. ⊢
asociación por la izquierda: 16, 53, 75, 117, 118, 122-123
asociativa, ley: del producto compuesto, 211-212
asterisco, operación: 215
[ATC]: 299, 300
atómica: extensión, 64
átomo: 34
como operación de grado cero, 35
determinación, 38
reducción a un, 54
v. t.: combinador primitivo; cuasi átomo
autónimo: modo de hablar, 45-46, 49-50, 145.
representación, 45
[AVS]: 20, 66, 195, 299, 343
auxiliares: nociones, 36, 55.
Ax
[E-]: 457
[FE]: 457
[FI]: 457
[FK]: 457
[FL]: 457
[FS]: 457
[I_0]: 261
[I_1]: 258
[I_2]: 255,
[K]: 258
[KI]: 259
[KQ]: 312
[LQ]: 457
[QE]: 314
[QQ]: 312
[S]: 259
[SI]: 259
[SK]: 258
[SQ]: 312
axiomas: para sistemas formales en general, 31-32, 36, 39, 52, 55
para sistemas $\mathscr{K}$, $\mathscr{Q}$, 309-315
para la funcionalidad, 349 s., 402, 427, 457
v. t. Ax; esquema axiomático; esquemas combinatorios; axiomas definidores; axiomas dados.
axiomática, o: extensión 64.
fórmula, proposición } 52-53
sistema, 31-32, 56-57
axiomático: esquema, 36, 61, 83-84, 303-304, 321
para $\mathscr{K}$, v. (ρ)
Reglas de reducción: para $\mathscr{F}_1$ 349-350.
para esquemas especiales v. Esqax

(B): 146, 148
demostración de βη-conversión, 18
(b): 242, 244.
B: 90, 155, 268
b: 196
b: 164
𝔅: 268
para una base, 71-72, 351, 354 ss., 436 s.
para un componedor, 209, 300
$\mathfrak{B}^r$: 449
$\mathfrak{B}^s$: 449
$\mathfrak{B}^x$: 440
B: 197, 249
definiciones sintéticas, 204, 206, 237, 247, 250.
propiedades, 210-217
historia, 27, 236 ss., 322
papel en el prefijo de corchetes, 244
semigrupos combinatorios, 301
caracter funcional, 331, 358
(**B**): 198, 466
$(\mathbf{B})_1$: 249
$(\mathbf{B})_2$: 249
$\mathbf{B}^n$: 23 } historia 236 s.
$\mathbf{B}'$: 464 }
como combinador primitivo, 237
caracter funcional, 383
$\mathbf{B}_{(n)}$: 21
Bar-Hillel, Y.: 60, 344
Base: de un extenso, 128
de un estadio, 284
de un λ-ob, 122
base: de una construcción o deducción, 70.
de un conjunto de combinadores, 234 ss.
de una F-deducción en $\mathscr{F}_1$, 351, 354, 361
de una F-deducción, clases especiales, 416, 419 ss.
básica, o: combinador (de un algoritmo), 245
combinador (de un conjunto), 234
deducción (en $\mathscr{F}_1$), 367 s., 386, 435 ss.
ob (de una traducción logística), 51
ob, operación, etc. (de una extensión definicional), 92
propiedades b. de $\mathscr{H}$ 247 ss.
paso b. (de una demostración por inducción), 73
básica: teoría de la funcionalidad, 331, 347-425
naturaleza y papel, 347 s.
formulaciones, 349 ss., 384 s., 391 ss., 397 ss.
analogía con el álgebra proposicional, 388-391
λ -forma, 384-388
formas inferenciales, 391 ss.
T-forma, 392 ss.
L-forma, 397 ss.
tipificación, 419 ss.
I-consistencia, 424
v. t. construcción de sujeto, conversión de sujeto, estratificación, λ-forma de la funcionalidad, T-forma de la funcionalidad, L-formulación.
(bdef): 244
Becker, O: 345
Behmann, H.: editor de Schönfinkel de [BSM], 27, 236
explicación de paradojas, 23, 29, 326.
Bell, E. T.: 56
Bernays, P.: teorema de Church-Rosser, 187, 194
ideas de Hilbert, 57
λ **K**-conversión restringida, 187
teoría de conjuntos, 30,
teoría de combinadores, 236 s., v. t. [HB]
Beth, E. W.: 56
BI: caracter funcional, 356.
v. t. $\mathbf{I}_4$
$\mathbf{B}^n\mathbf{I}$: relación con orden, 225 s.
bibliografía: 1.ª
métodos de cita, 14, 1.ª
referencias generales, 56 ss.
binaria, o: functiva, 35
functor, 45
Birkhoff, G.: 37
Bochénski, I. M.: 60, 344
Bôcher, M.: 57
Boole, G.: 57
booleana: álgebra, 50, 111
Boscovitch, Alfred: 236
Brodie, H. C.: v. Chwistek [LSc]
Brouwer, L. E.: 57
Burali-Forti, C.: 30, 120.
B1-3: 440
B4-5: 449

(C): (propiedad), 146, 151
demostración en la λ-conversión plena, 181.
(c): 242
efecto, 244, 259
C: 91, 155, 268
c: 196
𝔈: 209, 301
C : 197, 249
definiciones en **S**, **B**, **K**, 204, 247
otras definiciones, 205, 235, 236.
definibilidad, 235
papel en el prefijo de corchetes, 245 ss.
historia, 27, 236, 299.
carácter funcional, v. (FC)
(C): 197, 466
$(C)_1$: 250
$(C)_2$: 250
$C^{[u]}$: 222
C_n: 214, 237
$C_{[n]}$: 220
C_*: definiciones 206, 237
como combinador primitivo, 237
ejemplo, 215
en semigrupos combinatorios, 301
uso para definir **Q**: 314, 428 s.
(C_*): 706, 466.
cabeza de un extenso β: 183
de un componente de un ob combinatorio, 210
Cajori, F.: 56.
cálculo: v. sistemas sintácticos, λ-conversión
cancelación: tratamiento en el lema de minimalalización, 172.
cancelador: 198, 209, 300.
cancelativo: efecto, 231
característica: variable, 400
Carnap, R.: 50, 59 s., 142
Carroll, Lewis: v. Dodgson, C. L.
caso, ocurrencia: definición, 85
libre y ligada de una variable, 122 s.
de un extenso, etc., notación, 155
caso último: 231, 234
casos ligados: 123,
categoría: 19-20, 22 s, 29-30, 35, 324, 327, 329, 344.
categoría de obs.: 51
ejemplos de las matemáticas, 332 s.
ejemplos gramaticales, 343 s.
Lesniewski: 343
v. t.: **L**, proposición, categoría universal
Cavaillès, J.: 56, 57
[CB]: 56, 1.ª
[CCT]: 195
corrección, 299, 322
Centre National de Recherches de Logique: 12.
cero, functiva de grado—: 35
[CFM]: 19, 120, 342, 343, 462 ss.
Church, A.: sustitución 20-22, 80
λ-conversión, 25, 28, 59, 123 ss., 142 ss., 244, 465
aritmética combinatoria, 25, 142 s., 225
(Z_n) 237
'sistema de lógica', 28, 142 ss., 342 s.
teorema de indecibilidad, 28, 110, 142 ss.
sistema ilativo ([SPF]), 27-30, 61, 120, 142 ss., 194 s., 224, 236 s., 299, 304, 322, 327, 342.
notación, 28, 114, 125, 142 ss., 462 ss.
'well-formed', 49, 142 ss.
bibliografía e historia, 56, 60, 3.ª-4.ª
métodos formales, 58 ss., 142 ss.
axiomas de elección ([AZA]), 57.
semiótica (semántica), 58 ss.
compromiso ontológico, 61
análisis de funciones y variables, 112, 115, 119, 142 s.
abstracción, 112, 142 s.
omisión de **K**, 123, 143, 187, 327, 418
inextensionalidad, 127, 143 s., 327
δ_1-conversión, 129, 144, 178, 327
opiniones sobre significancia, categoría universal, etcétera, 143, 187, 304, 322, 327, 342 s.
λK - conversión restringida, 187
teorema de Church-Rosser (v.), 194 s.
teoría de combinadores, 236 s.
semigrupo combinatorio, 301
reglas combinatorias, 309

naturaleza empírica de la lógica, 345
implicación débil, 391, 418
Reglas I-V, v. (α), (β), (δ_1).
v. t., — y Kleene; — y Rosser.
Church, A., y Kleene: 26
Church, A., y Rosser: 110, 143, 146, 150, 162, 172, 183, 194
Church-Rosser: propiedad de 146, 466.
para extensiones definicionales propias 97, 162 s.
relación con las propiedades (B), (C), (E), 146-155.
en la aritmética recursiva, 194 s.
para la reducción fuerte, 280 s., 298.
en la teoría ilativa, v. R4
v. t. Church-Rosser, teorema de Church-Rosser, teorema de, 147, 146-195.
papel en la consistencia, 109, 194 s.
esbozo de la demostración, 154
para el cálculo βδ, 171 s.
para el cálculo βη, 180.
para el cálculo λ pleno, 181
incumplimiento en la λK-conversión restringida, 187
consecuencias y extensiones, 181-194
historia, 194 s.
v. t.: Church, A., y Rosser (paral la demostración original); Church-Rosser, propiedad de; segundo.
Chwistek, L.: 54.
v. t. — y Hetper.
CI: 236 s.
v. t. **C**
cierre: de un functor o functiva, 35, 45 s, 69 s., 84-86.
v. t. aplicación
cifra: v. $\mathcal{N}_0$
cita: 14, 1.ª
(CL): 398, 402
clase: determinación etc. de una — intuitiva, 38.
—cnv, 16, 226, 268
cob: 61
Cogan, E. J.: 11, 19, 30, 62, 333, 336, 462-464
colateral: rama, 71, 93, 351
construcción, 71
dato, 71
premisa, 352
Coleman, A. P.: v. Chwistek [LSc]
colisión de variables ligadas: 125
coma: uso en bibliografía: 19.
combinación: de un conjunto de obs por un conjunto de operaciones, 71, 84.
relativización de los ob, 107
especialización para la conversión λ, 123
para la teoría de combinadores, 207
combinador: definición, 25, 27 s., 196, 207, 242
ejemplos, 207
elementales, 96 ss.
clases especiales de, 199, 207 s., 209 ss., 217 ss., 227 ss., 245
orden, 225-228
teoría intuitiva de, 196-237
teoría sintética de, 238-301
carácter funcional, 329 s., 383
v. t., definibilidad; carácter funcional; orden; primitivos; propios; regulares; teoría de
combinador recíproco: 216 s.
combinatoria, aritmética: 23, 142, 224 s., 236
combinatoria: completitud
definición, 23, 318
sentido débil, 28
análisis, 238-247
relación con las paradojas, 324 ss.
combinatoria, lógica: motivación, 19-24, 56 s.
definición y subdivisiones, 24-25
origen del término, 25, 27
historia inicial, 27-30
consistencia, 29, 109, 322
naturaleza como sistema formal, 49, 55, 65, 82, 108, 302 ss.
v. t., historia, ilativa, pura, λ-conversión

combinatoria, reducción: i. e., reducción en la teoría de combinadores.
v., reducción de predicado, regla de educción, reducción fuerte, reducción de sujeto, reducción débil: $\geq$; $\succ$
combinatoria, regla: 305 ss., 315
'combinatorio: a', 23-24
combinatorio, ob: 207
combinatorio, semigrupo: 301
combinatorios: axiomas, 258, 251-261, 339
combinatorios, enteros: v. $\mathbf{Z}_n$
comillas: 17, 45, 49 s.
completa, o: sintaxis, 49
formalización, 55
definición o extensión definicional, 95, 102
reducción (respecto de un conjunto de extensos), 152
contracción (de un extenso compuesto), 175
completamente formal: sistema, 55
completitud: v.: completitud combinatoria, completitud deductiva, completitud funcional; gödelización
componedor: 209, 300
elemental, 198
componente: de una combinación, 72, 84
en la conversión λ, 122
de una combinación aplicacional, varias clases, 209 s
de un F-ob (F-componente), 349
de una inferencia, 400
componente rector: 210
elemento (de una combinación), 210
elemento (de un estadio), 284
composición: de —a— (= caso), 72, 85
v. t. producto compuesto, componedor
compositivo: efecto, 231
compuesta, o: F-ob, 428
v. t. F-compuesto
producto, 211
compuesta, o: proposición, 66
β-extenso, 175
computabilidad: 26 s.
comunicativo, lenguaje: 45
concatenación: 44, 49
concepto: 45
conceptualismo: 62
conclusión: (de una deducción), 72
confusión de variables ligadas: 125
racionalización de, 261, 264
conexión: 45
conectiva: 37
eliminación en la reducción a sistema logístico, 51
conector: 45, 75, 344 s.
congruencia: sentido algebraico, 110 s.
de un extenso generalizado, 163.
conjunción: como conectiva (&), 75
como ob ($\wedge$), 464
conjunto: (v. **M**), 464
teoría de, 295, 333
notación, 76 s, 100
suma (v. **U**), 464
conjunto de axiomas definidores: 95
proposición de $\mathscr{F}_1^s$, 448
símbolo (Kleene), 121, 143
conmutativa, ley: (término antes usado), 228
consecuencia de premisas dadas por reglas dadas: 72
reglas de: 60
consistencia: 65, 109, 345
de la conversación λ, 110, 148, 194 s.
de la teoría de combinadores, 315, 321, 322, 432 s.
de los sistemas ilativos, 342 s.
v. t. I-consistencia, inconsistencia; Q-consistencia
constante: de un álgebra abstracta, 37
primitiva en la conversión λ, 120-129
relativa a una extensión atómica, 239
en formación L, 400 ss.
proposición (de una base radical), 420
constituyente: de una proposición, inferencia, etc., en $\mathscr{F}_1^L$, 399
construcción: 68 ss.
— de— determinada por, — 70
secuencia constructiva, 68 s.
v. t.: combinación, deducción.
constructividad: (epiteoría), 65

contenido, referente al: 42
contentivo: v. contenido
contentivo: 42
contracta: operación, 92
contracción: en la teoría de la definición, 93, 94
de un extenso, 128, 150
completa, 175
de un extenso en la reducción fuerte, 284
contracto: de un extenso en la conversión λ, 128
en la reducción fuerte, 284
contraejemplo: v. ejemplo
conversa: de una relación, 305
conversión: 126
visualización, 151
convenciones especiales en la teoría ilativa, 341 s.
v. t.: predicativa, de sujeto, λ-
convertibilidad: v. conversión
corchete: prefijo de, 16, 239, 242, 243-247, 251 s., 266.
corchetes: para citas bibliográficas, 14, 1.ª
en las antiguas teorías de Church, 143
para casas, 155.
para relaciones, 305, 465
v. t. asociación por la izquierda, prefijo de corchetes, llave, punto, paréntesis, notación de prefijo, prefijo de sustitución.
correspondencia: de combinador a combinación, 207
Craig, W.: 11 s, 197, 230-236, 302, 315-321, 419
v. t. Curry, H. B. y—
[CTF]: 343
cuad: 52
cuantificador: representación en λ-conversión, 120
carácter funcional, 332
v. t.: abstracción; -existencial; generalidad
cuasi-aplicacional, sistema: 53
cuasi-átomo: 81, 107
v. t.: cuasi-primitiva
cuasi-ordenado, sistema: 50
cuasi-ordenadora: 50, 87-89, 147 ss.
gradualmente producida, 150
v. t.: reducción; equivalencia; sistema cuasi-ordenado, relación cuasi-primitiva: 355, 370
v. t.: cuasi-átomo
Curry, H. B.: carta a Hilbert, 237, 343
método para citar sus trabajos, 1.ª Estos están introducidos separadamente en el índice
v. t. y Graig; historia
Curry, H. B., y Craig, W.: 419

(D): también propiedad (D). formulación, 154 s., 146
forma débil, para la conversión β—, 155, 154-157
para el cálculo λ— pleno: 157-159
incumplimiento de la forma fuerte para conversión βη—, 159, demostración de la forma fuerte para conversión βδ—, 159-162
generalización: 162
forma fuerte para la conversión η— pura: 174
historia: 194
(d): 242
D: 115, 155, 200, 268
varias significaciones anteriores, 463
D_n: de [ALS], 220
D: 16, 92, 162
𝔇:: usadapara deducciones, reducciones, etcétera, 92, 150 ss., 354 ss.
$\mathbf{D}_2$: 225, 237, 383
'da', 'dan': 76
dada, o: axioma: 100
clase, 38
operación, 100
dato: de una construcción, 70
Davenport, K. R.: 12
Davis, H. T.: 114
Dawis, Martín: 26
debajo de: nodos en una construcción, 70, 72
débil: equivalencia, 87 ss.
débil, forma de: (D) 154 s.
de reglas, 465
débil, implicación: epiteorética, 76
álgebra proposicional, 391
débil, reducción: 276-277
v. t.: ≥
decidibilidad: 39, 60, 65
deducción: definición y convenciones básicas, 72, 39, 58

en $\mathscr{F}_1{}^b$, 351 s.
en $\mathscr{F}_1{}^\alpha$, 435.
v. t., deducción básica; reducción definicional; demostración; derivación; F-deducción; FQ-deducción; FR deducción; inferencia
deducción, teorema de: v. completitud deductiva.
deductiva: completitud, 29, 326
sistema formal deductivo, 60
inducción, 73
metodología, 109
regla, 36
deferido: combinador, 213
definibilidad: de combinadores, 200-206, 230-236, 246
definición: numeración, 13
inductiva, 38
naturaleza de la —formal, 64 67, 91
uso de '=', 89, 95 ss.
teoría de la, 91-108
v. t., extensión definicional
definicional: extensión, 91 s.
propia, 95
completa, recursiva (parcial), univalente, 95 ss.
equivalencia producida por definición, 97 s.
relatividad definicional, 98-103
recursivas-primitivas, 103 s.
relación con la aritmética recursiva, 103.
extensión a transformaciones, 270
v. t. definición
definicional: independencia: de combinadores. v. definibilidad
definicional: reducción: 92 ss.
típica, 94
definidoras, propiedades: de la reducción fuerte, 278
definidores, axiomas: 92-95
conjunto propio de, 95
relativos, 100
definiendum: 67, 92
definiens: 67, 92-95
Dekker, J. C. E.: 26
demostración: 39 s.
v. t. deducción
demostración: v. deducción; por inducción: v.: inducción
denotación: 59.
derecho, a: constituyente, 400
monotonía, 87
punto, 75
derivación: 72
v. t.: deducción, demostración.
derivada: regla, 64, 73
descripción: v.
designación: 45, 59
determinación: 38-40, 47-48
determinada: clase, 39
determinística, regla: 303, 321
diagrama: cfr. teorema de Church-Rosser (visualización); diagrama arborescente
Dickson, L. E.: 57, 58
directa, interpretación: 43
distributiva, ley (del producto compuesto): 212
disyunción: 66, 464 (V)
Dodgson, C. L.: 57
Dresden, A.: 57
v. t. Brouwer [IFr]
[DSR]: 35, 37, 58, 80, 86, 109
Dubislav, W.: 56
Dubs, H. H.: 57
duplicativo, efecto: 231
duplicador: 209, 300
elemental, 197

(E): también propiedad (E). Formulación, equivalencia con (C), 153, 146
incumplimiento en la conversión $\beta\eta$ 159
derivación a partir de (H), 163 ss.
para la conversión η pura, 174 s.
historia, 194
(e): 244
E: 268
(*E*-): cuantificador intuitivo, 74, 77.
e_n: variables formales, 122
e: 164
$\mathfrak{E}$: para conjuntos de axiomas, 92-95, 91 ss.
para partes de deducciones, 447
$\mathfrak{E}$: clase de indeterminadas, 80-84
E: 303, 312, 334, 337, 429, 453
restringido, 322, 342:
como —simple-F, 457 s.
v. t. regla E: categoría universal
[E-]: axioma, 457
$\exists$: 120

E: regla, 303, 321 s., 338, 429, 434, 457
restricciones en, 304, 327
Eaton, R. M.: 57
ecuacional: sistema, 50
ejemplo: sistemas formales, 33, 56 ss.
epiproposiciones, 59, 63 ss.
diferencia entre dos clases de implicación, 76
definición impropia, 95 s.
usos de variables, 112 s.
incumplimiento de la propiedad (E), 159 s.
incumplimiento de la η-posposición, 177
anomalía de la λK-conversión, 187
orden anómalo, 191
expresión de propiedades mediante combinadores, 200
λ-obs, obs combinatorios, combinadores, 207.
construcción de sujeto y estratificación, 356 ss.
incumplimiento del teorema fuerte de la expansión de sujeto, 376
demostraciones en sistemas T y L, 393 s.
incumplimiento de la F-sustitución recíproca, 437
elemental: cancelador, 198
componedor, 198
duplicador, 197
identificador, 197
permutador, 197
enunciado, 48
proposición, 33, 34, 38
teorema, 33, 34, 39
teoría de cifras ($\mathcal{N}$), 33
elemento: de un álgebra, 37
de identidad, 111
rector, 210 (componente)
de una deducción en $\mathcal{F}_1{}^L$, 401, 403
de una base y T-deducción, 415, 420
eliminación, teorema de: 404-411
eliminación: de un sujeto en $\mathcal{F}_1{}^L$, 400
empírica, visión—de la lógica: 345
Enriques, F.: 56
entidad: 23
enumerabilidad: de clases dadas, 39
enunciado: 45 ss., 59
elemental, 46
'epi' —: 63
epimorfología: 91, 108
v. t. definición; relación monótona; variable
epiproposición: ejemplos, 63 s.
episistema: 63
epiteorema: ejemplos, 34, 59, 64,
epiteoría: 58, 63-111
naturaleza, ejemplos, 63-68
criterios veritativos, 66 ss.
significación para la lógica combinatoria, 66 ss., 108
historia y origen del término, 108
v. t., algebraica, estructura; consistencia; definición; epimorfología; gödelización; metateoría; relación; variable
Eq: 338 s., 349, 427
Eq': 350, 367, 381, 427
equiforme: 61
equivalencia: clase de relación, 87 ss.
en la teoría de la definición, 96 s.
de reducciones, 166
de H y λ-conversión, 267-277, 271.
v. t. igualdad; cuasi-ordenadora.
error: 114, 195
escritura inglesa: 15
Esqax: (Fp), 393, 399, 406.
(Fλ), 386
V. t. (F*X*) para varios combinadores *X*.
estratificación: definición, 361
ejemplos, 363-366
incumplimiento de la —, 366
teorema de la —, 378 ss.
consecuencias del teorema de la —, 379 s.
necesidad de la —, 384
incumplimiento del teorema en $\mathcal{F}_1$ (λ), 388
incumplimiento del teorema con **I**, **J**, 391
noción de — de Quine, 425
estrictamente F-simples: obs y proposiciones correspondientes, 438
estructura primitiva: 34
estructural, inducción: 73
[ETM]: 404
existencial, cuantificador: 62, 342, 464
v. t. (*E*-); ∃, Σ

expansión, (inversa de la reducción): 126, 150, 342
experiencia: en relación con sistemas formales, 42 s., 345
explícita, definición: 95, 105
exponente: v. potencia
expresión (lingüística): 45, 61
diseño de, 61
extensión: (de un sistema formal), 64, 83.
por definición recursiva-primitiva, 103
normal, 422
v. t.: definicional; de los obs.; de las proposiciones.
extensionalidad: 127, 144, 327
extenso: de la λ-conversión, 127 s., 152, 154
generalizado, 152
compuesto, 162
de la reducción fuerte, 282-286

(*f*): 244
f: 196
f: 164
F: primitiva de funcionalidad. Postulada, 330-333, 332
definición a base de otros obs, 333-336
generalización para funciones de varios argumentos (F-secuencias), 352 s.
v. t. funcionalidad.
(F-): 331
tabla de (F*X*) para varios *X*, 383
F′: 459
$\mathbf{F}_n$: 352 s.
$\mathscr{F}_0$: 338, 348
$\mathscr{F}_1$: 349, 384 ss., 427 s.
v. t.: teoría de la funcionalidad
$\mathscr{F}_1{}^b$: 349, 419, 427 s.
λ-formulación, 384-386
$\mathscr{F}_1{}^I$: 349, 427 ss.
$\mathscr{F}_1{}^o$: 427, 446, 451
$\mathscr{F}_1{}^r$: 448 s., 349, 428, 448-451
: tipificación, 449
$\mathscr{F}_1{}^s$: 448 s., 349, 428, 450 s.
: tipificación, 451
$\mathscr{F}_1{}^t$: 452, 349, 428, 451 s.
$\mathscr{F}_1{}^x$: 428
$\mathscr{F}_1{}^y$: 428
$\mathscr{F}_2$: 336, 343
$\mathscr{F}_3$: 336, 343
$\mathscr{F}_1$: (-,-) : 350
(fab): 244
F*aIa* : no-deducibilidad, 443
F-argumento: 429
fase: (de una reducción definicional), 94
(FB): 331, 343, 350, 353, 375, 383.
derivación a partir de (FK), (FS), 356 s.
derivación sobre base inferencial, 393 s.
relación con transitividad de Ξ′ 454 s.
(FB′): 383
$\mathscr{F}_1$ (B, I. C, K): 350, 419 s.
(FC): 331, 342 s., 350, 353, 375, 383
(FC*): 383
[FCL]: 343
F-componente: 349, 428
F-compuesto: 349, 428
F-consecuencia: 351
F-deducible: 351
F-deducción: 351, 435 ss.
(Fe): 393
[FE] (axioma): 457
Feys, R.: 19, 20, 30, 342
v. t. — y Ladrière
Feys, R., y Ladrière: 109
F-función: 349, 428 s.
(Fi): 394
(FI): 331, 350, 375
derivación a partir de (FK), (FS), 356
como esquema axiomático independiente, 375
carácter obtenido por deducción básica, 377
relación con las reglas E, 429-430
aceptación en $\mathscr{F}_1{}^s$ 448
[FI]: 457
$\mathscr{F}_1{}^I$ (I): consistencia, 432
$\mathscr{F}_1{}^x$ (I): 427
fijo, elemento: en álgebra, 37
F-inferencia: 351
filosofía: de sistemas y métodos formales, 40-44
v. t.: lógica; objetividad; presupuesto; semiótica
finita, formulación: de la funcionalidad, 433, 452 ss., 457 s.
$\mathscr{F}_1{}^I$ (I, *S*): inconsistencia, 430
Fitch, F. B.: 123, 230, 237, 328, 419
(FK): 331, 343, 350, 353, 376
demostración en formulaciones inferenciales, 395, 425,
omisión, 418
[FK]: 457
{FK}: 460

$\mathscr{F}_1$ [K, S): 350
$\mathscr{F}_1^x$ (K, S): 428
(Fl): 399, 402
(FL): 457
F-ob: 330, 336, 348 s., 427 s.
propio, 448
F-ob: 448, 464
(v. t.: L)
F^x- ob: 428
forma: v. forma normal
formación, regla de: 35, 59
v. t.: morfología
formal, implicación: v. generalidad restringida
formal, sistema: 32 ss., 31-62
motivación, 31-32
ejemplos, 33, 58
relación con la lógica, 31, 40, 58
comparación con el álgebra, 37
determinación, 38 s.
relajación de condiciones, 40
filosofía, 40-44, 58
presentación, representación, 40, 41, 58
interpretación, aceptabilidad, 42, 43, 58
aspectos lingüísticos, 44-50, 58
comparación con sistemas semióticos, 48, 58, 60
formas especiales, 50-56
en el sentido de Kleene, 58
concepción nominalista, 60
v. t.: epiteoría, métodos formales.
formal, variable: 78, 80 ss.
análisis de su uso en matemática, 112 s.
como contrapuesta a constante en la λ-conversión, 121
eliminación de, 27, 28, 83, 342 s.
papel especial en la funcionalidad, 362, 381, 399 ss., 416, 419
v. t. variable ligada; variable libre; sustitución.
formales, métodos: 56 ss., 61, 109
v. t. axiomático, sistema; epiteoría; formal, sistema: semiótica; sistema sintáctico
formalizador, combinador: 199, 217 s.
fórmula: numeración: 13
(Fp): 393, 399, 402
(FP): 454
[FPF]: 20, 60, 237, 343, 345
F-P: trasformación, 389
FQ-deducción: 439 ss.
FQ-tipificación: 439-442
(Fr): 399, 402
[FRA]: 26, 58
Fraenkel, A.: 30, 57
frase: 45
FR-deducción: 443-448
definición, 443
Frege, G.: 51, 57, 59, 142, 342
(FS): 331, 350, 353, 363
omisión, 418
papel en la consistencia, 431
[FS]: 457
{FS}: 459
F-secuencia: 352 s.
F-simple: 349, 427
estrictamente, 438
$\mathscr{F}_1$, (S, K): 370
$\mathscr{F}_1$, (S, K): I 396
F-sustitución: 435-439
reductiva, 437
fuerte, forma: de (D), 154
de una regla, 465
fuerte: implicación
definición, 76
respecto de la monotonía, 84 ss.
respecto de propiedades de Q, 310 ss.
reglas en base a la —, 465
fuertes, teorías de la funcionalidad: 426-461
función, combinaciones formadas por sustitución: 20 ss.
definición, 46
análisis de, variables ligadas, 112-121
definiciones sobre $\mathscr{H}$, 238 ss.
v. t. abstracción funcional; funcionalidad; functor.
funcional, abstracción: análisis que lleva a la λ-conversión, 115, 112-120
historia, 142 ss.
definición combinatoria, 239, 240-247
comparación de las dos definiciones, 412
v. t.: λ-conversión; prefijo de corchetes
funcional, carácter: de combinadores, 330, 383
funcional, completitud: 23
funcional, componente: 210 s.
grado de, 210
funcional, grado: 210
funcional, notación: su necesidad en matemática, 113

funcional, posición: 210
funcional, sustitución: (cálculo de predicados), 21
funcionalidad: análisis, 329-33
primitiva de - (F), 331
ejemplos matemáticos, 332 s.
relación con otros conceptos ilativos, 333-336
historia, 342 ss.
interpretación gramatical, 343 ss.
analogía con la implicación, 388-391
v. t.: categoría; F; teoría de.
funcionalidad, regla de: es decir, regla de la teoría de la funcionalidad
v.: Eq, Eq'; regla inferencial; regla F; regla F'.
functiva: 35, 46
clases excluidas de un sistema formal, 37
functor: 45, 46
clasificación y ejemplos usando F 331 s., 344
(FW): 331, 342, 350, 353
demostración en formulaciones inferenciales, 395, 402, 403
omisión, 419
papel en la inconsistencia, 430-431
$\mathscr{F}_1'$ (W): inconsistencia, 430-431
(F λ): 385
$\mathscr{F}_1$ (λ): 386
$\mathscr{F}_1$ $(\lambda)^L$: 398
$\mathscr{F}_1$ $(\lambda)^T$: 393, 398
$\mathscr{F}_1{}^b$ (λ): 385
$\mathscr{F}_1{}^x$ (λ): 428

g: 196
generales, reglas: 465 s.
generalidad en relación con el nominalismo: 61 s.
medios de expresión a base de F: 453-457
v. t.: -restringida, -universal
generalidad restringida: 333, 342, 464
v. t.: Ξ
generalización de S: 250
generalizada, aritmética: (Kleene), 58
genético, principio: (definición inductiva), 38
Gentzen, G.: 109, 326, 391 ss.
geometría: naturaleza de la -axiomática, 31
Gilmore, P. C: 12, 62
[GKL]: 20, 27, 29, 65, 110, 194, 220, 222, 236 s., 299, 300, 301, 322, 343, 463
Gödel: K., 26, 30, 65, 110, 346
Gödel, teorema de: 110, 346
gödeliana, representación: 42, 110
gödelización: 110
v. t.: representación gödeliana: teorema de Gödel
Goodman, N.: 62
góticas, letras: 15, 84, 122, 240, 393.
grado cero: (functiva, 35).
grado: de un functor, 35, 46
de un combinador regular, 208, 225 s.
de un componente funcional, 210
gradualmente, cuasi-ordenadora producida —: 150 s.
gramatical, interpretación de la funcionalidad: 343 s.
lenguaje, 45
gramática: 45, 59, 60, 343 s.
griegas, letras: 15, 84, 329, 336, 465 s.
grupo: teoría de: como ejemplo de sistema formal, 37, 50, 58
como álgebra, 110

(H): = Propiedad (H), 164 ss., 174
H_o: — H_7, 165
H: (categoría de proposiciones), 332
h: 196
$\mathscr{H}$: 238 ss.
formulación básica, 238-243
axiomas (combinatorios), 250-261, y 258 s.
prefijo de sustitución, 262-266
equivalencia con la λ-conversión respecto de $\mathscr{J}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$, 266-277, 274.
reducción a sistema logístico, 305-321
[$\mathscr{H}$] : (sistema), 316
$\mathscr{H}'$: 239 ss.
$\mathscr{H}_\beta$: 259
$\mathscr{H}_\eta$: 259
$\mathscr{H}_o$: 247, 251 ss.
[HA]: 20, 1.ª
v. t.: Church [res HA]
Hammond, L. M.: v. [HA]
Hardy, G. H.: 57
[HB]: 22, 42, 56, 57, 310, 1.ª
Herbrand, J.: 20, 26, 86

Hermes, H.: 37, 49, 60
Hetper, W.: v. Chwistek, L., y Hetper
Heyting, A.: 20, 57, 58, 67
Hilbert, D.: métodos formales, 42, 51, 57, 108, 109, 345 s.
carta de Curry a 236 s., 343
v. t.: [HA]; ([HB]; Bernays [HUG]; Weyl [DHM]
Hilbert-Brouwer, polémica entre: 57
historia: lógica combinatoria en general, 27-30
métodos formales, 56-58
epiteoría, 108-109
abstracción funcional y λ-conversión, 142-143
teorema de Church-Rosser y temas relacionados, 194-195
teoría de combinadores, 236-237, 299-300, 322
lógica combinatoria ilativa, 342-343
v. t.: Bell [DMth], bibliografía; Cajori (HMth], Enriques [SLg], Jorgensen [TFL]; Jourdain [DTM]: Scholz [GLg]
homomorfismo: 111
H-teoría: 413
H-transformación: 269
huella: de un componente, 188
Huntington, E. V.: 51, 57
$'(x)$: 243

$\overline{\mathbf{I}}$: 209
I: 197
definición a base de **K**, 203, 236, 242, 248
en teorías sin **K**, 206, 209, 236, 244, 298
historia, 27, 236, 299
en el producto compuesto, 211 ss.
operación asterisco, 215
papel en el prefijo de corchetes, 241 s.
como primitiva independiente con **K**, 281, 254, 258-259, 269-270, 376 s., 419
reducción fuerte del — determinado, 281
como categoría, 333, 457
v. t. **(FI)**; identificador
(I): 197, 241, 306, 466
v. t.: regla $\mathbf{I}_1$
$\mathbf{(I)}^c$: v. regla **Ir**
$\mathbf{I}_\eta$: 237, 254, 256, 464
$\mathbf{I}_\lambda$: 270
$[\mathbf{I}_0]$: 261
$[\mathbf{I}_1]$: 260
$[\mathbf{I}_2]$: 255
I-consistencia: definición y significación, 430
de $\mathscr{F}_1'$ **(I)**, 432
deducida del teorema de tipificación, 442
para $\mathscr{F}_1^\circ$ finito, 459
idea: (= concepto), 45
v. t.: idea primitiva
ideal: 111
idealismo: crítica, 58
v. t.: intuicionismo
identidad: de proposiciones en extensiones diferentes, 83 s.
uso de '=', 89
en la teoría de la definición, 96 s.
reflexividad (v. t. $\mathbf{Q}^\rho$)
v. t. igualdad
identidad, elemento de: 111
identificables: sujetos en una proposición, 401
identificador: 209, 300
elemental, 197
[IFI]: 53
[IFL]: 29, 237, 324, 343
[IFT]: 332
igualdad: en álgebras y sistemas relacionados, 37, 50
en una sintaxis, 49
en lógica combinatoria (general), 89
en λ-conversión—λ, 123 ss.
en $\mathscr{H}$, 239
formulación mediante **Q**, 304 ss. 429
como predicado auxiliar, 337, 350
en $\mathscr{F}_1$, 349 ss., 429
v. t., Eq.; sistema ecuacional; equivalencia; **Q**
ilativa, lógica combinatoria, definición: 25, 324
etimología del nombre, 324
naturaleza y objeto, 323-336
interrelaciones de ideas, 333-336.
terminología para las partes, 336 s
consistencia, 109 s., 345-346
historia, 342-343
v. t.: igualdad; funcionalidad; generalidad; regla ilativa; implicación, categoría universal

ilativa, regla: (regla de la lógica combinatoria ilativa).
v. t.: Eq, Eq′; regla de funcionalidad; regla E; regla P; regla Ξ, regla π.
implicación: no-constructividad, 66
conexiones constructivas débiles y fuertes, 76
paradoja basada en (PW), 324
relación con la generalidad restringida, 334 s., 342.
historia, 342 s.
analogía con la funcionalidad y el álgebra absoluta, 389 ss.
teoría débil, 391 ss,, 418
v. t. P.
impropia, o: ob, proposición, etc. en $\mathscr{F}_1^s$, 448
incluye (lectura de '⊢'): 76
incompletitud: teoremas de: v. gödelización
inconsistencia: efecto sobre la aceptabilidad, 43-44, 345-346
de (PW) 324
de $\mathscr{F}_1$ con W, o I y S, 430 ss.
incorporación: de la teoría intuitiva de combinadores a la teoría sintética, 249 s.
indecidibilidad: 26, 110, 142 s.
v. t.: gödelización
independencia: condiciones para combinaciones, 107
definicional de combinadores, 230 ss., 235 s.
indeterminada: definición, 78
discusión, 80 ss.
añadida, 83
papel de la -inicial en la reducción, 286, 340
v. t. variable libre
indeterminados, sistemas; 39
índice: 16, 412 ss.
para propiedades de relaciones, 305, 465
v. t.: índices especiales al comienzo de este registro.
índice: de un paso, de un extenso, etc., 284
v. t.: subíndice
individuo, como categoría: 332
inducción, técnicas de: 68-77
diferentes clases de demostración por -73 s.
inductiva, o: clase, 38, 68
definición, 38, 58
paso de una demostración, 73
Inferencia, v. Eq, Eq′; F-inferencia.
inferencial, forma de la funcionalidad: 391-425
v. t.: T-forma de la funcionalidad; L-formulación
inferencia, regla: 109
v. t.: forma inferencial de la funcionalidad; L-regla; T-regla infijo, 46
inicial, indeterminada (en la reducción): 286, 340
especificación -(de una definición inductiva), 38
inscripción: 61
intercambiabilidad: 90
interdefinibilidad: v. definibilidad
interpretación: 42 s.
directa, 43
válida, 43
v. t.: aceptabilidad, significatividad; verdad
introducción: de sujeto en $\mathscr{F}_1^L$, 399 s.
intuicionismo: 57, 58
intuicionista: implicación, 388-391
cálculo de predicados, 67
'intuitivo, a': 42
intuitiva: teoría —de combinadores, 196-236
incorporación a la teoría sintética, 249 s.
intuitiva, variable: 78
invariancia: de un sistema logístico respecto de $\mathscr{H}$, 318
irreducibilidad: de un abstracto funcional respecto de un algoritmo, 245 s.
respecto de una base radical y una F- deducción, 421
v. t.: forma normal
isomorfismo: 111
de $\mathscr{J}$ y $\mathscr{M}$, 273 s.
iteración, de una operación: 211
iterador: 224 s.
v. t. Z
iterando: 223
iterativa, secuencia: 223 s.
representación explícita, 225

izquierda, o, constituyente: 399
monotonía, 87
punto, 75

J: 115, 200, 331 s.
J: 206, 299, 301, 391
(J): 206, 466
$\mathscr{J}$: 267-274
como base de la reducción fuerte, 282 ss.
jerarquía: de categorías, 328, 332
Jorgensen: J., 56
Jsl, 1.ª

K: 155
$\mathfrak{K}$: 209, 301
K: 198, 267
uso para definir, I′ Φ, $\mathbf{Z}_o$, etc., 203, 218, 224
definibilidad, 235 s.
historia, 27 ss., 236, s., 299 s.
papel en el prefijo de corchetes, 240, 242
dificultades semánticas, 123, 144, 187 s., 327, 418
se evita en la demostración de consistencia, 431-432
v. t.: cancelador: (FK); (K); [K]; [KI]; [KQ]; reglas $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, [SK]
(K): 198, 241, 305, 466
naturaleza como esquema axiomático en $\mathscr{H}$, 242 s.
[K]: 258
$[\mathbf{K}]^R$: 316. v. t.: regla $\mathbf{K}_2$
$[\mathbf{K}']^R$: 316
$\mathbf{K}_n$: 215, 237
$\mathbf{K}_\lambda$: 267
$\mathscr{K}$: 313 ss., 238
consistencia, 315, 321
$\mathscr{K}'$: 321
Kershner, R. B., y Wilcox: 56
Keyser, C. J.: 57.
[KI]: 259
$[\mathbf{KK}]^R$: 316
[KI]: 398, 401
efecto sobre el teorema de eliminación, 411, 417
Kleene, S. C.: bibliografía e historia, 56.
aritmética combinatoria, 26, 29, 237
examen de Curry [OFP], 58
métodos formales, 40, 56, 58, 70, 71, 73, 108, 109
técnica de Gentzen, 109
definiciones inductivas, 38, 72
notación, 462-464
aritmética recursiva, 26, 91, 96, 98, 100, 102, 108, 222
λ-conversión, 121, 143
v. t.: Church, A., y -; paradoja de Kleene-Rosser
Kleene-Rosser, paradoja de: 142, 295, 343.
[KQ]: 312
$[\mathbf{KS}]^R$: 316

L: 155, 268
L: 457
$\mathbf{L}_o$: 458
$\mathbf{L}_1$: 458
$\mathscr{L}$: 238, 266 ss., 274
Ladrière, J.: 195
v. t.: Feys, R., y —
lambda-conversión: v. λ-conversión
[LCA]: 19, 342
Lecki, G. G.: v. [HA]
Leibniz, propiedad de -de la igualdad: 304
v. t.: $\mathbf{Q}^q$; [⊢]
lema, convenciones sobre: 14
lenguaje: 44
nociones relacionadas con, 44-50
Lesniewski, St.: 61, 343
letra: uso de, 14 s.
lista de constantes básicas, 462-464
v. t.: redonda; mayúscula; gótica; griega; cursiva; inglesa
letras cursivas: 14, 122, 196
letras mayúsculas: 14-15, 122, 267
letras negritas: 14, 164
v. t. **D, R.**
letras redondas: 15, 464
Lewis, C. I.: 57, 60
L-formulación: (funcionalidad), 397-404
teorema de eliminación, 403-411
relaciones con otras formulaciones, 412-419
v. t.: regla L
[LFS]: 45, 48, 58 ss.
libre, caso: de una variable, 122
libre, teoría: de la funcionalidad, 332, 350, 427

inconsistencia con (FW), 430
v. t. $\mathscr{F}_1'$
libre, variable: 82
relaciones con las variables ligadas, 122, 124
v. t. formal, variable; indeterminada; - de sustitución
ligadura: operación de, 118
v. t. cuantificador
lineal, lenguaje: 45.
linealización de reglas: 316
lingüístico, aspectos -de un sistema formal: 44-50, 56 ss.
[LLA]: 42, 49 ss., 57 s., 86
llave: 120, 459
en las antiguas teorías de Church, 143
[LMF]: 48, 57 ss.
lógica: sistemas formales en relación con la —, 33, 40, 58 ss.
concepción empírica de la- 345 s.
v. t.: lógica combinatoria; métodos formales; historia; cálculo de predicados; álgebra proposicional
logístico, sistema: 51
trasformación de un sistema en otro, 51 s, 309-313, 317 ss.
criterios para lógica combinatoria, 302, 317, ss.
Logísticos, fundamentos: 302-322
criterios a cumplir, 302, 317 s.
reglas E, 303
propiedades de relaciones, 305-309
reducción a [$\mathscr{H}$], 305-309, 316 ss.
reglas combinatorias, 305 ss.
sistemas $\mathscr{Q}$, 309-313
sistemas $\mathscr{K}$, 313-315, 321
historia, 322
longitud: de una reducción relativa, límite superior, 173.
Lorenzen, P.: 58, 109
Lovaina: 11
Löwenheim, L.: 110
[LPC]: 20
L-regla, para la funcionalidad; 398, 401 ss.
L-sentido, de una proposición: 412
[LSF]: 58, 60
Luce, R. E.: v.: [HA]
Lukasiewcz, J.: 46, 53, 462-464
L-verdad: 59
v. t.: [LSF]
[Lθ], 457

M: 118, 155, 200, 268
$\mathfrak{M}$: 268 s.
$\mathscr{M}$: 268 s., 269-274
McKinsey, J. C. C.: 60
MacLane, S.: 86
Markov, A. A.: 58, 60, 95, 243, 303
matemática: inducción, 74
matemática: definición, 58
demostración de consistencia como justificación de la- 345 s.
máximo: (extenso), 166
mayor: argumento, 71
contracto, 285
premisa, 92, 351
extenso, 285
paso, 285
Menger, K.: 30, 112, 116, 142
mención: de expresiones, 45
menor: argumento, 71
premisa, 92, 351
meta-: distinto de 'epi'-, 108
lenguaje, 59 ss.
matemática (Hilbert), 109
sistemas, 58 ss.
teoría, 110 s.
metodología: v. métodos formales
minimalización: de una reducción relativa, 169 ss.
mínimo: extenso, 166
reducción relativa, 167
secuencia de extensos, 167
mixto: nector, 345
modelo: 43, 111
modificado, diagrama arborescente: para la reducción definicional, 93
para la F-deducción, 351 s.
modus ponens: 20, 324, 390, 398
v. t.: regla P
monádica, functive: 35, 46
monótona, o: relación, 87-89
equivalencia, 87, 89
relación cuasi-ordenadora, 87-89
carácter de una operación primitivo-recursiva, 105-107
monotonía: 87

Moore, E. H.: 57, 120, 329.
morfología: 34
de λ-conversión, 121-123
de $\mathscr{H}$, 238 ss.
de sistemas logísticos, 302 ss.
de sistemas ilativos en general, 336 s.
de la funcionalidad, 348 ss.
v. t.: epimorfología
Morris, C. W.: 44, 59, 60
Mostowski, A.: 109
MRv 1.ª
[MSL]: 58, 60
múltiple, caso: de variables, 123, 244, 370 s., 376, 379, 418 s., 442.
v. t.: W
múltiple: sustitución (reducida a simple), 21, 80, 140.
Myhill, J.: 26

N: 118, 155, 212, 228, 268, 324
$\mathfrak{N}$: 268
$\mathscr{N}_0$: 33
como pura morfología de obs sólo, 36
como base de secuencias numerables, 39, 55.
representación, 41 s.
representación de un sistema formal en -, 41, 110
como sistema logístico, 52
formalización completa, 55
ejemplos de epiteoremas, 63 s., 72 s.
Nagel, E.: 56
National Science Foundation: 11, 17
nato: combinador, 246
natural: inducción, 74
número, v. número
nector: 344 s.
v. t.: gramática
negación: 66, 212, 464
relación con la paradoja de Russell, 23, 325
Neumann, J. von: 30, 57, 83
Newmann, M. H. A.: 147, 154, 195
nivel: en la teoría del prefijo de sustitución, 132
de un paso, 284
noción: 35 s.
nodo: 68 ss.
nombre: 45
— ádico: -ario, 35
nominalismo: 61 s.
normal, base: 416, 420
normal, extensión (de una base radical): 422
normal: forma, definición en λ-conversión, 128
relación con significatividad, 144, 187, 303, 322, 326
forma abstracta para el teorema de Church-Rosser, 147
reducción a en λI-conversión, 183-187
modificación en λ-K-conversión, 187-188
relación con orden, 193
relaciones con la reducción fuerte, 287
para reducciones sin repeticiones, 376 s.
de un sujeto en $\mathscr{F}_1^{Lb}$, 401, 422
normal, reducción: en λ-conversión, 183
en reducción fuerte, 286 ss.
normal, representación: de una combinación mediante un combinador, 300
normal, secuencia constructiva: v. secuencia normal.
normal, secuencia deductiva: v. secuencia normal
normal, secuencia representativa: 169
normal, secuencia de una construcción: 70
de una deducción, 72
normal, teorema de la forma -: en λI-conversión, 186
incumplimiento en la λK-conversión, 187
en la reducción fuerte, 288
normalización, teorema de (para FR-reducciones): 443 s.
notación: 13-17, 74-77
funciones y λ-conversión, 113 ss., 121 ss., 143
teoría de combinadores, 197-200, 207-210, 238 s., 267 s., 305
algoritmos, 243 s.
fundamento logístico, 305
lógica combinatoria ilativa, 336 ss.
funcionalidad, 348-352, 392 ss., 412 ss., 439, 452, 457
v. t.: afijo; algoritmo; corchetes; letra; prefijo; relación noción, 45
auxiliar, 36
propia, 36
nombre, 45
[NPC] (corrección), 195

n-tuplo: v. **D**
nuevo, a: obs, operaciones, etc., de una extensión definicional, 91
nula, o: (conversión, etc.), 342
número: v.: aritmética; $\mathcal{N}_o$; $\mathbf{Z}_n$

θ: 268
Ob: 33, 34
comparación con elemento de un álgebra, 37
determinación, 38, 71
conexiones lingüísticas, 45, 46
básico, 51
concepción nominalista, 61 s.
unicidad de la construcción, 71 s., 107 s.
combinatorio, 207
λ-ob, 207
v. t.: F-; morfología; propio; representación
ob, 80
ob, extensión de los: 64, 83, 239 ss.
ob, relativización de los-: 107
objetividad: de un sistema formal, 33, 40, 58
objeto: 45
lenguaje- 48, 58 ss.
observación: 14
ocurrencia: v. caso
[OFP]: 34, 37-39, 42, 49, 50, 56, 58, 60, 66, 345
onomática: 59
ontología: 61
de un sistema formal, 40 ss., 58
O_m-ob: 257, 275
O_1-ob, 255
operación: 34, 45
en un álgebra, 37
sentido ampliado, 35, 37, 91 s.
clases especiales en la extensión definicional, 91-95
de ligadura, 118
v. t.: operación primitiva
operador: 45
funcional en matemáticas, 113 s.
ejemplos, 332 s., 344 s.
v. t.: adjuntor; cierre; infijo; yuxtaposición; prefijo
orden: de un λ-ob, 188, 188-194
invariancia de la β-conversión, 191
de un combinador, 208, 225-228
de un combinador regular, 227
ob de - infinito (ejemplo), 229
de primera o última ocurrencia, 231, 234
ordenado, *n*-tuplo: v. **D**; par
ordinales, números: 26
originario, lenguaje U: 47
encima: de nodos en una construcción, 70, 72

P: 154, 268
$\mathfrak{P}$: 268
P: 462 ss.
paradoja de Russell, 324
relaciones con otros conceptos ilativos, 333 ss., 403
historia, 342 s.
analogía con **F**, 388-391
(P-): 390
palabra: 45
$\mathbf{P}_m$: 391
par: v. $\mathbf{D}_2$
paradoja: 1 ss.
v. t.: [IFL]; inconsistencia; paradoja de Kleene-Rosser; combinador paradójico; paradoja de Russell
paradójico, combinador: 229, 228-230 (= **Y**), 464
historia, 236 s.
uso, 324 s., 429 s., 437
paralelos, movimientos: 153
paramétrico, constituyente: 400
parcial, definición recursiva: 96, 103 ss.
parcial, sintaxis: 49
parcial, teoría: de la funcionalidad, 338, 350, 418, 427, 442 ss.
v. t.: ocurrencia múltiple
paréntesis: 16, 46, 53, 74.
cuantificador U universal, 77, 120
uso para reglas, 15, 196, 465
en la anterior teoría de Church, 143
v. t.: asociación por la izquierda; corchetes; notación del prefijo
Pasch, M.: 56
paso: de una demostración inductiva, 73
de una reducción, 150, 183, 282-286
(PB): 390.
(PB′): 390
[PBP]: 20, 342
(PC): 390
Peano, G.: 30, 49, 57, 107, 120, 142, 334, 342
Peano, postulados de: 107
[PEI]: 29, 343
permutativo, efecto: 341 s.

permutador: 209, 300
elemental, 197
Péter, R.: 26
P-F-transformación: 390
Pieri, M.: 56
Pierpont, J.: 57
(PJ): 391
(PK): 390
[PKR]: 24, 26, 29, 58, 236 s., 343, 462-464
plena, λ-conversión: 128
residuos en, propiedad (D), 156 ss.
incumplimiento de (E) y (D) fuerte, 159
teorema de Church-Rosser, 180-183
plena, teoría de la funcionalidad: 332, 337, 351, 427
anterior sentido, 431
inconsistencia si es libre, 430
[PM]: 20, 23, 57, 114, 1.ª
polinomio: 37, 59
posición: de argumento, de función, 210
posposición: de η-contracciones, 175
Post, E. L.: 20, 26, 54, 60
postulado: 36, 55
potencia: de un ob combinatorio, 212 s.
pragmática: 59
(PRC)]: 109
predicado: 35, 38, 45
de proposición de la teoría ilativa, 342
v. t.: primitivo, universal
predicado, conversión del: 342
predicado, expansión del: 342
predicado, reducción del: 342
v. t.: FR-deducción
predicados, cálculo de: regla de sustitución en el —, 21
epiteoría, 108
predicativo: 45, 344
prefijada, secuencia: 122
prefijo: clase de operador, 46
de un λ-ob, 122
de un estadio, 284
v. t.: corchetes; notación; cuantificador; sustitución
prefijo, notación: (Lukasiewicz), 46, 53
prelógica: 19
premisa: 72, 92, 351
presentación: 40 s.
presupuesto: v. a priori
prima: proposición, 406, 414
primario, a: functor, 343
fase, 94
primer caso: 231, 234
primitiva, constante: λ-conversión, 121, 128
primitivo, combinador: varias elecciones, 27, 200-206, 235 s., 242, 243 s., 299.
condiciones sobre — 231 s., 234.
efecto sobre los teoremas de $\mathscr{F}_1{}^b$, 373, 379
conexión con los axiomas del álgebra absoluta, 392
presupuestos sobre — en la teoría ilativa, 412 s.
v. t.: definibilidad; también los combinadores separadamente
primitiva, estructura: 34
primitiva, idea: 34, 54
v. t.: átomo, operación primitiva; predicado primitivo
primitiva, operación: 34, 54
reducción a la aplicación, 53 ss.
primitiva, proposición: 35
primitivo, ob: v. átomo
primitivo, predicado: 34, 54
reducción a la aserción, 51 s.
v. t.: aserción; igualdad
primitivo-recursiva: definición, 103 ss.
operación, 103-108
principal: axioma, 43
rama, 93, 70, 350
constituyente, 399
contracción, 94
dato, datum, 71
operación, 94
premisa, 72
paso, 284
Principia mathematica: v. [PM]
principio: v. principio productor
problemas de la lógica combinatoria: 22 s.
producción: de una definición inductiva, 38
de una relación monótona cuasi-ordenadora, 87
de una equivalencia en la teoría de la definición, 97, 163 s.
gradual de una relación cuasi-ordenadora, 150
iterativa de una secuencia, 223

producida, equivalencia: en la teoría de la definición, 97
propiedad de Church-Rosser para la, -164
propia, o: combinación, 72.
combinador, 208, 231 ss.
componente, 72
definición, extensión definicional, 95
propiedades de la igualdad: 304, 321
propiedades de relaciones: 305-308, 465 s., 84 ss.
propiedades (B), (C), (D), (E), (H): v.: las letras correspondientes
proposición: 45 s, 66.
extensión, 64
invariancia respecto de extensiones, 83 s.
sujeto y predicado de, 341 s.
clases especiales respecto de F-deducciones básicas, 419 s.
FQ-deducciones: 438
propia e impropia en $\mathscr{F}_1^s$, 448
v. t.: elemental; enunciado, verdad.
proposicional, álgebra: analogía con la funcionalidad, 388-391
proposiciones: como categoría interpretada, 29 s., 45
como categoría formal, 51, 324-329, 331 s.
(= H), 464
(PS): 390
punto: 16, 75, 115.
punto: (grupo de puntos gráficos), v.: punto gráfico
pura, combinación: 207
pura, lógica combinatoria: 25
v. t.: fundamentos logísticos; teoría de combinadores; λ-conversión pura, η-conversión, 174
puro, sistema axiomático: 32
(PW): 324, 327, 390

Q: 155, 268
Q: 16, 309
Q^k: 312
Q^s: 312
Q^θ: 313, v.: también regla Eq.
Q^μ: 313
Q^ρ: 310 s.
Q^σ: 311
Q^τ: 311
Q^φ: 310-313, 320
$\mathfrak{Q}$: 268
Q: 304, 338
en los sistemas $\mathfrak{2}$, 309, 311, 318, 338
definición a base de Ξ, F, 314, 322, 427 ss.
historia, 322
otras notaciones, 462 ss.
Q^φ : (regla -) 312
Q_0 : (regla-) 312
Q_1 : (regla) 313
$\mathfrak{2}$: 309-313, 320
relaciones con la regla Eq. 338
$\mathfrak{2}'$: 319-321
$\mathfrak{2}s$: 310
$\mathfrak{2}_\eta$: 310
$\mathfrak{2}_0$: 310,
Q-consistencia: 315, 339, 430
v. t.: I-consistencia
(QE): (regla (QE), 312 s.
[QE]: (axioma), 314
[QQ]: (axioma), 312
Q, regla: 309-313
Quine, W. V.:
nominalismo, 62
representación con dos símbolos, 42
generalidad restringida en [SLg], 27, 342
semiótica, 42, 50, 60, 61 s.
estratificación, 361, 425

R: 155
R: 16, 85-89, 105 s., 125 ss., 248, 305-310, 440, 465
[R]: 305 ss., 465
R^c: 305
$\mathfrak{R}$: 152 ss., 169 ss., 209
radical: base 420
elemento, 403, 420
proposición, 403, 420, 449
rama: (de un árbol) 70 s., 93, 351.
Rd: (regla -), 90
[RDN]: 58
realidad: v. aceptabilidad; validez
recursión, combinador de: (R), 464
'recursiva, o': uso anterior, sustituido por 'inductiva, o', 38
recursiva, aritmética: 26, 28, 92, 98 ss., 110, 225
la propiedad de Church-Rosser en la, 195
el uso de los combinadores Φ_m^n S_n [m] en la —, 222
relación con los combinadores 265, 224 s.

recursiva, definición: 96, 103 s.
v. t.: recursiva, aritmética
recursiva, función: v. aritmética recursiva
'recursivamente producida': término antes usado, sustituido por 'inductivamente', 38
recursividad: v. aritmética recursiva; definición recursiva
—red— 16, 216 —β,— δ, -η, etc., v.: -β, -δ, -η.
redonda, letra: 15
reducción, estadio de una: 150, 183, 283
reducción especial: 181
reducción fuerte: 278, 277-298
discusión preliminar, 278-283
propiedades definidoras, 278
propiedad de Church-Rosser, 280
formulación estricta, 282-286
forma normal, 287
teorema de la forma normal, 289-298
problemas irresueltos, 298
teoremas de la conversión de sujeto, 376-378
efecto sobre la tipificación, 421, 442, 448, 450
reducción: de sistemas formales a formas especiales, 50 ss.
propiedades básicas y definiciones de la - en la lógica combinatoria ilativa, 340-342
v. t.: reducción combinatoria; reducción definicional; red; reducción de predicado; reducción de sujeto; λ-reducción: ≥ ; ⊤.
reducción, regla de: 197, 206, 231, 322, 466
reducibilidad: v. reducción
reductiva, F-sustitución: 437
referencias internas: 13
reflexividad: 87
de la identidad en [GKL],29
en extensiones definicionales, 95 s.
v. t.: regla E; (ρ).
regla fuerte, sentido de una: 311, 465
regular, combinador: 208
orden de, 225 ss.
papel en representación normal, 300 s.
carácter funcional cuando es estratificado, 381
relación, 84-90
v. t.: D; igualdad; relación monótona; Q; cuasi-ordenadora; R.
relacional, sistema: 50
relativa, reducción: 152, 173
(longitud de)
definición, extensión definicional, 91 ss.
invariancia, 318
relativización: de los obs, 107
representación: de un sistema formal, 40 s, 58 s.
en (de Gödel), 41, 110
de una combinación por medio de un combinador, 239 s., 300
representativa, secuencia: 169
Research Corporation: 11
residuo, residual: 152, 154, 156, 164
restringida, interpretación: de la lógica combinatoria. v.: extensionalidad; significatividad; δ-conversión; λI-conversión.
restringida, regla F: 350
restringida, teoría de la funcionalidad: 332, 350, 428, 448-452
v. t.: $\mathscr{F}_1^r$, $\mathscr{F}_1^s$, $\mathscr{F}_1^t$
restringida, λK-conversión: 187
res. l.ª
[res A]: 328
[res R]: 299
[res Z]: 22
retículo: 50
[RFR]: 120, 299, 322
Rosenbloom, P. C.: axiomas combinatorios, 260, 299
lógica combinatoria en su conjunto, 19
comentarios sobre consistencia, etc., 23, 29
puntos, 75
métodos formales y sintaxis, 42, 46, 54, 60, 81
notación y terminología, 22, 23, 54, 75, 120, 462-464
combinador paradójico, 237
reducciones y representaciones, 42, 46, 54, 81
sustitución, 22
Rosser, J. B.: aritmética combinatoria, 26
axiomas combinatorios, 259
lógica combinatoria en su conjunto, 19
reglas combinatorias, 304-309
consistencia (anterior al teorema de Church-Rosser), 194
[DEL], 19, 26, 237, 244, 259, 327
reglas E, 303, 312, 322, 327

equivalencia de $\mathscr{L}$ y $\mathscr{H}$, 244, 299
métodos formales, 58, 75, 112, 304, 316
[LMt], 75, 76, 112, 120
fundamentos logísticos, 303, 304, 307, 316, 322
[MLV], 26, 28, 76, 206, 220, 236, 237, 299 s., 303, 304, 308, 316, 322, 462-464
notación, 75, 76, 120, 462-464
[NSP], 299, 322
res A, 328
teoría de combinadores, 206, 237, 298, 299 s.
λ-conversión, 142 s.
v. t.: Church y -; Curry [res. R]; Klene Rosser, paradoja de
Rp: 86
$\mathfrak{R}$ -reducción, 152

regla, de un sistema formal: 36
de un semántico, 59
naturaleza de las -en $\mathscr{H}$, 242 s.
lista de — generales y de reducción, 465 s.
v. t.: regla combinatoria; regla deductiva; regla derivada; regla determinística; regla de formación; regla ilativa; regla inferencial; modus ponens; regla **Q**; Rd; regla de reducción; Rp; regla de sustitución; regla λ; para las reglas de sistemas especiales v. dichos sistemas. Nota: las siguientes reglas especiales entran en este índice sin más denotación que el símbolo: (Cl), (Eq.), (Eq′); (Fe), (Fi), (Fl), (Fr), (Kl), (We), (Wr), y todas las enumeradas en pp. 465 s.
regla **E**: 303, 338
derivación, 434, 458
regla **F**: 330, 337, 349
regla **F′**: 459
regla, formulación de, (Gentzen): v.: regla inferencial
regla $\mathbf{I}_1$: 309
regla $\mathbf{I}_2$: 309
regla $\mathbf{K}_1$: 309
regla $\mathbf{K}_2$: 309, 316
regla *P*: 324, 335, 390, 453
restricciones de Fitch, 328
v. t.: modus ponens
regla $\mathbf{Q}^{\varphi}$: 312
regla $\mathbf{Q}_0$: 313
regla $\mathbf{Q}_1$: 313
regla (**QE**): 312
regla $\mathbf{S}_1$: 309
regla $\mathbf{S}_2$: 309
regla Ξ: 314, 334, 337, 452
regla π: 334, 337
Runes, D.: v.: Church [Abs]
Russell, B. A. W.: 20, 57, 334
v. t.: [PM]; paradoja de Russell
Rusell, paradoja de: 225 s., 228, 237, 324 ss.
R1-3: 339, 440, 449
R4: 339, 437

S: 155
S: 15
$\mathfrak{S}$: 90, 412
$\mathfrak{S}_0$: 90
S: 199
definición a base de otros combinadores, 200 s., 203-206, 214 s., 235 s.
historia, 27 ss., 236 s.
presencia en la teoría de conjuntos, 30
combinadores relacionados con, 217-225
papel en el prefijo de corchetes, 241 s.
generalización de, 250
en $\mathscr{J}$, $\mathscr{M}$, 267 ss.
carácter funcional, 351 ss., 362
papel en la inconsistencia, 430 s.
v. t.: Ax. [S]; Ax [SI]; Ax [SK]; Ax [SQ]; [FS]; reglas $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$
(**S**): 199, 204 ss., 244 ss., 306, 466
[**S**]: 258. v.: también regla $\mathbf{S}_1$
$[\mathbf{S}]^C$: v. regla $\mathbf{S}_2$
$\mathbf{S}_n$, 218, 249, 383
$\mathbf{S}_{[n]}$: 220 s.
$\mathbf{S}_n^{[m]}$: 222
Sλ: 267
SB: 383, 463, 464
Scholz, H.: 57, 60
Schönfinkel, M.: 20, 28, 235
concepto de función (aplicación), 53, 116, 144
reducción a un átomo, 54
noción ilativa (*U*), 27, 342 s.
notación, 27, 462-464
combinadores primitivos, 27, 236, 299 ss.
Schroer, D.: 195
Schröter, K.: 60
Schütte, K.: 109

sección: 13
secuencia: de obs, 39, 54
constructiva, 68 ss.
deductiva, 71 s,
prefijada, 121 s.
mínima de extensos, 167
especiales de combinadores, 211 ss., 217-222
iterativa, 223 ss.
F, 352
secuencial, reducción: 167
secundarias, funciones: 344
segundo teorema de Church-Rosser: 186, 181-188
formas para la λK-conversión (tercer teorema de Church-Rosser): 187 s.
selector: 234
semántica, categoría: v. categoría
semántica: 59 s.
semiformal, sistema: 40
semigrupo: combinatorio, 301
semiótica: 44, 56-61
v. t.: semántica; sintaxis
semitípica, o: FQ-deducción, 439
proposición, 439
sentido: 59
de proposiciones de $\mathscr{F}_1$, 412
sentido estricto, de la traducción: 319
[SFL]: 42, 49, 58
Sheffer, H. M.: 27, 57, 342
[SI]: 259
significación: 41 s, 59
significatividad: de obs, obs sin sentido, 120, 143, 188, 230, 303, 322, 323 ss., 327, 342
v. t.: forma normal; ob propio; categoría universal
SII: v. W*
Sillars, W,: 12
simbolismo: v. presentación; representación; simiótica
símbolo: 14 ss., 44 ss.
v. t.: notación
simetría: v. (σ)
simple: ob de una extensión definicional, 93
F-ob, 428
v. t.: F. simple
simultánea: sustitución (o múltiple), 140 s., 80
'singular'; 35
sin-sentido, obs: v.: significatividad
sintáctica, categoría: v. categoría
sintáctico, sistema: 48 ss., 59 ss.
sintaxis: 48, 59
v. t.: sistema sintáctico
sintética: teoría de combinadores, 24 s., 238-298
historia, 299 ss.
v. t.: análisis de la completitud combinatoria; prefijo de corchetes; axiomas combinatorios.
$\mathscr{H}$
reducción fuerte; prefijo de sustitución
sistema: v. aletheútico; axiomático; formal; sintáctico; también los sistemas $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$, $\mathscr{Q}$
sistema esquemático: 605,
[SK]: 258
Skolem, Th.: 30, 110
Smeaton, Amethe: v. Carnap [LSL]
[SQ]; 312
[STC]: correcciones, 299
Steinhardt, F.: v. [HA]
subíndice: 16, 54, 213, 218 ss., 268, 412
evitación de los numéricos, 218, 225
v. t.: varios subíndices especiales al principio de este índice
subnector: 344
v. t.: gramática
subordinada, o: reducción, paso, etc., 284
subrogabilidad: 90
subrogación: 84 ss.
definición, 85
teorema de la, 86
sucesor: siguiente, 33 (= **SB**), 224, 464
sufijo: 46
v. t.: subíndice, índice
sufijo numérico: 217
v. t.: subíndice
sujeto: de una proposición elemental en la teoría ilativa, 342,
identificables, 401
sujeto, teorema de la construcción del: 354, 353-366
sujeto, conversión de: 342
teoremas, 366-378
sujeto, expansión del: definición, 342
teorema, 370
generalización del teorema, 376 s.
incumplimiento del teorema para la reducción fuerte, 376 s.
sujeto, reducción del: 342
sujeto, teorema de la reducción de: 368 ss.
generalización, 371 s.
para la reducción fuerte, 376 ss.
incumplimiento en $\mathscr{F}_1$ (λ), 387
para FR-deducciones, 444-447

suma: (v. U), 464
sustitución: en [PM] y la matemática ordinaria, 20-22
funcional en el cálculo de predicados, 215.
en relación con variables libres, 79 s.
múltiple (simultánea) reducida a simple, 80
confusiones y colisiones entre variables, 124
v. t.: F-sustitución; prefijo, regla; teorema; variables de sustitución
sustitución, prefijo de: definición para variables libres, 80
en λ-conversión, 124, 129 ss.
en $\mathscr{H}$, 261 ss.
extensión a $\mathscr{J}$. $\mathscr{M}$., 270, 274
sustitución, regla de: 20, 21, 56, 82 s.
v. t. (α); (β); (γ).
sustitución teorema de: 382 s.
incumplimiento de la formalización, 456
sustitución, variable de: 78, 82 s.

T: 15, 337
$\mathfrak{T}$: 15, 337
T: 463
Tarski, A.: 56, 60, 61, 109, 310
tautología: como epiproposición, 21, 66
como epicategoría, 333
[TCm]: 19
teorema: numeración, 13
significación en la geometría elemental, 31
v. t.: teorema elemental; epiteorema
teoréticas: reglas, 36
teoría de combinadores: 24
v. t.: intuitiva; fundamentos logísticos; sintética
teoría de la funcionalidad: definición (varias clases), 331 s.
historia, 342
naturaleza y papel, 347 s.
v. t.: básica; forma inferencial de la funcionalidad; parcial; restringida; forma λ de la funcionalidad
teoría de los tipos: 333
teoría propiamente dicha, de un sistema formal: 36, 39
teoría ampliada (de la funcionalidad): 332
tercio excluso: irrelevancia para la paradoja de (PW), 325
Church [LEM], 345
terminación: de procesos de reducción de sujeto, 375, 421, 447
terminales, especificaciones: 38
término: nombre utilizable en vez de 'ob' 33, 45
de una secuencia constructiva, 68
término o final: de una construcción, 70
de una deducción, = conclusión
terminología: de clases de combinadores, 208 s.
de combinaciones, 207, 209
[TEx]: 42, 58
[TFD]: 35, 45, 46, 50, 58, 60, 66, 75, 108, 326, 343, 392, 398, 404
T-forma de la funcionalidad: 392-397
v. t.: regla T
típica-tipo: reducción definicional, 94
β-reducción, 184
βμ-reducción, 186 s.
reducción fuerte, 298
base, 422
F-deducción, proposición (en $\mathscr{F}_1{}^b$), 422
FQ- deducción, proposición, etc., 439
tipificable, proposición: 422, 439
tipificación: y teorema de —. Para reducciones definicionales, 94 s.
β-reducción, 182-187
βη-reducción, 186 s.
reducción fuerte, 298
F-deducciones en $\mathscr{F}_1{}^b$, 419-425
FQ-deducciones, 439-442
$\mathscr{F}_1{}^a$: 446
$\mathscr{F}_1{}^r$: 449
$\mathscr{F}_1{}^s$: 451
tipificación, base de (base tipificadora): 422
tipificación fuerte: $\mathscr{F}_1{}^a$, 448
tipo: categoría de obs, 19, 36, 57
de un extenso generalizado, 163
de un paso reductivo (tipos I, II, III), 283
como categoría formal («teoría de los tipos»): 332 s.
torniquete: 76
traducción: de un sistema formal a forma logística, 51 s, 309-313, 317 ss.
sentidos estricto y amplio, 319
transformación: como generalización de la extensión definicional, 269
v. t.: H-transformación; λ-transformación
transitividad: 87
v. t.: (τ)
trazo, función: 27, 342

T, regla: de la funcionalidad, 393 s., 415
T, sentido: de una proposición, 412
Turing, A. M.: 26, 75

U: de Schönfinkel, 27, 342
como variable, 268, 385
$\mathfrak{U}$: 268
[UDB]: 74
U: lenguaje, 47
inicial, 47
relación con el metalenguaje, 58 ss.
v. t.: U-variable
último (terminal): definiens, 67, 93
univalente, definición: de extensión definicional, 95 s.
relativa, 102 s.
universal, categoría: 303 s., 342 s.
v. t.: E, regla E; predicado universal
universal, generalidad: 61 s., 332 s.
historia, 342 s.
v. t.: $\mathscr{F}_3$; π
universal, predicado: 81
v. t.: categoría universal
universal, cuantificador: v. generalidad universal.
Unverträglichkeitsfunktion (función de incompatibilidad): 27, 342 (Schönfinkel)
[UQC]: 217, 237, 343
uso y mención: 45, 50, 142
U-variable: 78
convenciones al respecto, 121 s., 196, 267 s., 336 s., 348 s., 392 ss., 427 s.
v. t.: lenguaje U
U + A : lenguaje, 47 s.

V: 268
$\mathfrak{V}$: 209, 268
validez: de interpretación, 43, 58 s.
v. t.: aceptabilidad; verdad
valor: = definiens último, 93
variable: 78, 82 s., 20-24, 31, 47 s., 70 ss.
compromiso ontológico, 61 s.
supuesto de distinción, 362
v. t.: variable formal; notación; U-variable
variable ligada: 62, 79, 118 ss.
confusión de, 124
colisión de, 125
v. t. formal, variable; λ-
variable, proposición: de una base radical, 420
variación, teorema de: 381
variador: 300 s., 209
carácter funcional, 383
Veblen, O.: 56 57
v. t.: — y Young
Veblen, O., y Young, J. W.: 57
verbo : (=predicativo), 45, 344
verdad: dos clases en relación con los sistemas formales, 44
semántica, 59
criterios de — para epiproposiciones, 66
la identificación con $\mathbf{Z}_2$ por Church, 144 s.
v. t.: aceptabilidad; validez
von Neumann, J.: v.: Neumann, J. von

$\mathfrak{W}$: 209, 301
W: 197, 202, 203 ss., 246 ss.
v. t.: (FW)
(W): 197, 466
$(W)_1$: 250
W_n: 214, 237
W_*: 230, 236 s., 360 s., 365, 431, 464
(We): 415, 419
wef: v. well-formed
Weiss, P.: 57
well-formed (bien formada): expresión o fórmula, 49, 123 s., 142 s.
Weyl, H.: 56, 57
Whitehead, A. N.: v. [PM]
WI: v. W_*
Wilcox, L. R.: v. Kershner, R. B., y —
Wilder, R. L.: 56, 57
(W*l*): 398, 402, 411, 419
WWW: 208, 230, 431

X: 91, 240, 268
[*x*]: 240, 240-243, 243 ss.
$\mathfrak{X}$: 240, 268
X: 463
[x_1, ..., x_m]: 240, 240-243, 243 ss.
χ: -extensión, 83

Y: 91, 240, 268
$\mathfrak{Y}$: 240, 268
Y: 229, 324
v. t.: combinador paradójico
Young, J. W.: 56, 57
v. t.: Veblen, O, y
yuxtaposición: 16, 53, 121, 143

Z: 91, 240, 268
$\mathfrak{Z}$: 240, 268
Z_n: 224 s., 236 s., 383
Z_o: 224 s., 383
Z_1: 224, 383
ZbM: 1.ª
Zermelo: 30
Zubieta, R. G.: 22
v. t.: Curry [rev Z]

(α): 124, 465
α -conversión: 126, 130, 148
(β): 125, 465
β -aceptabilidad: 256 ss., 338
β -conversión: 124, 126
propiedad (D) en la — 155 ss.
β I-conversión: 126
formas normales, 186 ss.
v. t.: λI-conversión
β K-conversión: 126
incumplimiento del teorema de la forma normal, 187 s.
v. t.: λ K-conversión
β-normal, forma: v. forma normal
β- extenso: 128
compuesto, 175
cabeza, anterioridad, etc, 183 s.
v. t.: extenso
β-reducción: 126
v. t.: λ-reducción
$\beta\delta$-conversión: 128
forma fuerte de la propiedad (D), 159-162
teorema de Church-Rosser, 171
propiedad (H), 164
$\beta\delta_1$-conversión: v. δ_1-conversión
$\beta\eta$-conversión: 126
incumplimiento de (E) y de la forma fuerte de (D), 159 ss.
teorema de Church-Rosser, 180, 175-181
tipificación, 186
v. t.: conversión λ plena; η-contracción; η-conversión.
$\beta\eta$ I-conversión: v. $\beta\eta$-conversión; λI-conversión.
$\beta\eta$ K-conversión: v. $\beta\eta$-conversión; λ K-conversión.
$\beta\eta\delta$ -conversión: v. conversión λ plena
Γ, 463
Γ_m: 220, 222
(γ): 261, 466
Δ: 463
Δ_n: (Rosser), 220,
(δ): 127, 466
(δ_1): 129
δ-conversión: 127, 142, 162
v. t.: $\beta\delta$-conversión; conversión λ plena.
δ_1-conversión: 129, 142 s., 144 s., 178
extensionalidad, 127, 144 s.
significación de la —, 144 s. 327
δ: extenso, 127
incumplimiento de la posposición de η-contracciones, 177 s.
complicaciones en el teorema de Church-Rosser, 181, 183
v. t.: extenso
ε: 74, 77, 100
(ε): 87, 466
ε: 120
ε_x: 120
(ζ): 127, 144, 256, 466
v. t.: extensionalidad
(ζ'): para β-conversión, 194
para la teoría de combinadores, 256
(η): 126, 144, 254 ss., 466
v. t.: (c); extensionalidad
(η'): 194, 254 ss.
η-aceptabilidad: 256 ss.
η-contracción: exclusión en la demostración de (D), 158 s.
posposición, 175 ss.
anticipación, 178 ss.
η-conversión: 126
pura, 174
v. t.: $\beta\eta$-conversión; η-contracción.
η: extenso, 128
Θ: 120, 464
θ: para F-simples, 330, 349, 456
como prefijo descriptivo, 120
(θ): 306, 466
θ_n: 330
θ-reducción: 177
Λ: 464
λ: 16, 28, 114 ss., 121, 267, 337, 412
relación con variables ligadas en general, 118 ss.
λ^n: 116
λ-amplicacional: sistema, 117 s., 121-123
λ, cálculo: v. λ-conversión
λ-conversión: 25, 112-145
historia, 27 ss., 142, 342
naturaleza sintáctica, 59, 142

morfología, 121-123
reglas teoréticas, 123 ss.
indecidibilidad, 142
consistencia, 194
equivalencia con la teoría de combinadores, 267-277
v. t.: teorema de Church-Rosser; conversión λ plena; abstracción funcional; β-conversión; δ-conversión; η-conversión; λ-forma de la funcionalidad; λ I-conversión; λ K-conversión.
λ-forma de la funcionalidad: $\mathscr{F}_1{}^b$ (λ), 384-388
relaciones con otras formas, 412
v. t.: forma inferencial de la funcionalidad.
λ I-conversión: 123
motivación, 144, 187, 326, 418
teorema de la forma normal, 186
funcionalidad correspondiente, 418
v. t.: β I-conversión
λ K-conversión: 123
motivación, 144, 187
teorema de la forma normal, 187-188
v. t.: λ K-conversión restringida.
λ-ob: 121 ss., 207
λ-reducción: 126, 150
relativa a un conjunto de extensos, 152 ss.
normalización, 183
generalizada, 150 s.
minimalización, 167 ss.
v. t.: reducción especial.
λ, regla: reglas teoréticas de la λ-conversión, 123-129, 267 ss.
v. t.: (α); (β); (δ); (η); (ξ).
λ: teoría, 412
λ-transformación: 269
λδ-conversión: (Church). v. δ_1-conversión
(μ): 87, 123, 238, 305, 466
eliminación, 305, 307 s.
v. t.: $\mathbf{Q}^{\mu}$
[μ]: 308
μ-función: (Kleene), 96
(ν): 87, 123, 238, 305, 466
eliminación, 248, 305-309
[ν]: 308
Ξ: 120, 314, 453, 464
historia, 144, 343
relaciones con **F**, **P**., 333 ss., 453
v. t.: generalidad restringida; Ξ′; Ξ″.
Ξ′: 334 s., 453 s., 461
Ξ″: 334 s., 457 ss., 461
(ξ): 123, 252, 278, 466
relación con (ʒ) 127
derivación en $\mathscr{H}$, 252 ss.
derivada de (ʒ′), 256 s.
incumplimiento para ≥ con algún [x], 276
relación con (ξ′), 279
(ξ′): 279, ss., 377
π: 120, 464
relación con Ξ, **E**, 333 ss., 337
historia, 342 ss.
(ρ): 87, 123, 238, 305, 466
en la teoría de la definición, 92
derivación a partir de (**I**), 307
v. t.: $\mathbf{Q}^{\rho}$; reflexividad
Σ: 62, 120, 322, 342, 464
(σ): 87, 123, 238, 305, 466
eliminación, 305-308
v. t.: $\mathbf{Q}^{\sigma}$
(τ): 87, 123, 238, 305, 466
v. t.: $\mathbf{Q}^{\tau}$
Φ: 199, 249, 464
definiciones sintéticas, 202, 205, 215, 249
historia, 236 s.
carácter funcional, 383
(Φ): 199, 466
Φ^n: 213
Φ_n: 218, 249 s., 383
$\Phi_n{}^m$: 220
(φ): 306, 466
v. t.: $\mathbf{Q}^{\varphi}$
(χ): v. propiedad de Church-Rosser
Ψ: 199, 248, 464
definiciones sintéticas, 202, 205, 214, 222, 249
historia, 236 s.
uso para definir **Q**, 314
carácter funcional, 383
(Ψ): 199, 466
(Ψ): 306, 466
ω: 464
(ω): 259, 251, 339, 466
(ωβ): 259
(ω_η): 258

O: 33, 41
I-II-reducción: 284
III-reducción: 284

*: 40, 54
$*_n$: 54
§: 13

$\vdash$: 16, 20, 51, 76, 302 s., 351
$[\vdash]$: 306, 309, 322
$\vdash_\lambda$: 385 s.
$\vdash'$: 382, s., 392, 412
$\neg$: 16, 20, 22, 74, 75, 77, 228
V: 20

— : signo de sustracción, 21, 100, 114
= : 16
  en $\mathcal{N}_o$, 33, 48
  en general, 47, 89, 148
  identidad de conjuntos, 100
  en λ-conversión, etc., 123, 126, 130, 147
  en la teoría de combinadores, 197, 209, 239, 248, 261 s.
  en la teoría ilativa, 338 s., 349, 429
  notaciones, 463
  v. t.: igualdad; **Q**, **Q**
{=}: 463
$=_n$: 209
$=_\beta$: 191
  v. t.: β-conversión
!: 41
+: 46, 69, 82
□: 52
|: 54, 120, 144, 152
=: 16, 53, 67, 74, 89, 97, 163, 261
$\rightleftarrows$: 16, 67, 74, 75
×: 69
&: 16, 74, 75
$\Rightarrow$: 16, 74, 75
$\rightarrow$: 16
$\subseteq$: 77, 101
ς: 79, 113, 119, 124
$[-/-]$: 16, 80, 124, 129, 261, 344
$\geq$: 16, 90, 126, 146, 147, 149, 197, 208 209, 241, 245, 248, 339
$\geq_\eta$: 210
$\geq_\beta$: 175, 339, 180
$\geq_\eta$: 175
$\geq_\sigma$: 181
$\succ$: 278
$\succ_N$: 287
$\succ_{N\text{II}}$: 284
$\succ_{\text{III}}$: 284
$\cup$: 101
$\cap$: 101
$\supset$: 324, 389, 453, 463, 464
$\supset_x$: 120, 453
$\cong$: 147, 150, 252
$>_1$: 150, 177 ss., 183
$>_{1\delta}$: 177 ss.
$>_{1\eta}$: 177 ss.
$\leq$: 16, 201, 209
$\doteq$: 209
· : 211
$\Vdash$: 392, 393

SUCESORES DE RIVADENEYRA, S. A.—PASEO DE ONÉSIMO REDONDO, 26.—MADRID-8